UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y EL ESPACIO

FACULTAD DE INFORMÁTICA CULIACÁN

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE LA SOLUCIÓN DEL CAMPO DE GRAVEDAD A PARTIR DE LA MISIÓN GOCE MEDIANTE LA INVERSIÓN DE LA INTEGRAL DEL GRADIENTE VERTICAL DE LA GRAVEDAD

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:
JESÚS GUADALUPE MONJARDÍN QUEVEDO

DIRECTORES DE TESIS:
DR. RAMÓN VICTORINO GARCÍA LÓPEZ
DR. GUADALUPE ESTEBAN VÁZQUEZ BECERRA

CULIACÁN, SINALOA, OCTUBRE DE 2018

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a mis padres, Jesús Lorena Quevedo Quintero y Rosendo Monjardín López, quienes me han brindado su apoyo en todos los sentidos de mi vida. A mis asesores el Dr. Ramón Victorino García López y a el Dr. Guadalupe Esteban Vázquez Becerra por su invaluable ayuda en el desarrollo de este estudio. Al consejo nacional de ciencia y tecnología (CONACYT) por el apoyo brindado para la realización de la maestría. Agradezco a cada uno de los maestros de la Facultad de Ciencias de la Tierra y El Espacio (FACITE) y la Facultad de Informática Culiacán, por haberme enseñado y guiado en los cursos del posgrado, así como a cada uno de los que conforman el Posgrado en Ciencias de la Información (PCI) por su ayuda y paciencia. A José Ramón Gaxiola y Xóchitl Guadalupe Torres, así como a cada uno de los que revisaron este trabajo, por sus correcciones y recomendaciones. A mis hermanos Rosendo, Yuridia y Remigio por brindarme su ayuda. A mis abuelos Francisca y Esteban a quienes recuerdo con aprecio, y a mi abuela Rafaela quien me dio los primeros aprendizajes e introdujo en mí el carácter de nobleza, respeto y sinceridad. Finalmente, a todos mis compañeros y amigos por sus enseñanzas y consejos.

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

En el presente estudio se procesaron mediciones del Gradiente Vertical de la Gravedad (GVG) producidos por la misión del campo de gravedad y la exploración del estado actual de la circulación de los océanos (GOCE, por sus siglas en inglés) para obtener el potencial de perturbación (*T*) y posteriormente alturas geoidales (*N*). La obtención de *N* a partir de datos de la misión GOCE se realiza aplicando la inversión de la integral del GVG empleando la transformada rápida de Fourier en una dimensión (1D-FFT, por sus siglas en inglés). Se realizó el análisis de precisión con datos simulados y datos reales del GVG, donde al ejecutar la inversión con datos simulados del modelo geopotencial EGM2008 (*Earth Gravity Model 2008*) se emplea la integral del GVG de modo directo y aplicando 1D-FFT, al emplear la integral de modo directo la regularización se logró aplicando los métodos de Tikhonov, descomposición del valor singular amortiguado (DSVD, por sus siglas en inglés) y descomposición del valor singular truncado (TSVD, por sus siglas en inglés) agregando error aleatorio de $3x10^{-3}\,E$ (*Eötvös*). El método que produjo mejores resultados fue DSVD, obteniendo precisiones del orden de 27 a 30 cm. Por otro lado, al aplicar la inversión con 1D-FFT y regularización Tikhonov se obtienen precisiones de 31 a 35 cm en las mismas configuraciones de mallas aplicadas al emplear integral directa. Para interpolar los datos de la misión GOCE a mallas uniformes se aplicó el método de colocación por mínimos cuadrados. Al interpolar en mallas de 10°x10° con intervalos Δϕ = Δλ = 0.50° empleando 2 conjuntos de datos de 2 meses del GVG, resulta una media de -0.65 m*E*, con desviación estándar de 4.1 m*E* y correlación de 0.994. Al interpolar empleando 3 meses de datos del GVG empleando la misma configuración, se obtienen precisiones del orden de 3.7 a 14.6 m*E*. Por otro lado, al emplear intervalos Δϕ = Δλ = 0.25° se requieren 7 meses de mediciones para obtener al menos un valor por ventana, donde al comparar los conjuntos de datos entre sí de los 4 años de mediciones, resultan precisiones del orden de 4.9 a 9.9 m*E*. Al realizar la inversión GVG empleando 1D-FFT con regularización Tikhonov a datos reales de la misión en una malla de 10°x10° con intervalos de 0.25° se obtienen precisiones del orden de 0.45 a 1.54 mm al comparar los conjuntos de datos de 7 meses de mediciones.

ABSTRACT

To obtain the disturbance potential (*T*) and geoid height, measurement of the Vertical Gravity Gradient (VGG) produced by the GOCE (*Gravity Field and Steady-State Ocean Circulation Explorer*) satellite mission were processed in this study. The inversion of the VGG integral was performed applying one-dimensional fast Fourier transform (1D-FFT) using GOCE Vertical Gravity Gradient to compute geoid height. Precision analysis was performed with simulated data and real data. The direct inversion and regularization of the VGG integral was executed applying the Tikhonov, DSVD (*Damped Singular Value Decomposition*) and TSVD (*Truncated Singular Value Decomposition*) methods, respectably. When using simulated data with the global geopotential model EGM2008 (*Earth Gravity Model 2008*), where a random error of $3x10^{-3}\ E$ was applied. In this case, the method that produced better result was the DSVD method, obtaining precisions in the order of 27-30 cm for different grids configurations. On the other hand, when the inversion is applied using 1D-FFT with Tikhonov regularization and using the same geometrical grids configurations, precisions in the order of 31-35 cm are obtained. The interpolation of GOCE measurement to uniform grids is made with Least Square Collocation (LSC) method. The author interpolated data in grids of 10°x10° with intervals $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$ using 2 sets of two moths of GVG data, during the comparison of these data sets, we obtained a mean of -0.65 m*E*, standard deviation of 4.1 m*E* and correlation 0.994. When three months of data are used in the interpolation, using the same configuration, a precision in the order of 3.7-14.6 m*E* can be obtained in the case of using the whole data generated by the mission. Differently, using intervals of $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ in the same configuration 7 months of data was required for the interpolation to obtain at least one value per window, we compared data sets with each other obtaining precisions in the order of 4.9-9.9 m*E*. When performing the inversion of the integral applying 1D-FFT with Tikhonov regularization using real measurements and using configuration of a 10°x10° grid with 0.25° intervals, the precisions obtained were in the order of 0.45-1.54 mm. For this case data sets of 7 months were employed in the interpolation using regular grids.

1. INTRODUCIÓN

En los últimos años, tres misiones satelitales han producido datos del campo de gravedad global terrestre, estas misiones son: las misiones CHAMP (*CHAallenging Minisatellite Payload*), GRACE (*Gravity Recovery and Climate Experiment*) y GOCE (*Gravity Field and Steady State Ocean Circulation Explorer*).

De estas misiones la última lanzada fue GOCE (Marzo, 2009), siendo una misión de gradiometría, fue administrada por la Agencia Espacial Europea (ESA, por sus siglas en inglés) y terminó el 11 de noviembre de 2013, después de 4 años y 8 meses orbitando, dejó gran cantidad de mediciones del campo de gravedad terrestre. Los datos de esta misión han sido y pueden ser aplicados para determinar modelos globales y locales del geoide o alturas geoidales.

El geoide es la superficie equipotencial que más se asemeja a la superficie real de la Tierra, siendo de suma importancia para las ciencias de la Tierra como son la geodesia, geofísica, geología, cartografía, entre otras. La determinación precisa de dicha figura es uno de los principales propósitos de la geodesia. La misión GOCE produjo un mapeo cíclico del campo de gravedad terrestre, con periodos cercanos de un mes. La gradiometría satelital es la técnica empleada por el satélite GOCE con la cual se ha comprobado que es posible obtener una alta precisión y resolución (Pail et al. 2011). Con esta misión se ha logrado obtener un modelo geopotencial con expansión de 330 en grado y orden usando armónicos esféricos (Gatti et al. 2016). La misión GOCE nos proporciona los gradientes de gravedad, es decir, las segundas derivadas en tres dimensiones (x, y, z) del potencial gravitacional.

Es sabido que la determinación del campo de gravedad terrestre y por ende del geoide a partir de la gradiometría satelital es un problema de inversión, siendo altamente inestable. Esto es, pequeños errores en las mediciones son altamente amplificados en la solución, por tal motivo, este tipo de problemas requieren regularización (Bouman, 1998). Para ello, los métodos de regularización más utilizados son: regularización de Tikhonov-Phillips, estimación desviada, colocación por mínimos cuadrados (LSC, por sus siglas en inglés), descomposición del valor singular amortiguado (DSVD, por sus siglas en inglés), descomposición del valor singular truncado (TSVD, por sus siglas en inglés) y métodos de iteración. En este trabajo se realiza un análisis comparativo y de estabilización sobre el desempeño de tres métodos de regularización, al determinar el geoide empleando datos simulados del modelo geopotencial EGM2008. Por otro lado, se emplean datos reales producidos por la misión GOCE para determinar el geoide en un área de 10°x10°. Los datos empleados son el Gradiente Vertical de la Gravedad (GVG) que corresponde a las segundas derivadas verticales del potencial gravitacional terrestre, al sustraer en un campo de referencia se obtienen los correspondientes valores del potencial de perturbación. Las alturas geoidales se obtienen por inversión de integral aplicando aproximación esférica del campo anómalo de gravedad.

1.1. Planteamiento del problema

La determinación del geoide por mediciones satelitales geodésicas, el cálculo de la distribución de masas de la Tierra a partir del potencial gravitacional exterior y la obtención de funciones de distribución de la velocidad espacial para estrellas cercanas al sol, son ejemplos de problemas de inestabilidad o mal condicionados, los cuales requieren regularización (Bouman, 1998). El mal condicionamiento de un problema es reflejado por pequeños cambios en los datos de entrada, los cuales resultan en cambios grandes en los datos de salida. El geoide puede ser resuelto a partir de la gravimetría satelital. Usualmente, para determinaciones locales del geoide a partir de los datos de una misión gradiométrica como GOCE se presenta una inestabilidad en la solución para lo cual es necesario estabilizar el sistema aplicando distintas técnicas, para lograr esto se aplican los llamados métodos de regularización (antes mencionados).

En tal sentido, estos métodos pueden ser aplicados a los datos de la misión GOCE, permitiendo con ello obtener distintas soluciones del geoide, para de esta manera obtener una solución estable. Las soluciones deben ser validadas realizando comparaciones entre sí o con soluciones independientes producidas por otras técnicas, así como con otras misiones y datos geodésicos.

1.2. Justificación

La medición del campo de gravedad terrestre es de suma importancia para las ciencias de la Tierra como la geodesia. Con esta información es posible darle solución al geoide, la determinación de esta figura es y ha sido uno de los principales propósitos de la geodesia, tal figura es la superficie principal de georreferenciación vertical para los levantamientos topográficos y cartográficos. Además, beneficia a muchas ciencias como son la geofísica, sismología, geología, oceanografía, vulcanología y geodesia por mencionar algunas.

La determinación del campo de gravedad terrestre por mediciones satelitales es una técnica eficiente para la determinación del geoide, proporcionando en forma rápida un gran número de mediciones gravimétricas con distribución en toda la superficie terrestre. Las determinaciones de modelos geopotenciales son de carácter global a partir de coeficientes armónicos esféricos, si se desea determinar el geoide en un modo local con datos del gradiente vertical de la gravedad proporcionado por GOCE, es posible obtener un geoide local aplicando la inversión de una integral. En este caso se utiliza la integral del GVG, dicha integral puede ser evaluada con la transformada rápida de Fourier (FFT, por sus siglas en inglés), obteniendo la solución del geoide en un área local.

De las misiones satelitales lanzadas en los últimos años (CHAMP, GRACE y GOCE), GOCE es la más reciente y fue la que realizó mediciones del gradiente de gravedad a una altitud más baja (260 km). El objetivo principal del satélite GOCE fue la determinación del campo de gravedad de la Tierra y el geoide con alta precisión y resolución espacial (ESA, 1999). La determinación del geoide con datos de la misión GOCE nos permite ver los alcances de la misión y obtener representaciones de la superficie terrestre en áreas de interés.

1.3. Antecedentes

1.3.1. Aspectos teóricos de las misiones satelitales geodésicas

La información recopilada por las misiones CHAMP, GRACE y GOCE es de suma importancia para las ciencias de la Tierra (Seeber, 2003). Por ejemplo, son de utilidad para la determinación de modelos del geoide lo cual nos brinda información del lugar de medición (utilidad geodésica) y, además, estas mediciones son repetidas sobre la misma área o región, con lo cual es posible realizar un análisis temporal de las zonas de interés (utilidad geodinámica) (Martín y Padín, 2003).

Las misiones propuestas para describir la gravedad se basan en varios conceptos relacionados a las mediciones, incluyendo la medida de la distancia entre dos satélites de órbita terrestre cercana (Keating et al. 1986), rastreando un satélite de configuración baja-baja con un satélite de órbita alta-alta (Jekeli y Upadhyay, 1990), o midiendo los gradientes gravitacionales en un solo satélite de configuración de órbita baja-baja (Bernard y Touboul et al. 1989).

1.3.2. Problema de inversión

En las ciencias de la tierra y particularmente en la geodesia, se han utilizado diferentes técnicas para evaluar integrales con datos dados sobre la esfera. Los métodos más populares, que se han tratado, son integración numérica directa, 2-D FFT y 1-D FFT combinada con integración numérica. Cada uno de estos métodos tiene un proceso de inversión asociado (Guzmán, 2008).

La determinación del campo de gravedad terrestre mediante la gravimetría satelital es un problema de inversión muy inestable o mal condicionado, por lo que se requiere aplicar regularización (Bouman y Koop, 1997). Las publicaciones sobre esta cuestión se remontan a la primera mitad del siglo XX. Estos tipos de problemas se presentan en la física (problemas de inversión de la teoría de dispersión cuántica), geofísica (problemas de inversión de la prospección eléctrica, sismología y teoría del potencial), astronomía, mediciones satelitales geodésicas y otras áreas de la ciencia. Desde el surgimiento de los sistemas computacionales, las áreas de aplicación de la teoría de problemas de inversión y mal condicionados se han extendido a casi todas las áreas de la ciencia que usan métodos matemáticos (Kabanikhin, 2008).

En la geodesia y geofísica frecuentemente se presentan problemas de inversión, los cuales pueden ser resueltos de varias maneras. En los problemas de inversión generalmente se requiere convertir observaciones a información de forma física u otro tipo de sistema. Frecuentemente el problema está mal condicionado, esto implica que las observaciones disponibles no son suficientes para determinar una solución única o incluso si una solución única existe, puede ser determinada solo aproximadamente. Un problema típico de inversión lineal es que se necesita convertir observaciones relacionadas con la gravedad en la superficie terrestre para estimar la distribución de la densidad en el interior de la Tierra (Sjöberg, 2012).

En un área local se aplicaron datos simulados de la misión GRACE, donde se aplicó la integral de Poisson y para estabilizar el sistema se utilizó regularización Tikhonov obteniendo alturas geoidales con precisiones de 2 cm para una resolución espacial de 150 km (García, 2002). Con datos recopilados por la misión CHAMP también fue posible obtener alturas geoidales, en este caso los datos fueron aplicados de un modo global para obtener soluciones de alturas geoidales en mallas regulares y aplicando el método de colocación por mínimos cuadrados (Guzmán, 2008).

Fischer y Michel (2013), aplicaron un método reciente de inversión a los datos de la misión GRACE llamado *Regularized Functional Matching Pursuit* (RFMP) que es aplicado en los problemas de inversión mal condicionados, para obtener una solución en el análisis del clima tales como las sequias e inundaciones en la región del amazonas. Por otro lado, se aplica regularización (*time-wise*, por su nombre en inglés) para obtener una solución del campo de gravedad, resultando un modelo del geoide de grado y orden 224, utilizando datos de dos meses del satélite GOCE (Pail et al. 2010).

En el presente estudio se analizaron 3 métodos de regularización (Tikhonov, DSVD y TSVD) aplicados a datos simulados del modelo geopotencial EGM2008 afectados por errores aleatorios de 0.003 E (*Eötvös*, donde $1E = 10^{-9}\ S^{-2}$) donde se emplea la integral numérica directa y 1D-FFT. En la integral numérica directa se encuentran mejores resultados aplicando regularización con DSVD, obteniendo resultados con una precisión de 26 cm, media de 14 cm y correlación de 0.995, esto para una malla de 80x80 con intervalos de separación de 0.30°.

1.4. Objetivos

1.4.1. Objetivo principal

Analizar la precisión en la obtención de alturas geoidales a partir de mediciones del gradiente vertical de la gravedad, producido por la misión GOCE, mediante inversión regularizada por la transformada rápida de Fourier FFT (*Fast Fourier Transform*) de la integral del gradiente vertical de la gravedad en aproximación esférica, utilizando regularización.

1.4.2. Objetivos particulares

- Interpolar los datos a mallas regulares en la altura satelital.
- Determinar el mejor método de regularización al obtener N utilizando la integral directa del gradiente vertical de la gravedad.
- Evaluar y validar las soluciones producidas por el método aplicado.

2. CAMPO DE GRAVEDAD TERRESTRE

De acuerdo con Heiskanen y Moritz (1967), la gravitación es una fuerza fundamental observada en la naturaleza. Origina los movimientos a gran escala que se observan en el universo, tales como, la órbita de la luna alrededor de la Tierra, las orbitas de los planetas alrededor del sol, entre otros.

Newton (1648-1727), fue el primero en proponer una ley de la gravitación basada en la fuerza, que se puede formular en los siguientes términos:

Una partícula del universo atrae todas las demás con una fuerza directamente proporcional al producto de su masa e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre ellas. La dirección de la fuerza sigue la línea que une las partículas.

2.1. Teoría del potencial gravitacional

Los modelos geoidales son una representación del campo de gravedad terrestre, por lo que el planteamiento matemático de ellos se basa en los fundamentos y conceptos de la teoría del potencial, aplicándola al campo de gravedad terrestre. Esto es también la caracterización del potencial gravitacional y de gravedad.

2.1.1. Fuerza y potencial gravitacional

La determinación del campo de gravedad terrestre se logra con mediciones gravimétricas y utilizando la teoría clásica del potencial. Newton postuló la relación directa entre la fuerza gravitacional y la masa en forma de la ley de gravitación. De acuerdo a la ley de gravitación de Newton (1687), dos puntos con masas m_1 y m_2 separados con una distancia l se atraen uno al otro con una fuerza F dada por:

$$F = k\frac{m_1 m_2}{l^2} \tag{2.1}$$

Donde k es la constante gravitacional, dada por:

$$k = (6.67259 \pm 0.00085) \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \bullet s^2}$$

Si designamos a la masa m_1 como masa atrayente y consideramos a m_2 como masa atraída con valor unitario entonces podemos escribir

$$\mathbf{f}_m = k\frac{m}{l^2} \tag{2.2}$$

Referenciando los puntos de las masas puntuales en un sistema espacial de coordenadas cartesianas, designándose al punto de la masa atrayente *m* con coordenadas (x_0, y_0, z_0) y al punto *P* de la masa atraída con coordenadas (x, y, z), se puede apreciar a la fuerza *F* como la magnitud del correspondiente vector de fuerza ***F*** dirigido a lo largo de la línea entre las dos masas. Las componentes cartesianas del vector ***F***, también llamado vector de la fuerza gravitacional, estarán dadas por (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006):

$$F = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F\cos(\alpha) \\ -F\cos(\beta) \\ -F\cos(\gamma) \end{bmatrix} = \frac{km}{l^2}\begin{bmatrix} \dfrac{\Delta x}{l} \\ \dfrac{\Delta y}{l} \\ \dfrac{\Delta z}{l} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Donde:

$$\begin{aligned} l &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2} \\ \Delta x &= x - x_0 \\ \Delta y &= y - y_0 \\ \Delta z &= z - z_0 \end{aligned}$$

Donde α, β y γ representan los ángulos del vector de fuerza con respecto a los ejes coordenados X, Y, Z, respectivamente. Así tenemos que:

$$F = |\mathbf{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{2.4}$$

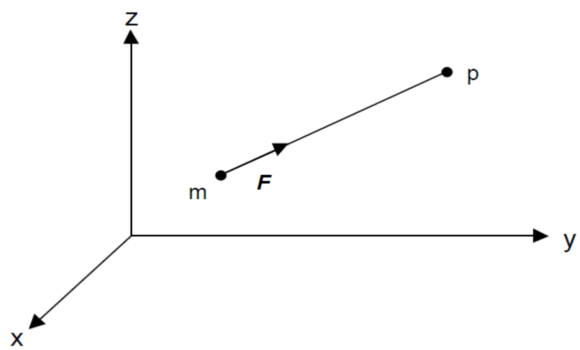

Figura 2. 1: Vector de la fuerza gravitacional dirigido desde el punto de masa **m** al punto de atracción **p.**

La geometría de la componente de fuerza F_x se ilustra a continuación:

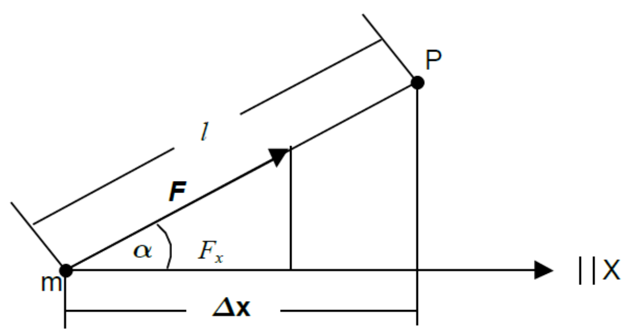

Figura 2. 2: Componente F_x del vector de fuerza gravitacional.

Introducimos ahora una función escalar llamada potencial gravitacional. El potencial es aquella función cuya derivada en una determinada dirección representa a la componente del vector de la fuerza gravitacional en dicha dirección. El potencial gravitacional, para el caso de masas puntuales, está dado por:

$$V = \frac{km}{l} \tag{2.5}$$

De acuerdo a la definición anterior tenemos:

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x}\,,\ F_y = \frac{\partial V}{\partial y}\,,\ F_z = \frac{\partial V}{\partial z} \tag{2.6}$$

El vector de fuerza gravitacional también representa el gradiente del potencial, esto es $\mathbf{F}_m = grad\left(V\right)$. Un caso más cercano a la realidad seria que la masa atrayente está formada por un cuerpo sólido. Esto puede verse también como una situación en la que los puntos masa, de un sistema atrayente estén continuamente distribuidos sobre un volumen con densidad ρ la cual está dada por la relación masa volumen (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006):

$$\rho = \frac{dm}{dV} \tag{2.7}$$

Donde dm es un elemento de masa y dV es un elemento de volumen. Entonces el potencial gravitacional producido por este cuerpo en un punto P estará dado por (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006):

$$V_P = k \iiint_{cuerpo} \frac{dm}{l} = k \iiint_{cuerpo} \frac{\rho}{l} dV \tag{2.8}$$

Similarmente, las componentes de la fuerza de atracción estarán dadas por las correspondientes derivadas de la expresión anterior, obteniéndose por ejemplo para la componente F_x:

$$F_x = k \iiint_{cuerpo} \frac{x - x'}{l^3} \rho dV \tag{2.9}$$

Para un cuerpo como la tierra, la integral se definirá por todo el volumen o espacio de distribución de las masas. Obviamente un problema que presenta la ecuación anterior es que se requiere del conocimiento de la densidad o distribución de masas en todo el interior del cuerpo, lo cual en realidad generalmente no se tiene o se conoce con poca precisión. Tenemos que el potencial V es una función continua en todo el espacio con la característica de que se desvanece al infinito.

2.2. Campo real de gravedad

El campo real de gravedad terrestre, descrito en este apartado, está dado por el efecto de las masas terrestres y de la fuerza centrífuga en un punto sobre la superficie terrestre. Este campo es representado por el vector de gravedad o por el potencial real de gravedad, el cual es de suma importancia para la determinación de una superficie de nivel como lo es el geoide.

2.2.1. Fuerza de gravedad

De acuerdo con Torge (2001), la fuerza de gravedad resulta de la aceleración gravitacional $\mathbf{f}_m$ y la aceleración centrifuga $\mathbf{f}_c$ (Figura 2.3), esto es:

$$\mathbf{g} = \mathbf{f}_m + \mathbf{f}_c \tag{2.10}$$

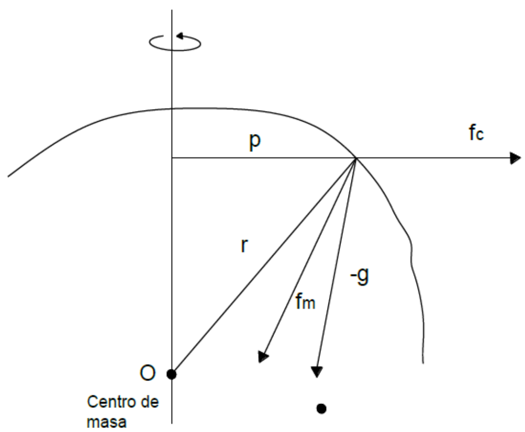

Figura 2. 3: Vectores de la fuerza de gravedad, gravitacional y centrifuga en un punto sobre la superficie terrestre.

Donde $\mathbf{f}_m$ está dada por la ecuación (2.2) y $\mathbf{f}_c$ por $\omega^2\mathbf{P}$, donde $\omega = 7.2921151 \times 10^{-5}\ {}^{rad}\!/_{seg}$ es la velocidad angular de rotación terrestre. Usando la ecuación (2.9) y el potencial centrifugo $\Phi = \Phi(\mathbf{p}) = \frac{\omega^2}{2}\mathbf{p}^2$. El correspondiente potencial de gravedad *W*, estará dada por (Torge, 2001):

$$W = W(x,y,z) = V(x,y,z) + \Phi(x,y,z) = k\iiint_{vol} \frac{\rho}{l} dV + \frac{1}{2}\omega^2 p^2 \tag{2.11}$$

Aplicando el operador de Laplace:

$$\Delta W = -4\pi k\rho + 2\omega^2 \tag{2.12}$$

Resultando diferente a cero fuera de las masas, por lo tanto tampoco es una función armónica. Asimismo el vector de gravedad está dado por:

$$\mathbf{g} = \mathrm{grad}W = \left[\frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \tag{2.13}$$

Donde:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_x &= -k\iiint \frac{x-x'}{l^3}\rho dV + \omega^2 x \\ \mathbf{g}_y &= -k\iiint \frac{y-y'}{l^3}\rho dV + \omega^2 y \\ \mathbf{g}_z &= -k\iiint \frac{z-z'}{l^3}\rho dV \end{aligned} \tag{2.14}$$

A la magnitud g del vector **g** se le llama simplemente gravedad mientras que a su dirección se le llama dirección de la plomada o de la vertical.

2.2.2. Potencial de gravedad

El potencial de gravedad terrestre es una función continua en el espacio, en la que se pueden definir también sus primeras y segundas derivadas parciales con respecto a los ejes de un sistema de coordenadas local o terrestre. Las derivadas parciales son importantes para determinar la curvatura de una superficie de nivel o de la línea de la plomada. La importancia de conocer la curvatura radica en cálculos geodésicos rigurosos, como en la determinación de alturas ortométricas a partir de la nivelación geométrica combinada con mediciones de gravedad.

2.2.3. Superficie de nivel

El potencial de la gravedad es una función continua en el espacio, pudiéndose definir y determinar superficies para las cuales el valor del potencial sea constante sobre las mismas, a estas se les llaman superficies equipotenciales o de nivel. En estas superficies el potencial satisface en cada uno de sus puntos:

$$W(x,y,z) = W_0 = \text{Constante} \tag{2.15}$$

Las superficies de nivel tienen también la característica de que en cada uno de sus puntos es perpendicular el vector de gravedad.

2.2.4. El geoide

La superficie formada por los mares y océanos en reposo se considera como una superficie de nivel, a dicha superficie se le denomina geoide y es la superficie fundamental de la geodesia física. El geoide es una superficie geopotencial que coincide con el nivel medio del mar (océanos en reposo) y se prolonga de una manera natural debajo de los continentes. También se le considera como la superficie de referencia vertical más importante para la geodesia y la cartografía. Como es sabido, los puntos sobre la superficie terrestre se ubican con respecto a una referencia vertical mediante su altura. A la altura de un punto con respecto al geoide o al nivel medio del mar se le llama altura ortométrica (*H*). Esta altura se mide a lo largo de la dirección de la plomada. De manera que un movimiento $\mathbf{ds}$ en esta dirección puede expresarse como:

$$\mathbf{ds} = dH \tag{2.16}$$

Donde:

$$\mathrm{g} \cdot \mathrm{dx} = gdH \cos(\mathrm{g}, \mathrm{dx}) = gdH \cos(180°) \tag{2.17}$$

Esto es:

$$\mathbf{g{\bullet}dx} = -gdH = dW = -gdH \tag{2.18}$$

También:

$$g = -\frac{dW}{dH} \tag{2.19}$$

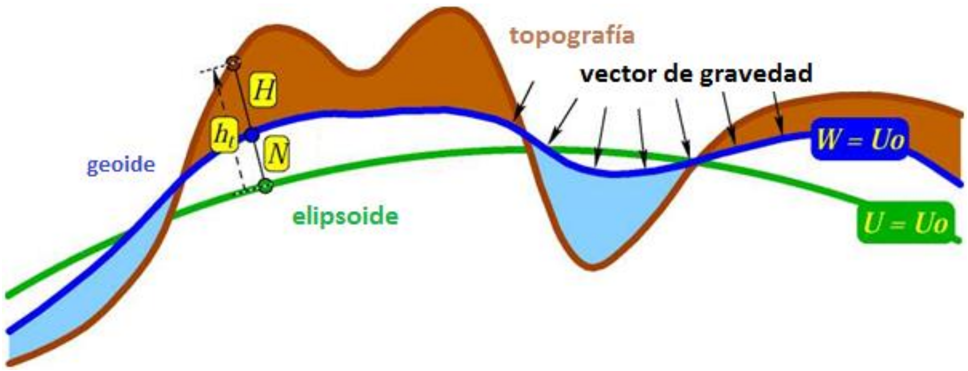

Figura 2. 4: Relación entre el geoide, elipsoide y la topografía (Tomada y editada: página web del ICGEM, 2009).

Uno de los principales propósitos de la geodesia física es la determinación de superficies de nivel que sirvan como referencia vertical como lo es el geoide. Esto implica la determinación de la función para representar el potencial $W(x, y, z)$. De la ecuación anterior se puede apreciar que en principio a partir de la gravedad y de desniveles o diferencias de alturas se puede determinar el potencial terrestre.

2.3. Campo normal de gravedad

2.3.1. Potencial normal de gravedad

El elipsoide de revolución representa de una mejor manera el campo de gravedad terrestre, siendo una superficie equipotencial además de representar el campo normal de gravedad, también se le llama elipsoide de nivel. El potencial normal asociado al elipsoide también puede expresarse en función de coeficientes armónicos teniendo una representación mucho más compacta que la del potencial real.

Al potencial normal asociado con el elipsoide se le designa por $U = U(x, y, z)$. Para este campo también se escribe:

$$U = V(u, \beta) + \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) \qquad (2.20)$$

Donde $V(u, \beta)$ es el potencial gravitacional generado por la masa elipsoidal.

El potencial normal se determina por los siguientes cuatro parámetros: los parámetros del elipsoide a y b, el valor de la masa M y la velocidad angular ω.

El potencial gravitacional asociado a un elipsoide de revolución en el espacio puede expresarse en función de esféricos armónicos elipsoidales.

Dada la simetría rotacional del elipsoide no existe variación con respecto a la longitud por ello todos los términos no zonales desaparecen en la expansión en serie.

El potencial centrífugo en función de coordenadas elipsoidales u, β está dado por:

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\omega^2 (u^2 + E^2)\cos^2\beta \qquad (2.21)$$

Entonces el potencial normal de gravedad está dado como sigue:

$$U(u, \beta) = V(u, \beta) + \Phi(u, \beta) \qquad (2.22)$$

Sobre la superficie del elipsoide, se puede escribir $u = b$, $U = U_0$, entonces el potencial normal de gravedad tiene la forma:

$$U_0 = \frac{kM}{E}\tan^{-1}\frac{E}{b} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \qquad (2.23)$$

Con:

$E = \sqrt{a^2 - b^2}$

El potencial gravitacional también se puede expresar convenientemente en términos de armónicos elipsoidales y coordenadas esféricas (r, θ) (Heiskanen & Moritz, 1967).

La expresión en términos de coordenadas esféricas (r,θ) para el potencial gravitacional normal es:

$$\begin{aligned} V(r,\theta) &= \frac{Km}{r} + A_2 \frac{P_2(\cos\theta)}{r^3} + A_4 \frac{P_4(\cos\theta)}{r^5} + \ldots \\ V(r,\theta) &= \frac{Km}{r} + \sum_{n=1}^{n\max} A_{2n} \frac{P_{2n}(\cos\theta)}{r^{2n+1}} \\ A_{2n} &= (-1)^n \frac{GME^{2n}}{2n+1}\left[1 - \frac{2n}{2n+3}\frac{me'}{mq_0}\right] \end{aligned} \tag{2.24}$$

Por lo que para el potencial de gravedad normal puede escribirse:

$$U(r,\theta) = V(r,\theta) + \frac{1}{2}\omega^2 \left(N(\theta)+h\right) sen(\theta) \tag{2.25}$$

Donde N es el radio de curvatura de la primera vertical y h es la altura geodésica.

2.3.2. Gravedad normal

La gravedad normal γ o su vector $\boldsymbol{\gamma}$ están dado por el gradiente de U.

$$\boldsymbol{\gamma} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}\right]^T \tag{2.26}$$

Para la magnitud de γ sobre el elipsoide se tiene la expresión en términos de la latitud geodésica

$$\begin{aligned} q' &= -\frac{u^2+E^2}{E}\frac{dq}{du} = 3\left(1+\frac{u^2}{E^2}\right)\left(1-\frac{u}{E}\tan^{-1}\frac{E}{u}\right) - 1 \\ m &= \frac{\omega^2 a^2 b}{kM} \end{aligned} \tag{2.27}$$

La cual es llamada formula de Somigliana

$$\gamma_a = \frac{kM}{ab}\left(1 - m - \frac{m}{6}\frac{e'q_0'}{q_0}\right), \qquad \gamma_b = \frac{kM}{a^2}\left(1 - \frac{m}{3}\frac{e'q_0'}{q_0}\right) \tag{2.28}$$

2.3.3. Modelos geodésicos de referencia

Un modelo o sistema geodésico de referencia se define como un cuerpo gravitatorio con una masa y velocidad de rotación definida cuya superficie es un elipsoide equipotencial de revolución. Se han definido y establecido diversos sistemas geodésicos de referencia tanto relativos o para ciertas regiones o países de carácter internacional. Uno de los sistemas de referencia geodésicos más recientes es el GRS80 (*Geodetic Reference System 1980*). Este sistema fue adoptado en la XVII Asamblea General de la Asociación Internacional de Geodesia y Geofísica en 1979, se basa en un elipsoide geocéntrico.

Otro sistema actual importante es el WGS84 (*World Geodetic System 1984*) en el cual se basa el sistema GPS de los Estados Unidos de America. Este es considerado un sistema descendiente del GRS80. Los parámetros básicos de este sistema son:

Tabla 2. 1: Parámetros básicos del Sistema Geodésico de Referencia WGS84.

Parámetro	Descripción
$a = 6378137.0m$	Semieje mayor del elipsoide
$GM = 3.986004418 \times 10^{14} m^3 s^{-2}$	Constante gravitacional geocéntrica de la Tierra incluyendo la atmosfera
$f = 1/298.257223563$	Achatamiento polar
$\omega = 0.7292115 \times 10^{-4}\ rad/seg$	Velocidad angular de la Tierra

Tabla 2. 2: Parámetros derivados del Sistema Geodésico de Referencia WGS84.

Parámetro	Descripción
$b = 6356752.3142m$	Semieje menor del elipsoide
$E = 521854.00842339m$	Excentricidad lineal
$c = 6399593.6258m$	Radio de curvatura polar
$e^2 = 0.00669437949696m$	Primera excentricidad al cuadrado
$e'^2 = 0.00673949674228m$	Segunda excentricidad al cuadrado
$U_0 = 62636851.7146m^2s^{-2}$	Potencial normal sobre la superficie del elipsoide
$\gamma_a = 9.7803253359ms^{-2}$	Gravedad normal en el ecuador
$\gamma_b = 9.8321849378ms^{-2}$	Gravedad normal en los polos
$m = 0.00344978650684$	$m = \omega^2 a^2 b / (GM)$

El WGS84 es un Marco de Referencia Convencional Terrestre. La definición de este sistema de coordenadas sigue los criterios establecidos por el Servicio Internacional de Rotación Terrestre.

2.4. Campo anómalo de gravedad

Después de definir el campo normal de gravedad terrestre como una aproximación del campo real, se presenta la necesidad de determinar la diferencia entre ambos, a esta diferencia se le llama campo anómalo de gravedad terrestre. El conocimiento de este campo es de gran importancia para la geodesia y otras geociencias ya que ubica al geoide con respecto al elipsoide. Determina las desviaciones de la vertical y puede ser representado y expresado a través de funciones de diversas magnitudes las cuales están relacionadas entre sí. Además con sus determinaciones se obtiene una mejor estimación del campo real.

2.4.1. Potencial de perturbación y altura geoidal

El campo anómalo de gravedad se puede representar por diversas funciones de naturaleza geométrica y física diferentes.

Las funciones más importantes que lo representan son: El potencial de perturbación y la altura geoidal. El potencial de perturbación (T) también llamado potencial anómalo es considerado como la cantidad fundamental del campo anómalo de gravedad, en un punto P en el espacio está definido por:

$$T_P = W_P - U_P$$

Sabemos que la superficie equipotencial de referencia del campo real de gravedad es el geoide, para el cual $U(x, y, z) = U_0$. A la separación entre el geoide y el elipsoide a lo largo de la normal de este último se le llama altura geoidal u ondulación del geoide y se le designa por N (Figura 2.5).

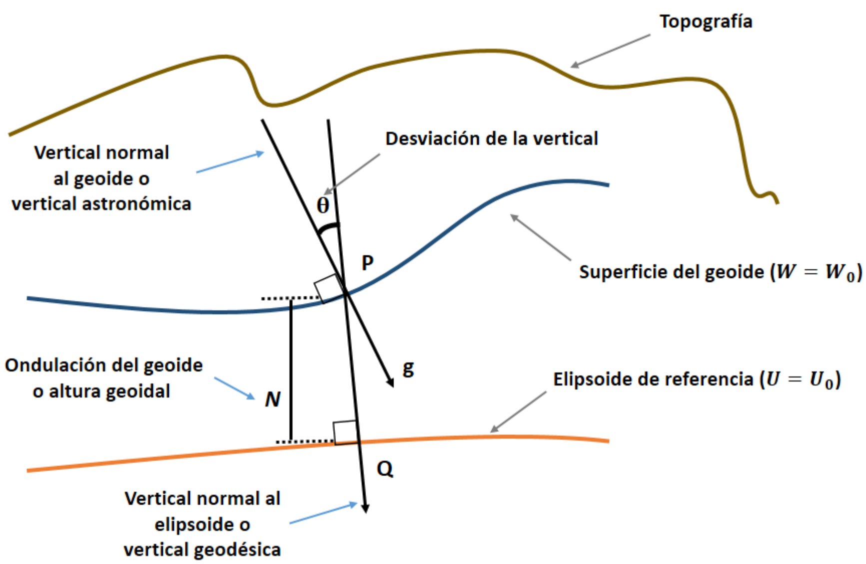

Figura 2. 5: Relación entre la altura geoidal y la desviación de la vertical.

2.4.2. Ecuación de Bruns

Si consideramos que el potencial normal en el elipsoide de U_0 es igual al potencial real sobre el geoide W_0 se obtiene una relación sencilla entre el potencial de perturbación y la altura geoidal a través de la fórmula de Bruns. Para el potencial normal en el punto *P* sobre el geoide escribimos:

$$U_P = U_Q + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_Q N = U_Q - \gamma N \tag{2.29}$$

Esto es empleando el hecho de que la derivada de *U* con respecto a la normal al elipsoide representa a la gravedad normal γ. Por otro lado para el potencial real W_P tenemos que:

$$W_P = U_Q - \gamma N + T_P \tag{2.30}$$

Si asumimos $W_P = U_Q$ para *N*:

$$N = \frac{T}{\gamma} \tag{2.31}$$

Se obtiene la fórmula de Bruns, proporcionando una relación por demás sencilla entre la altura geoidal y el potencial de perturbación.

3. GRAVIMETRÍA SATELITAL

3.1. Conceptos de mediciones satelitales geodésicas

Con respecto a las mediciones geodésicas satelitales, donde la necesidad para la determinación precisa del campo de gravedad terrestre es evidente, se han desarrollado tres importantes conceptos, relacionados a los tres tipos de misiones satelitales del campo de gravedad.

- Rastreo Satélite a Satélite (SST, por sus siglas en inglés) en configuración alto-bajo es realizado por la misión satelital CHAMP.
- Rastreo satélite-a-satélite en configuración baja-baja es realizado por la misión satelital GRACE.
- Gradiometría de gravedad satelital es aplicada por la misión satelital GOCE.

A continuación se describen brevemente los diferentes conceptos de mediciones geodésicas satelitales.

3.2. Configuración SST alta-baja

El principio se muestra en la Figura (3.1), la órbita terrestre baja (LEO, por sus siglas en inglés) del satélite es continuamente determinada por satélites de sistema global como GPS, GLONASS o, en el futuro, GALILEO. Note que el término “modo alto-bajo” no es realmente apropiado debido a que los satélites del sistema GPS, GLONASS y GALILEO están en una órbita media terrestre (MEO, por sus siglas en inglés) satelital y no en una órbita satelital terrestre alta (HEO, por sus siglas en inglés). De cualquier forma mantenemos la notación que se utiliza a continuación. Además del rastreo satélite-a-satélite, el satélite LEO utiliza un acelerómetro. En principio, se miden las perturbaciones tridimensionales de la aceleración causada por el campo de gravedad terrestre. Esta aceleración corresponde a primeras derivadas del potencial gravitacional (V) (Seeber, 2003).

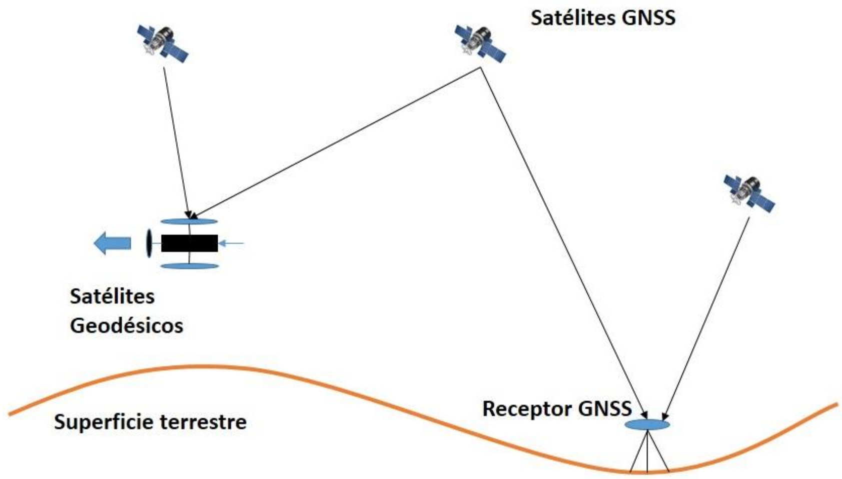

Figura 3. 1: Rastreo Satélite a Satélite en modo alto-bajo.

El campo de gravedad es derivado de un proceso de inversión el cual toma como datos de entrada cantidades geodésicas derivadas de las observaciones satelitales.

3.3. Configuración SST Baja-Baja

El principio de este concepto se muestra en la Figura (3.2). Dos satélites LEO son colocados en una misma orbita pero separados por algunos cientos de kilómetros (alrededor de 220 km en el caso de GRACE). El rango y las variaciones de rango entre los satélites son medidos con alta precisión.

Individualmente la órbita de cada satélite LEO está afectada por perturbaciones de aceleración las cuales corresponden a la primera derivada del potencial gravitacional. En combinación, resultan diferencias de aceleración entre ambos satélites. Además, la posición de los LEO es determinada por satélites GPS (*Global Positioning System*). Esto significa que inherentemente el rastreo satélite-a-satélite en modo alto-bajo también está de alguna manera empleado. El efecto de las fuerzas no gravitacionales en el satélite, debido a la fricción por aire, deberá ser compensado posteriormente o medido por un acelerómetro.

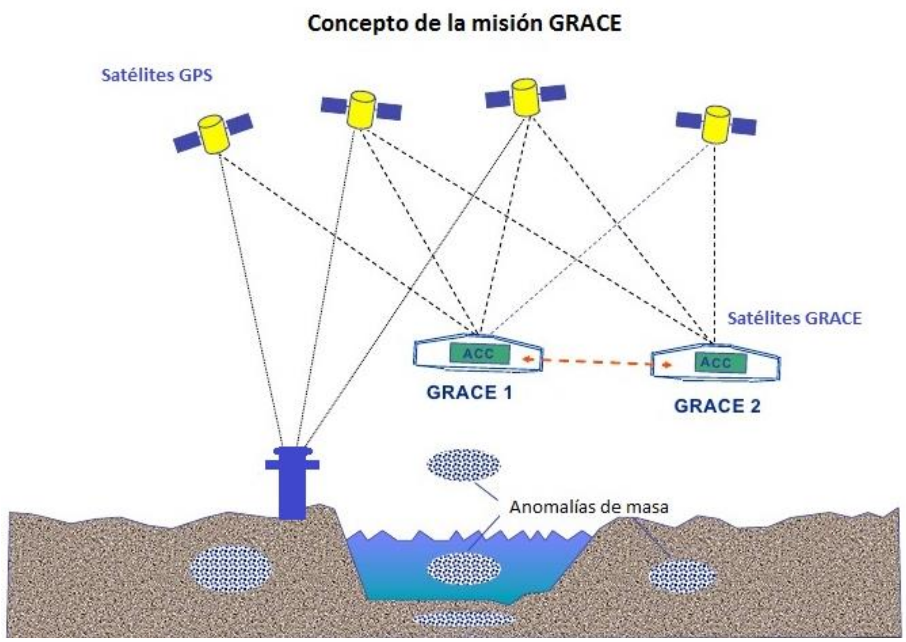

Figura 3. 2: Rastreo Satélite-a-Satélite en modo baja-baja (Tomada de internet: www.researchgate.net).

3.4.Gradiometría satelital

La gradiometría satelital es una de las principales técnicas que conforman la gravimetría satelital. La misión GOCE es el único sistema de este tipo que ha estado en órbita hasta el momento.

Comparado justamente con el modo de rastreo satélite a satélite en la modalidad baja-baja donde existe una línea base larga entre los dos satélites LEO, la magnitud de la línea base del acelerómetro tiende a cero en el caso de la gradiometría satelital. Esto es obtenido con la colocación de ambas unidades dentro de un solo satélite (Figura 3.3).

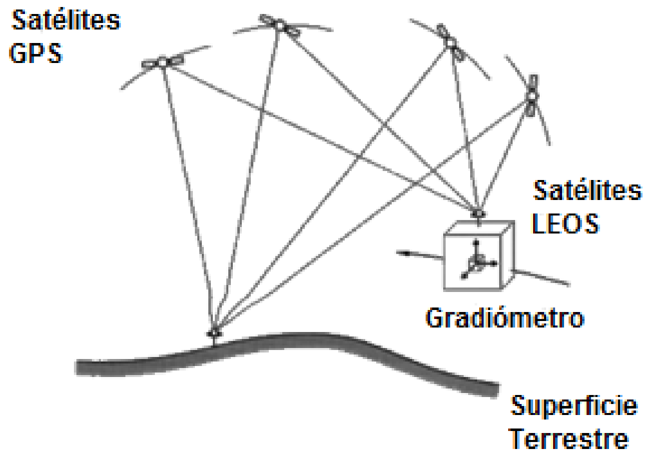

Figura 3. 3: Gradiometría de gravedad satelital con un gradiómetro de tres-ejes (Tomada y editada: Guzmán, 2008).

Por ello, la gradiometría satelital es la medición de diferencias de aceleración en tres direcciones espaciales ortogonales entre la masa prueba de las seis unidades del acelerómetro (dos en cada uno de los tres ejes) dentro del satélite. En otras palabras, la señal medida es la diferencia en aceleración gravitacional del satélite donde la fuerza gravitacional es generada por las masas atrayentes de la tierra. De esta manera, la medición corresponde al gradiente de la componente de la aceleración de la gravedad, la segunda derivada del potencial gravitacional. Se puede leer por principio en la siguiente ecuación (Guzmán, 2008):

$$\frac{V_{x2} - V_{x1}}{\Delta_z} = \frac{\Delta V_x}{\Delta z} \doteq \frac{\partial V_x}{\partial z} = V_{xz} \qquad (3.1)$$

En los tres métodos descritos, SST en modo alto-bajo, SST en modo bajo-bajo, y gradiometría de gravedad satelital, la observable básica es la aceleración gravitacional.

Es importante notar otro punto inherente a las misiones de gravedad satelital, el incremento de errores por el factor $(r/R)^{n+1}$ (Heiskanen y Moritz, 1967) cuando se transfieren la medición de la señal más los errores desde la altitud del satélite a la superficie de la tierra. El factor $(r/R)^{n+1}$ es minimizado utilizando una órbita lo más baja posible.

3.4.1. La misión GOCE

La misión GOCE es una misión creada por el programa *Living Planet* de la ESA (*European Space Agency*). Fue lanzada el 17 de marzo del 2009 y concluyo el 21 de octubre del 2013. Los objetivos primarios de la misión GOCE (Figura 3.4) fueron medir el campo de gravedad terrestre estacionario y modelar el geoide con una alta precisión. La información de la misión fue obtenida de la página web: www.esa.int/export/esaLP/goce.html.

Principales objetivos de la misión:

- Determinar las anomalías de gravedad con una precisión de 1 mgal
- Determinar el geoide con una precisión de 1-2 cm
- Mejorar estos resultados a una resolución espacial mejor de 100 km

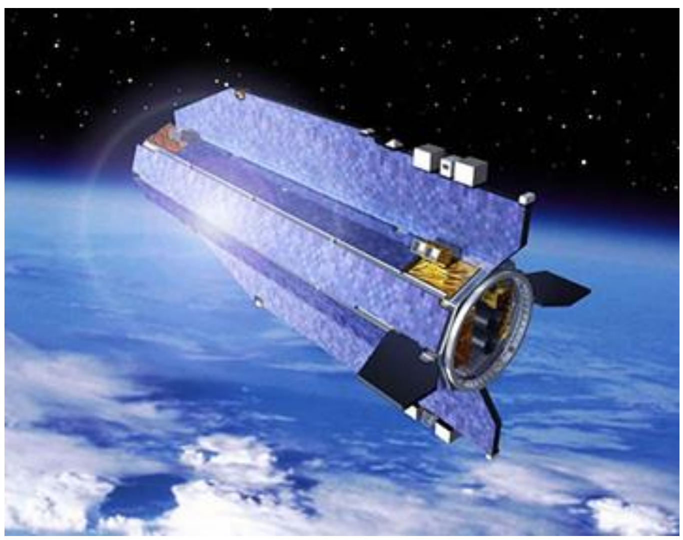

Figura 3. 4: Imagen del satélite GOCE puesto en órbita (Tomada de internet: http://gdsc.nlr.nl/).

De acuerdo con los requerimientos de esta misión, GOCE propuso para una representación del potencial de gravedad por harmónicos esféricos completar al menos al grado y orden 200 (de acuerdo a la resolución espacial de 100 km). Desde el punto de vista geodésico, un geoide global de una precisión de 1-2 cm y un modelo del campo de gravedad con precisión de 1 mGal por sobre 100 km de resolución espacial puede ser de utilidad para los siguientes propósitos (al igual que otras aplicaciones):

- Control (o remplazo) de las nivelaciones tradicionales con nivelación GPS (Hofmann-Wellenhof y Moritz, 2006), $H = h - N$ relacionando la altura ortométrica H (sobre el geoide), la altura elipsoidal h (sobre el elipsoide), y la ondulación geodésica N con la precisión de N conocida de GOCE y h medida por GPS, la altura ortométrica H es correctamente obtenida.
- Unificación de un sistema de alturas mundial, esto para referir a un datum de altura con propósitos de comparar las diferencias de niveles de los océanos (en el océano norte y en el mediterráneo) y cambios del nivel del mar (los cuales son causados por el derretimiento de los casquetes de hielo polar). considerando que el geoide es definido como una superficie equipotencial tomando como hipotética la referencia de la superficie del océano en reposo (en la ausencia de mareas y otras pequeñas influencias). Consecuentemente, un geoide preciso es crucial para derivar en mediciones precisas de las corrientes oceánicas y de los cambios del nivel del mar.
- Proveyendo mejoras significativa a la determinación de la órbita satelital y predicción. Esto se aplica especialmente a orbitas de satélite-baja. El campo de gravedad con una precisión elevada permitirá una mejor separación de las causas de perturbación del campo de gravedad estático y otras fuerzas perturbadoras (no solo las fuerzas no gravitacionales causadas por arrastre de aire y presión por radiación solar, pero otras perturbaciones causadas por las tierras sólidas y mareas oceánicas).

La duración de esta misión fue programada con un periodo nominal de 20 meses incluidos los 3 meses de la fase de calibración y condicionamiento. Sin embargo, la misión estuvo en órbita un periodo mayor de 4 años.

Los parámetros principales de esta misión son los siguientes:

- Órbita de sincronización-solar, inclinación 96.5°.
- Altitud de medición: aproximadamente 250 km.

- Una estación terrestre en Kiruna, Suiza para intercambio de datos y comandos; el Centro de Operaciones del Espacio Europea (ESOC, por sus siglas en inglés) en Damarka, fue utilizada para la misión del control del satélite.

Los componentes principales que estuvieron a bordo de la misión GOCE son los siguientes:

- Un gradiómetro de gravedad con tres ejes basado en tres pares de servo-controles electrostáticos del acelerómetro para medir el gradiente de gravedad en tres direcciones espaciales ortogonales, la señal deseada es la diferencia en aceleración gravitacional (entre un par de acelerómetros separado por 0.5 m) en la prueba de localización dentro de la nave espacial causadas por anomalías de gravedad por atracción de masas de la Tierra.
- Un receptor GPS geodésico de frecuencia-dual (para compensar detalles de la ionosfera) con una capacidad de rastreo de código-menor para (1) determinar la órbita del satélite GOCE y (2) derivar la información de gravedad de esta orbita (el primer trabajo es mejorar el rastreo satélite-a-satélite en el modo alto-bajo: esto dará conocimiento preciso de la posición de la nave espacial (baja) relativa a la referencia de satélites (alta) como son los satélites GPS; la segunda tarea es resolver por análisis de perturbación información del campo de gravedad)
- Retro reflector laser que permite el rastreo mediante laser en estaciones de base terrestre.
- Control de altitud acompañado de impulsores de compresión un ensamble del ion, rastreador de estrellas, una palanca con tres ejes magnéticos, y algunos otros sensores.
- Longitud del satélite de alrededor de 5 m, sección cruzada de 1 m^2, peso aproximado de 1000 kg.

Referente a los resultados, las principales salidas de esta misión fueron las siguientes:

- Coeficientes armónicos esféricos para el potencial gravitacional.
- Matriz de covarianza y varianza correspondiente.

Productos derivados de las salidas principales son las alturas geoidales, anomalías de gravedad, y también datos oceanográficos.

Es importante mencionar que el análisis de la órbita GPS de GOCE tiene bastante información de campo de la longitud de onda larga del campo de gravedad, mientras la gradiometría de gravedad del satélite dará información de la longitud de onda media. La misión GOCE ha sido la primera misión de "libre arrastre", esto implica que el satélite se mueve en forma libre alrededor de la tierra. Esto debido a la compensación de arrastre y sistema de control de altitud que se requiere para compensar las fuerzas de arrastre y torsión (Pail y Plank, 2003), ver www.esa.int/livingplanet/goce.

La misión satelital GOCE fue una misión geodésica dedicada a medir el campo gravitatorio terrestre, con esta información es posible determinar modelos globales y locales del geoide. Con la misión GOCE se han producido alrededor de 13 modelos geopotenciales globales y sus datos han sido combinados con otras misiones para la determinación de modelos de mayor grado y orden (2190), como es el caso del modelo EIGEN-6C4 (Barthelmes y Köhler, 2016).

Se han realizado modelos combinados de los datos de las misiones satelitales CHAMP, GRACE y GOCE. Los resultados de una experimentación muestra que la precisión de los datos del modelo de CHAMP es la más baja en los modelos de un solo satélite, por tal motivo, los datos de CHAMP no son necesarios en la determinación de un modelo combinado para mejorar la precisión. Los datos del modelo de GRACE pueden mejorar el resultado de los datos del satélite GOCE en la longitud de onda media larga, así que la precisión general del modelo combinado puede ser mejorada. Consecuentemente, entre más tipos de datos gravimétricos sean posible combinar en el procesamiento, deberán mejorar la calidad y confiabilidad de los datos, cada vez con mayor alcance, precisión y resolución espacial de los resultados computacionales (Liu y Wu, 2015).

Con estas misiones satelitales (CHAMP, GRACE y GOCE) es posible hacer determinaciones locales y globales del geoide a partir del potencial gravitacional terrestre. La determinación de un modelo del potencial gravitacional terrestre por observaciones satelitales es un problema mal condicionado (*ill-posed problem*, por su nombre en inglés) en el sentido que cambios pequeños en los datos pueden resultar en cambios grandes en la solución (Bouman, 1998).

3.4.2. Integral del gradiente vertical de la gravedad

La integral del Gradiente Vertical de la Gravedad (GVG) relaciona a la segunda derivada vertical del potencial (*V*) dada en el exterior de la esfera de radio (*R)* con el potencial sobre dicha esfera.

De acuerdo con Heiskanen y Moritz (1967), la primera derivada radial del potencial gravitacional está dado por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r,\theta,\lambda)}{\partial r} &= \iint_{\sigma} F(R,r,\psi)T(R,\theta',\lambda')d\sigma = T_r(r) \\ F(R,r,\psi) &= \frac{R}{4\pi l^5}\left[5R^2 r - r^3 - Rr^2\cos\psi - 3R^3\cos\psi\right] \end{aligned} \tag{3.2}$$

Formando ahora la segunda derivada radial $\partial^2 T / \partial r^2$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(r,\theta,\lambda)}{\partial r^2} &= \iint_{\sigma} S(R,r,\psi)T(R,\theta',\lambda')d\sigma = T_{rr}(r) \\ S(R,r,\psi) &= \frac{R}{4\pi}\left[\frac{(5R^2 - 3r^2 - 2Rr\cos\psi)}{l^5} - \frac{5(2r - R\cos\psi)}{l^7} \times (5R^2 r - r^3 - (Rr^2 - 3R^3)\cos\psi)\right] \end{aligned} \tag{3.3}$$

La cual es una integral cerrada que relaciona $T_{rr}(r)$ sobre una esfera delimitada para $T(R,\theta',\lambda')$ en la esfera terrestre. El núcleo $S(R,r,\psi)$ es isotrópico.

Similar a muchas integrales esféricas, el núcleo de la ecuación (3.3) puede ser expresado en términos de expansión de Legendre y de series de armónicos esféricos de las funciones armónicas Laplacianas de superficie $T_n(\theta,\lambda)$ de grado *n*. Entonces el potencial de perturbación puede ser expresado como:

$$
\begin{aligned}
T(r,\theta,\lambda) &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) \\
T_n(\theta,\lambda) &= \sum_{m=-n}^{n} T_{nm}\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda)
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Donde $\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda)$ son los armónicos esféricos de superficie normalizados que están dados por:

$$
\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda)\begin{cases}\overline{P}_{nm}(\cos\theta)\cos m\lambda & 0 \le m \le n \\ \overline{P}_{nm}(\cos\theta)\sin|m|\lambda & -n \le m < 0\end{cases}
\tag{3.5}
$$

La primera derivada de T con respecto a r (representa el potencial de perturbación δg) es obtenida en aproximación esférica como:

$$
T_r(r) = \frac{\partial T(r)}{\partial r} = -\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda) = \delta g
\tag{3.6}
$$

Aplicando la segunda derivada parcial, tenemos que:

$$
T_{rr}(r,\theta,\lambda) = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} T_n(\theta,\lambda)
\tag{3.7}
$$

En la superficie de la Tierra $r = R$, por lo que a partir de (3.6) y (3.7) se puede escribir:

$$
\begin{aligned}
T_r(\theta,\lambda) &= -\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)T_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(T_r)_n \\
T_{rr}(\theta,\lambda) &= -\frac{1}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)T_n(\theta,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}(T_{rr})_n
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Donde:

$$
\begin{aligned}
(T_r)_n &= -\left[(n+1)/R\right]T_n(\theta,\lambda) \\
(T_{rr})_n &= \left[(n+1)(n+2)/R^2\right]T_n(\theta,\lambda)
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

Considerando las expresiones (3.4) y (3.7) para una función armónica $T(r,\theta,\lambda)$ uno puede ver que la función $r^2\left(\partial^2 T/\partial r^2\right) = r^2 T_{rr}$, también es una función armónica y por lo tanto puede ser evaluada por la integral de Poisson. De esta manera, invirtiendo esta integral, la función $r^2 T_{rr}\left(r,\theta,\lambda\right)$ se reduce hacia abajo en la superficie de la Tierra y el potencial de perturbación puede ser obtenido por la integral directa relativa $T_{rr}\left(r,\theta,\lambda\right)$ sobre una esfera delimitada para *T* en o fuera de esa esfera (Martinec, 2003). Este procedimiento implicará una inversión integral y una evaluación integral, mientras que el método aquí tratado, involucrando la integral de Poisson y la ecuación (3.3) consiste de solo una inversión integral. Otro sencillo procedimiento de inversión integral sería considerar la integral en términos de una expansión con los polinomios de Legendre. Insertando la relación espectral de la ecuación (3.9) dentro de la ecuación (3.7) y para $r \geq R$, se cumple que:

$$T_{rr}\left(r,\theta,\lambda\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\left(T_{rr}\left(R,\theta,\lambda\right)\right)_n \tag{3.10}$$

Utilizando la expresión para las funciones de Laplace (Heiskanen & Moritz, 1967):

$$T_n\left(R,\theta,\lambda\right)=\frac{2n+1}{4\pi}\iint_{\sigma}P_n\cos\psi T\left(R,\theta,\lambda\right)d\sigma \tag{3.11}$$

Ahora, considerando la ecuación (3.11) en ecuación (3.9) y sustituyendo en (3.10) o directamente en la segunda ecuación (3.9), produce:

$$T_{rr}\left(r,\theta,\lambda\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+3}\frac{\left(2n+1\right)\left(n+1\right)\left(n+2\right)}{4\pi R^2}\iint_{\sigma}T\left(R,\theta,\lambda\right)P_n\cos\psi d\sigma \tag{3.12}$$

Y cambiando el orden de la integración y sumatoria, obtenemos:

$$T_{rr}\left(r,\theta,\lambda\right)=\frac{1}{4\pi}\iint_{\sigma}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(2n+1\right)\left(n+1\right)\left(n+2\right)P_n\cos\psi\right]T\left(R,\theta,\lambda\right)d\sigma \tag{3.13}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación (3.4) la representación espectral del núcleo *S* está dada por:

$$S\left(R,r,\psi\right)=\frac{1}{4\pi}\left[\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{r^2}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}\left(2n+1\right)\left(n+1\right)\left(n+2\right)P_n\cos\psi\right] \tag{3.14}$$

Siguiendo este procedimiento obtenemos una expresión integral con expansión espectral de Legendre para lo cual se obtiene la evaluación del potencial de perturbación en la superficie de la Tierra a partir de los valores de su segunda derivada radial en la altitud del satélite. Sin embargo, aquí nos enfocamos en el uso de la formula integral cerrada ya que es más compacta, eficiente para evaluar o invertir y más fácil de estabilizar.

4. EVALUACIÓN E INVERSIÓN DE INTEGRALES GEODÉSICAS

4.1. Integración numérica esférica directa

Este método de integración es de los más precisos. No requiere que la distribución de datos sea uniforme. Una desventaja de este método es que si el número de datos es grande, se vuelve computacionalmente intensivo. Consideremos la siguiente integral sobre la esfera:

$$g_P = \iint_{\sigma} K(\Psi_{PQ}) f_Q d\sigma_Q \tag{4.1}$$

Donde:

- g_P es la cantidad evaluada en el punto *P*
- $K(\Psi_{PQ})$ es la función de Kernel asociada a los puntos *P* y *Q*
- Ψ_{PQ} Angulo en el centro de la esfera entre los radios a la distancia en la esfera entre los puntos *P* y *Q*
- f_Q es la función integrada al punto *Q*
- $d\sigma_Q = d\phi \cos\phi_Q d\lambda$ es un elemento de diferencial de área en *Q*
- ϕ, λ son las coordenadas geográficas

La integral de Poisson, Stokes, y del GVG son de este tipo. Se define por $\mathbf{A}$ a la matriz que presenta las discretizaciones de la integral en la ecuación (4.1). Considerando una malla para evaluación e integración de puntos con sus correspondientes valores de función presentada por los vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{f}$ respectivamente, escribimos simbólicamente:

$$\mathbf{g} = \mathbf{Af} \tag{4.2}$$

Teniendo una malla regular con intervalos constantes $\Delta\phi, \Delta\lambda$ para la solución y puntos medidos, avanzando desde el oeste hacia el este y desde el sur al norte, los elementos de $\mathbf{A}$ estarán dados por:

$$\mathbf{A}_{i,j} = K_{i,j}(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j)\Delta\phi \cos\phi_j \Delta\lambda \tag{4.3}$$

Con:

$$\phi_i = \phi_1 + \left[ent\,\frac{i-1}{m} \right]\Delta\phi,\;\; \lambda_i = \lambda_1 + \left[i - \left(ent\,\frac{i-1}{m} \right) m - 1 \right]\Delta\lambda$$

$$\phi_j = \phi_1 + \left[ent\,\frac{j-1}{m} \right]\Delta\phi,\;\; \lambda_j = \lambda_1 + \left[j - \left(ent\,\frac{j-1}{m} \right) m - 1 \right]\Delta\lambda \qquad (4.4)$$

$i = 1, mn, \quad j = 1, mn,$

Siendo $\phi_i, \lambda_i,$ las coordenadas iniciales de la malla uniforme, *m* el número de puntos a lo largo de los paralelos y *n* el número de puntos a lo largo de los meridianos. Mientras ent significa que se toma la parte entera.

4.2. Integración numérica esférica empleando 2D-FFT

Con la ayuda de FFT (*Fast Fourier Transform*), la teoría de convolución permite que algunas integrales sean evaluadas en una forma mucho más eficiente que con la integración numérica. Por definición, una convolución entre dos funciones *k(t)* y *f(t)* está dada por:

$$g(t) = (k * f)(t) = \int_{-\alpha}^{\alpha} k(t-t')\,f(t')\,dt' \qquad (4.5)$$

Esta integral puede ser evaluada fácilmente con la utilización del teorema de la convolución (Brigham, 1988): el espectro (transformada de Fourier) de las convoluciones se iguala al producto del espectro de las funciones convolucionadas. Eso es, ya que:

$$\hat{F}(g(t)) = \hat{F}((k * f)(t)) \qquad (4.6)$$

Tenemos, utilizando la representación del espectro en el dominio de la frecuencia, del cual ω es la variable:

$$G(\omega) = K(\omega)F(\omega) \qquad (4.7)$$

Con $\hat{F}^{-1}$ representando el operador de la transformada de Fourier, *G*, *K*, *F* serían las representaciones de Fourier de las funciones *g*(*t*), *k*(*t*), *f*(*t*), respectivamente y ω es la variable en el dominio de la frecuencia. Aplicando la ecuación de la transformada inversa de Fourier (4.7), obtenemos:

$$g(t) = \hat{F}^{-1}(K(\omega)F(\omega)) \tag{4.8}$$

Existen casos cuando *g*(*t*) y *k*(*t*) son conocidos y la solución para *f*(*t*) es necesaria. Aplicando una deconvolución se puede realizar esto. De la ecuación (4.7) tenemos:

$$f(t) = \hat{F}^{-1}(G(\omega)/k(\omega)) = \hat{F}^{-1}(G(\omega)H(\omega)) \tag{4.9}$$

Con $H(\omega) = 1/k(\omega)$. El mismo concepto puede ser extendido para la situación de las dos dimensiones donde podemos escribir, similar a la ecuación (4.7), la versión 2-D de la convolución integral dada por:

$$g(t_1,t_2) = (k*f)(t_1,t_2) = \int_{-\alpha}^{\alpha}\int_{-\alpha}^{\alpha} k(t_1 - t_1^{'}, t_2 - t_2^{'})\, f(t_1^{'} t_2^{'})\, dt_1^{'} dt_2^{'} \tag{4.10}$$

Y su representación espectral:

$$G(\omega_1,\omega_2) = K(\omega_1,\omega_2)F(\omega_1,\omega_2) \tag{4.11}$$

Donde ω_1,ω_2 son las dos variables en el dominio de frecuencia 2-D. Similar a la ecuación (4.8), la correspondiente deconvolución 2-D será:

$$f(t_1,t_2) = \hat{F}^{-1}(G(\omega_1,\omega_2)/K(\omega_1,\omega_2)) = \hat{F}^{-1}(G(\omega_1,\omega_2)H(\omega_1,\omega_2)) \tag{4.12}$$

Queda claro que la convolución de integrales requiere que la función de kernel este expresada en términos de diferencias de coordenadas. Tenemos que la función kernel de integrales utilizadas en geodesia como son Poisson, GVG, Hotine y Stokes, las cuales pueden ser escritas como funciones de latitud y longitud están expresadas en términos de diferencias con respecto a la longitud pero no con respecto a la latitud. Para alcanzar la forma requerida necesita que aproximemos los kernel, lo cual introduce errores debido a la convergencia de meridianos que crece con la extensión del área de integración.

Para nuestro estudio, las funciones que necesitan ser aproximadas son: cos(ψ) y tan(α) las cuales pueden ser escritas como:

$$\cos(\psi)=\cos(\phi)\cos(\phi'-\phi+\phi)\cos(\lambda'-\lambda)+\sin(\phi)\sin(\phi'-\phi+\phi)$$
$$\tan\alpha=\frac{\cos(\phi'-\phi+\phi)sin(\lambda'-\lambda)}{\cos(\phi)sin(\phi'-\phi+\phi)-\sin(\phi)\cos(\phi'-\phi+\phi)\cos(\lambda'-\lambda)} \tag{4.13}$$

Necesitamos arreglar el segundo valor de ϕ en $(\phi'-\phi+\phi)$ a un cierto valor, digamos ϕ_0 en (4.13) por lo tanto la función esta expresada como función de diferencia de coordenadas. Siendo:

$$\Delta\phi=\phi'-\phi, \qquad \Delta\lambda=\lambda'-\lambda, \tag{4.14}$$

Podemos escribir:

$$\cos(\psi)\simeq\cos(\phi_0)\cos(\phi_0'+\Delta\phi)\cos(\Delta\lambda)+\sin(\phi_0)\sin(\phi_0+\Delta\phi)$$
$$\tan\alpha\simeq\frac{\cos(\phi_0+\Delta\phi)\sin(\Delta)}{\cos(\phi)sin(\phi_0+\Delta\phi)-\sin(\phi)\cos(\phi_0+\Delta\phi)\cos(\Delta\lambda)} \tag{4.15}$$

Esta fórmula nos dará un resultado exacto solo cuando $\phi=\phi_0$. El error por convergencia de meridianos incrementara conforme la distancia del punto calculado y el paralelo con latitud ϕ_0 incrementen. Una buena opción para ϕ_0 es la latitud media del área. Ahora podemos escribir integrales, en la forma de una convolución 2-D con respecto a la latitud y longitud. Asumiremos que estas funciones de latitud y longitud *g*, *k*, y *f* están relacionadas como sigue:

$$g(\phi,\lambda)=\iint_{\sigma}k(\Delta\phi,\Delta\lambda)\,f(\phi',\lambda')\cos(\phi')d\phi d\lambda \tag{4.16}$$

La cual puede ser considerada como una convolución 2-D con respecto a las coordenadas ϕ y λ utilizando el operador de convolución * podemos escribir:

$$g=k*(f\,\cos(\phi)) \tag{4.17}$$

Entonces, de acuerdo al teorema de convolución su espectro está relacionado por:

$$G(\omega_1,\omega_2)=K(\omega_1,\omega_2)\bar{F}(\omega_1,\omega_2)$$

Con:

$$\bar{F} = \hat{F}(f\cos(\phi)) \tag{4.18}$$

En función de evaluar integrales que envuelvan diferencias, utilizando el teorema de convolución, tendremos que asumir lo siguiente: las diferencias están dadas a lo largo de meridianos y con una distancia angular constante entre los satélites. Luego utilizando el cambio de espacio apropiado de las transformadas de Fourier (Brigham, 1988):

$$f(t_1 - t_{1,0}) \Leftrightarrow F(\omega_1, \omega_2)e^{-i2\pi\left[\omega_1 t_{1,0} + \omega_2 t_{2,0}\right]} \tag{4.19}$$

Considerando al potencial de perturbación con la Integral del Gradiente Vertical de la Gravedad g estará dada por $T(r)$ y f por $T(R)$.

4.3. Integración numérica esférica combinando integración directa y 1D-FFT

La integración numérica es sabido representa un cómputo intensivo para grandes números de puntos. Por otro lado, la evaluación de convoluciones esféricas con 2D-FFT tiene el problema de la convergencia de meridianos, cuando hacemos el correspondiente cambio a lo largo del intervalo espacial de paralelos con diferentes latitudes. Otra manera de evaluar integrales sobre la esfera utilizando aproximación esférica, con más eficiencia que la integración numérica directa y evitando el error por convergencia de meridianos es utilizando la Transformada de Fourier en 1-D combinado con integración numérica directa (Haagmans y Van Gelderen, 1993). El intervalo muestreado tendrá que ser uniforme a lo largo de los paralelos. Suponiendo que las funciones g y f están dadas en una malla de m puntos desde el oeste al este y n puntos a lo largo de los meridianos desde el sur al norte y tomando k como la relación kernel de ambos como en la ecuación (4.1) los valores de g para puntos a lo largo de paralelos de latitud ϕp están dados por:

$$g_{\phi p}(\lambda p) = \Delta\phi\Delta\lambda \cdot \hat{F}_1^{-1}\left(\sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \hat{F}_1(k(\Delta\lambda_{PQ}))\hat{F}_1(f_{\phi_Q}(\lambda_Q)\cos\phi_Q\right) \tag{4.20}$$

Donde:

- $\hat{F}_1$ Representa la Transformada de Fourier 1-D
- $g_{\phi P}$ (λ_P) Es el vector 1x*m* de *g* a lo largo del paralelo del punto *P* con latitud ϕ_P
- f_{ϕ_Q} Es el vector 1x*m* de *f* a lo largo del paralelo del punto *Q* con latitud ϕ_Q
- $k(\Delta\lambda_{PQ})$ Es el vector 1x*m* de *k* a lo largo del paralelo desde el punto *Q* con latitud ϕ_P
- $\Delta\phi, \Delta\lambda$ Son los intervalos de muestreo para la latitud y longitud respectivamente

Esto es, la ecuación (4.20) nos dará la evaluación de la integral en la ecuación (4.1), después de apropiadas discretizaciones, para todos los puntos con latitud ϕ_p.

4.3.1. Error de convolución cíclica

La convolución como es mostrada por las ecuaciones (4.5) y (4.10) están definidas sobre todo el plano o línea. En realidad, solo una cantidad finita de datos discretos está dispuesta normalmente. Este factor introduce discretizaciones truncadas y efectos de errores en las orillas. Además, para un eficiente cómputo es mejor emplear la Transformada discreta de Fourier. Lo que implica la aceptación de periodicidad en los datos y el kernel utilizados. Esto produce el supuesto error de convolución cíclica. Los errores de discretización solo pueden ser reducidos al reducir el intervalo de la muestra. El error de truncado se reduce con más cobertura de área o aplicándole modificación al kernel. El error por efecto de orillas se evita descartando la solución cerca de las orillas o bordes. Una manera de eliminar el error de convolución es añadir ceros a los datos y extender el kernel periódicamente sobre el doble del área. Por otra parte, el error por efecto de orilla y el error de convolución cíclica tienen características similares, los dos son más grandes cuando el punto de cálculo de la convolución está cerca a la orilla (Figura 4.1).

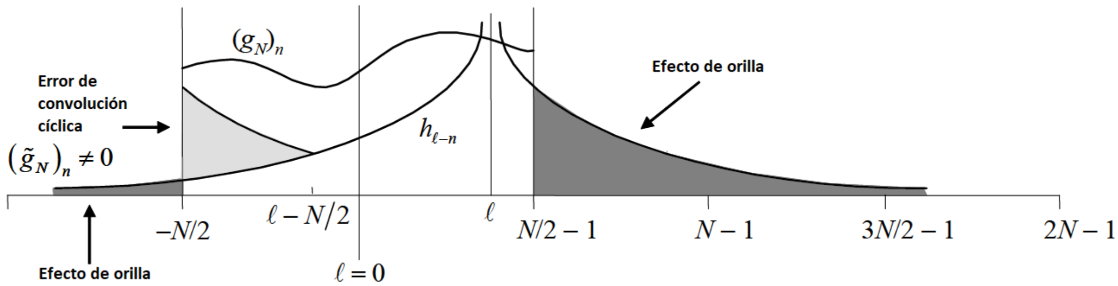

Figura 4. 1: Efecto de orilla en la convolución $\left(g_N\right)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ. También se muestra el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{g}_N)_\ell \,\tilde{\#}(\tilde{h}_N)_\ell$ (Tomada y editada: Jekeli, 2009).

Es posible construir una convolución cíclica discreta de la secuencia de datos dados que sea exactamente igual a una convolución lineal discreta. Esto no elimina el efecto de orilla, solo el error de convolución cíclica. La Figura 4.2 muestra como el error de convolución cíclica desaparece para $(\tilde{g}^{0}_{2N})_\ell \,\tilde{\#}(\tilde{h}_{2N})_\ell$ con $-N/2 \leq \ell \leq -N/2-1$. Se descartan los valores de la convolución cíclica de secuencias extendidas para otros valores de ℓ.

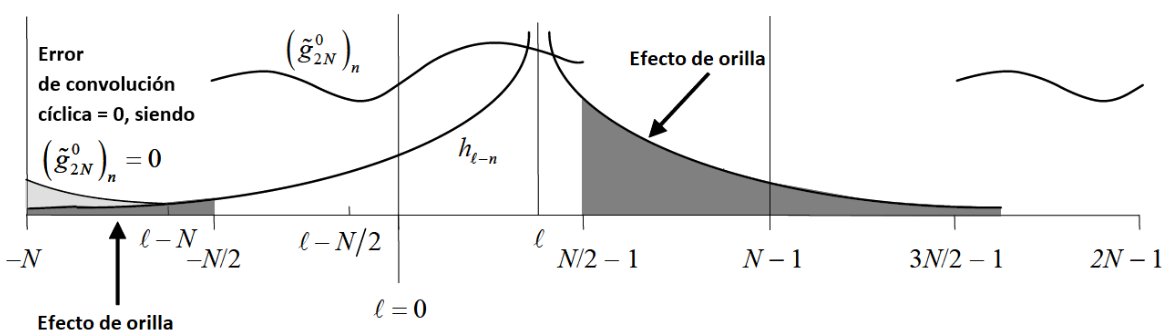

Figura 4. 2: Error de truncamiento y efecto de orilla en la convolución $\left(g_N\right)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ, y el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{g}^{0}_{2N})_\ell \,\tilde{\#}(\tilde{h}_{2N})_\ell$ (Tomada y editada: Jekeli, 2009).

4.4. Inversión de integral esférica con el método directo

Llamamos inversión de dominio de espacio a la inversión asociada con la integración numérica directa. Considerando errores de mediciones podemos reescribir la ecuación (4.2) como sigue:

$$\underset{nx1}{\mathbf{g}} = \underset{nxm}{\mathbf{A}}\,\underset{mx1}{\mathbf{f}} + \underset{nx1}{\mathbf{e}} \tag{4.21}$$

Donde n es el número de mediciones y m es el número de incógnitas, con $n \geq m$. Siguiendo el principio de los mínimos cuadrados (ecuación 5.20), el valor del vector **f** está dado por:

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{g} \tag{4.22}$$

La integración numérica directa es un cómputo intenso para grandes cantidades de datos. Debido a esto, el proceso de inversión demanda una gran cantidad de memoria computacional debido a que **A** se convierte en una matriz demasiado grande. Esta inversión es relativamente más precisa con respecto a los otros dos métodos explicados aquí.

4.5. Inversión de integrales esféricas empleando 1D-FFT

Con respecto a la velocidad computacional de un computador personal, la integración numérica utilizando 1D-FFT está en medio de la integración numérica directa y el método 2D-FFT. Mientras que podemos obtener exactamente el mismo resultado y precisión, este es más rápido que la integración numérica directa. Para la inversión existe una situación similar que se verá después. Es posible realizar inversión 2-D utilizando 1D-FFT que también nos permite procesar más datos que con una inversión del dominio espacial (García, 2002). De cualquier forma, como en el caso de 2D-FFT aún permanece el problema de la falta de incógnitas de los datos imaginarios producto de la deconvolución 1-D, esto genera errores de deconvolución 1-D. Se espera que este problema sea menor debido a que solo se presenta a lo largo de los paralelos. De esta manera, empezamos con la ecuación (4.21) la cual cuando resolvemos para todos los paralelos puede ser expresada como:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{AX} \tag{4.23}$$

Donde de la ecuación (4.21):

$$\mathbf{Y} = vec(\hat{F}_1(g_{\phi_1}), \hat{F}_1(g_{\phi_2}), \hat{F}_1(g_{\phi_3}), ..., \hat{F}_1(g_{\phi_n}))$$

$$\mathbf{X} = vec(\hat{F}_1(f_{\phi_1} \cos\phi_1), \hat{F}_1(f_{\phi_2} \cos\phi_2), \hat{F}_1(f_{\phi_3} \cos\phi_3), ..., \hat{F}_1(f_{\phi_n} \cos\phi_n) \qquad (4.24)$$

Considerando que los datos sean mayores de *n* paralelos y *m* meridianos.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13}\cdots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23}\cdots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3}\cdots & D_{nm} \end{bmatrix}, \; D_{i,j} = diag(\hat{F}_1(k_\phi(\Delta\lambda_{\phi i,\phi j}))) \qquad (4.25)$$

El vector $\mathbf{Y}$ contendrá todos los vectores del espectro del gradiente vertical de la gravedad para cada paralelo de radio *r* (a la altura satelital), mientras que $\mathbf{X}$ tendrá el potencial de gravedad terrestre pero de radio *R*. De este modo serán vectores con contenido de *nm* elementos. El tamaño de toda la matriz $\mathbf{D}$ será de *m* por *m* y la matriz $\mathbf{A}$ tendrá un tamaño de *nm* por *nm*.

Esta matriz será demasiado grande para un número grande de mediciones, de este modo, haciendo más difícil la solución para $\mathbf{X}$. Por ejemplo, para una malla de 100 x 100 mediciones el tamaño de $\mathbf{A}$ será de 10000 x 10000. Además, los elementos de $\mathbf{A}$ serán números complejos debido a que son componentes del espectro de Fourier. Aun, debido a que si las matrices $\mathbf{D}$ sean matrices diagonales, la matriz $\mathbf{A}$ será una matriz con naturaleza de banda con nm^2 elementos no nulos. Por otra parte, se puede tratar de resolver por los mismos componentes (i) para cada vector espectral del potencial a lo largo de su correspondiente paralelo, esto es:

$$\mathbf{Y}_\mathrm{i} = \mathbf{A}_\mathrm{i}\mathbf{X}_i \qquad (4.26)$$

Donde:

$$\mathbf{Y}_i = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(g_{\phi_1})_i \\ \hat{F}_1(g_{\phi_2})_i \\ \hat{F}_1(g_{\phi_3})_i \\ \vdots \\ \hat{F}_1(g_{\phi_n})_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(f_{\phi_1}\cos\phi_1)_i \\ \hat{F}_1(f_{\phi_2}\cos\phi_2)_i \\ \hat{F}_1(f_{\phi_3}\cos\phi_3)_i \\ \vdots \\ \hat{F}_1(f_{\phi_n}\cos\phi_n)_i \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_i = \begin{bmatrix} D^i_{11} & D^i_{12} & D^i_{13}\dots & D^i_{1n} \\ D^i_{21} & D^i_{22} & D^i_{23}\dots & D^i_{2n} \\ D^i_{31} & D^i_{32} & D^i_{33}\dots & D^i_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ D^i_{n1} & D^i_{n2} & D^i_{n3} & D^i_{nm} \end{bmatrix}, \tag{4.27}$$

Además $D^i_{j,k}$ es solo un elemento de la matriz $\mathbf{A}_i$ es de tamaño *n* por *n*. De esta manera podemos resolver para $\mathbf{X}_i$ la cual contiene el componente espectral (i) para todo vector del potencial a lo largo del correspondiente paralelo en la superficie terrestre.

Otra manera de ver este sistema de ecuaciones es la siguiente. Tomemos $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ conteniendo todos los $\mathbf{X}_i$'s, y $\mathbf{Y}_i$'s como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \mathbf{vec}(\mathbf{X_1}, \mathbf{X_2}, \mathbf{X_3}, ..., \mathbf{X_m}) \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{vec}(\mathbf{Y_1}, \mathbf{Y_2}, \mathbf{Y_3}, ..., \mathbf{Y_m}) \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por lo que tenemos el sistema como la ecuación (4.23) con $\mathbf{A}$ (con el mismo tamaño), siendo una matriz de bloques diagonales $\mathbf{A}_i$. Donde **vec()** es el operador que crea un vector de columna a partir de una matriz al apilar sus vectores de columna uno debajo del otro.

4.5.1. Errores de deconvolución

La operación inversa de la convolución de integrales, como las ecuaciones (4.5) y (4.10), es también llamada deconvolución. Este proceso puede también ser visto como una convolución de sí misma; con $h = \hat{F}_1(H)$ podemos escribir, utilizando el teorema de convolución:

$$f(t) = h(t) * g(t) \tag{4.29}$$

También, conociendo $g(t)$ y la deconvolución del kernel $h(t)$ podemos fácilmente resolver para $f(t)$ con la utilización de la ecuación (4.6). Como se mencionó anteriormente, debemos tener cuidado con el error de convolución cíclica si es que queremos obtener mayor precisión en el resultado y esto puede realizarse utilizando una estrategia apropiada de relleno. Existe un problema si solamente conocemos la expresión analítica para la convolución kernel $k(t)$ en el dominio del espacio. Solamente podremos obtener la representación discreta de $h(t)$ para el área donde estén dados los datos.

Aparentemente, debido a que no tenemos acceso a la expresión analítica no podemos utilizar ninguna técnica de relleno para mejorar o eliminar los errores de convolución cíclica. Una manera común de solucionar este problema es utilizar algún método de regularización iterativo como el método de proyección Landweber, para el cual no necesitamos conocer los datos ficticios implicados por el proceso de convolución. Además, para el caso 1D-FFT, si podemos utilizar datos a lo largo de paralelos enteros no tendremos que preocuparnos por los errores cíclicos de deconvolución. Extendiendo los datos a lo largo de paralelos no aumentara el tamaño de las matrices A_i para ser invertida (Ecuación 4.26), solo el número de ella. Como un beneficio extra, no existirá el efecto de orilla a lo largo de los paralelos.

5. MÉTODOS DE REGULARIZACIÓN

La determinación del geoide a partir de la gradiometría satelital es un problema de inversión inestable o mal condicionado. Por tal motivo, se han desarrollado varias técnicas que se pueden emplear para mejorar el efecto de la inestabilidad que se presenta en la solución de un problema mal condicionado.

La regularización consiste básicamente en considerar una familia de soluciones aproximadas que dependen de un parámetro positivo llamado parámetro de regularización. La propiedad principal es que en el caso de datos libres de ruido, las funciones de la familia convergen con la solución exacta del problema cuando el parámetro de regularización tiende a cero. En el caso de datos con ruido se puede obtener una aproximación óptima de la solución exacta con valores diferentes de cero del parámetro de regularización.

Por otro lado, se dice que un sistema matemático es estable o bien condicionado si satisface las siguientes condiciones (Schwarz y Gerstl, 1979).

- La solución del sistema es única
- La solución existe para cualquier dato
- La solución depende de la continuidad de los datos

Si una de estas tres condiciones anteriores no se satisface se dice que el problema es un problema mal-condicionado. Existen algunos métodos para calcular soluciones estables de problemas de inversión. Los métodos más aplicados en geodesia son: regularización de Tikhonov-Phillips, estimación desviada, colocación por mínimos cuadrados, descomposición del valor singular amortiguado, descomposición del valor singular truncado y los métodos iterativos (Bouman, 1998).

5.1. Regularización de Tikhonov

El método de regularización Tikhonov (*TR*, por sus siglas en inglés) es de los más usuales en problemas discretizados con ruido de datos geodésicos y algunas otras áreas. Un ejemplo de la aplicación del método de regularización Tikhonov puede ser encontrada en Rummel et al. (1979). Considerando la ecuación integral del primer tipo:

$$(A\mathbf{f})(x) = \int_a^b K(x,y)\mathbf{f}(y)dy = \mathbf{g}(x)x, \ \ a \le x \le b \quad (5.1)$$

El kernel $K(x,y)$ es continuo e integrable. Esta es una ecuación integral mal condicionada, en el sentido que cambios pequeños o errores en $\mathbf{g}$ pueden causar grandes cambios en la solución de $\mathbf{f}$. Primero, el sistema está planteado para clases de funciones g_0, esto resolverá la ecuación (5.1). Si tenemos un elemento de estas clases de funciones, la correspondiente $f_0(x)$ puede obtenerse con una aproximación certera (Schwarz y Kryński, 1977):

$$\| f - f_0 \| \le \delta \quad (5.2)$$

Donde $\| f \|$ significa la normal L_2

$$\| f \| = \left\{ \int_a^b f^2(x)dx \right\}^{1/2} \quad (5.3)$$

Tikhonov ahora hace la asunción de que $f_0(y)$ satisface la desigualdad

$$\Omega(n)(f_0) < \infty \quad (5.4)$$

Donde $\Omega(n)(f)$ es una función de la forma:

$$\Omega(n)(f) = \int_a^b \sum_{i=0}^{n+1} a_i(x) \left\{ \frac{d^i f(x)}{dx^i} \right\}^2 dx \quad (5.5)$$

$a_i(x)$ sería una función continua y positiva. Las clases de funciones obtenidas dependerán de la selección de $\Omega(n)(f)$. La condición $\Omega(n)(f) < p$, donde p es una constante, determina un juego compacto de soluciones.

Entonces, un método general es determinado arribando a un operador de regularización B_α cuando, para cualquier tipo de función, $f(x)$ producirá la solución existente a la clase prescrita. Con este fin, Tikhonov utiliza la condición del mínimo:

$$\| Af - g \|^2 + \alpha\Omega(n)(f) \to \min \quad (5.6)$$

Donde:

$$Af = \int_a^b K(x,y)\, f(y)dy \tag{5.7}$$

Siendo $\alpha > 0$ un parámetro de regularización por determinase o seleccionarse.

Finalmente, Tikhonov muestra que la solución obtenida converge con la solución del problema. Esto es, la solución:

$$f_\alpha = B_\alpha g \tag{5.8}$$

Minimizando (5.6) convergerá uniformemente con $g_0(y)$ cuando $\delta \to 0$. Debemos considerar el caso simple $n = -1$, y $a_0(x) = 1$ donde la condición mínima (5.6) se reduce a:

$$\|Af - g\|^2 + \alpha \| f \|^2 \to \min \tag{5.9}$$

Donde α es el multiplicador positivo de Lagrange que impone una condición en las soluciones normales para producir una solución estable. La solución correspondiente a la condición mínima es:

$$f_\alpha = (A^* A + \alpha I)^{-1} A^* g \tag{5.10}$$

La cual depende continuamente en *f* donde A^* es la adjunta de A. Para un operador compacto A con valor singular de descomposición por $\{v_n, u_n; \sigma_n\}$ la solución regularizada estará dada por:

$$f_\alpha^\varepsilon = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n}{\sigma_n^2 + \alpha} \langle g^\varepsilon, u_n \rangle v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \frac{\langle g^\varepsilon, u_n \rangle}{\sigma_n} v_n \tag{5.11}$$

Donde g^ε es g contaminada por errores, y

$$\delta_n = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_n^2 + \alpha} \tag{5.12}$$

Donde δ_i actúa como un filtro de suavizado, el cual puede ser definido para un menor suavizado en la forma:

$$\delta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \sqrt{\alpha}} \tag{5.13}$$

5.2. Descomposición del valor singular (SVD)

Dejemos $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sea una matriz rectangular con $m \geq n$, entonces la SVD de $\mathbf{A}$ esta expresada por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\sum\mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^{n}\mathbf{u}_i\sigma_i\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}} \tag{5.14}$$

Donde $\mathbf{U = (u_1, u_2, ..., u_n)}$ y $\mathbf{V = (v_1, v_2, ..., v_n)}$ son matrices con columnas ortogonales como las de $\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}_n$ y $\sum = diag(\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n)$ siendo $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$ números no negativos llamados valores singulares. Son arreglados en orden decreciente como de $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq ... \geq \sigma_n \geq 0$. Los vectores $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{v}_i$ son los eigenvectores izquierdo y derecho de **A**, respectivamente. Para problemas discretos mal condicionados, $\mathbf{A}$ está fuera de lugar al ser mal condicionada y tiene las siguientes características:

- El valor singular σ_i gradualmente tiende a cero
- El número de condiciones de **A** es igual a la relación σ_i / σ_n

Los auto vectores izquierdo y derecho, el vector $\mathbf{u}_i$ y $\mathbf{v}_i$ tienden a tener muchos cambios de señal en sus elementos como el incremento indexado o el descenso de σ_i.

5.3. Descomposición del valor singular truncado (TSVD)

En este método todos los valores singulares más pequeños de $\mathbf{A}$ son ignorados. La aproximación de $\mathbf{A}_k$ a $\mathbf{A}$ con el rango-*k* cercano puede obtenerse truncando la expansión de SVD a *k*.

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_k = (\mathbf{U}\sum\mathbf{V}^T)_k = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{u}_i\sigma_i\mathbf{v}_i^T, k \leq n \quad (5.15)$$

Esto significa que el valor singular de σ_i $i > k$ se considera como cero. De esta manera, el rango casi deficiente de la matriz $\mathbf{A}$ es remplazado por un rango deficiente exacto, dado por la ecuación (5.14) esta define muy bien el espacio nulo de dimensión *n*-*k* abarcada por el vector correcto auto vectores, $\mathbf{v}_{k+1}...\mathbf{v}_n$ (Hansen y Leary, 1997). Basado en esta expansión SVD trunca la solución del problema:

$$\min\|\mathbf{f}\| \text{ sujeta a la } \min\|A_k\mathbf{f} - g\| \quad (5.16)$$

Producirá una estimación regularizada de $\mathbf{f}$ dada por:

$$\mathbf{f}_k = \sum_{i=1}^{k}\tfrac{u_i^T g}{\sigma_i}V_i \quad (5.17)$$

O utilizando el factor filtro δ_i.

$$\mathbf{f}_k = \sum_{i=1}^{k}\delta\frac{u_i^T g}{\sigma_i}v_i, \delta_i = \begin{cases} 1 \; para \;\; i = 1...k \\ 0 \; para \;\; i = k+1...n \end{cases} \quad (5.18)$$

Esta ecuación es similar a la ecuación (5.11) para cuando δ está dada por la ecuación (5.12) o (5.13).

5.4. Descomposición del valor singular amortiguado (DSVD)

En el método de SVD amortiguado, la reducción de los valores singulares es suavizada por las medias del factor filtro δ_i está definida como:

$$\delta_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i + \lambda} \tag{5.19}$$

Donde λ juega el papel de parámetro de regularización.

5.5. Colocación por mínimos cuadrados (LSC)

Dado un número de observaciones combinado con funciones lineales del potencial de perturbación, la colocación por mínimos cuadrados (LSC, por sus siglas en inglés) nos dará la mejor aproximación para una función lineal del potencial de perturbación o del potencial mismo en cualquier lugar sobre la superficie de la tierra (Moritz, 1980). Más sin embargo, este método es viable para interpolación también llamada predicción o interpolación por mínimos cuadrados. La ecuación de observación se escribe como:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Ax} + \mathbf{s} + \mathbf{n} \tag{5.20}$$

Donde $\mathbf{y}$ es el vector de observación de *m* observaciones, $\mathbf{A}$ es una matriz rectangular conocida de tamaño *m*x*n*, **x** es el vector de los parámetros sistemáticos en ***n***, **s** representa la señal que será resuelta, y **n** es el vector de ruido medido. Asumiendo que no hay parámetros sistemáticos, el vector $\mathbf{t}$ de la función lineal con respecto a $\mathbf{s}$ de un punto seleccionado se estima por:

$$\mathbf{t} = \mathbf{C_{ts}}(\mathbf{C_{ss}} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{y} \tag{5.21}$$

Donde $\mathbf{D}$ es la matriz de covarianza del vector **n**, $\mathbf{C_{ts}}$ es la matriz de covarianza entre la función que resolverá para el correspondiente punto y la señal al punto medido y $\mathbf{C_{ss}}$ es la matriz de covarianza de la señal al punto de medición. Las matrices de covarianza son calculadas desde la función de covarianza del potencial junto con la covarianza de propagación. El método de LSC se ha encontrado que se relaciona con la regularización Tikhonov (Rummel et al. 1979). La matriz del error de varianza/covarianza está dada por:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{C}_n - \mathbf{C}_{ts}(\mathbf{C}_{ss} + \mathbf{D})^{-1}\mathbf{C}_{ts}^T \tag{5.22}$$

Mostremos como determinar las matrices de covarianza. La matriz de covarianza C_{tt} para el potencial de perturbación en términos de expansión de armónicos esféricos está dada por:

$$C_n(\Psi, r_P, r_Q) = \sum_{n=0}^{360} \left(\frac{R_B^2}{r_P r_Q} \right) c_n P_n(\cos\Psi) \tag{5.23}$$

Donde:

- Ψ Es el ángulo entre los puntos *P* y *Q* desde el origen (centro de masas terrestre)
- r_P, r_Q Son las distancias radiales desde el origen *P* y *Q*, respectivamente
- R_B Es el radio de la esfera Bjerhammar
- C_n Es la variación en grados del potencial de perturbación
- P_n Son los polinomios de Legendre

La varianza de grado del potencial de perturbación puede ser calculada por:

$$c_n = \sum_{m=-n}^{n} t_{nm}^2 \tag{5.24}$$

Donde t_{nm} son los coeficientes de la expansión en harmónicos esféricos del potencial de perturbación. Los cuales pueden ser expresados en términos de sus correspondientes coeficientes harmónicos del potencial gravitacional real y normal, v_{nm} y v_{nm}^{normal}. El potencial de perturbaciones está dado por:

$$T(r,\phi,\lambda) = V(r,\phi,\lambda) - V_n(r,\phi,\lambda) \tag{5.25}$$

Con:

$$V(r,\phi,\lambda)=\frac{GM}{r}\left(1+\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}v_{nm}\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda)\right) \tag{5.26}$$

y

$$V(R,\phi,\lambda)=\frac{GM}{r}\left(1+\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}v_{nm}^{normal}\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda)\right) \tag{5.27}$$

Donde *GM* es la constante gravitacional de la masa terrestre y $\overline{Y}_{nm}$ es la función harmónica esférica total normalizada de la superficie de grado *n* y orden *m*. La expansión harmónica de *T* puede entonces darse por:

$$T(R,\phi,\lambda)=\sum_{n=2}^{N\max}\sum_{m=-n}^{n}\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1}t_{nm}\overline{Y}_{nm}(\theta,\lambda) \tag{5.28}$$

La expresión de los coeficientes harmónicos t_{nm} está dada ahora por:

$$t_{nm}=\frac{GM}{R}(v_{nm}-v_{nm}^{normal})=\frac{GM}{R}\delta v_{nm} \tag{5.29}$$

Para obtener la expresión de la función de covarianza $C_{DTDT}(X_{P,}X_{Q})$ expresamos la covarianza en términos del operador de esperanza $E\{\ \},(E\{x\}=\mu_X)$ para una cantidad aleatoria *x*, esto es:

$$\begin{aligned}
C_{T_PT_Q} &= E\left\{\left[T_P-E\{T_P\}\right]\left[T_Q-E\{T_Q\}\right]\right\}\\
&= E\left\{T_P\cdot T_Q\right\}\\
&= E\left\{\left(T_{P_2}-T_{P_1}\right)\cdot\left(T_{Q_2}-T_{Q_1}\right)\right\}\\
&= E\left\{T_{P_2}\cdot T_{Q2}-T_{P_2}\cdot T_{Q1}-T_{P_1}\cdot T_{Q2}+T_{P_1}\cdot T_{Q1}\right\}
\end{aligned} \tag{5.30}$$

Entonces:

$$C_{T_P T_Q} = C_{TT}(\psi_{P_2 Q_2}, r_{P_2}, r_{Q_2}) - C_{TT}(\psi_{P_2 Q_1}, r_{P_2}, r_{Q1}) - C_{TT}(\psi_{P_1 Q_2}, r_{P_1}, r_{Q_2}) - C_{TT}(\psi_{P_1 Q_1}, r_{P_1}, r_{Q_1}) \tag{5.31}$$

5.6. Método del gradiente conjugado

El método del gradiente conjugado es un método directo, que puede ser considerado como una expansión ortogonal especial, de la solución de la minimización del problema (Hanke, 1995) esta expansión es generada haciendo uso de la información de pasos iterativos previos. Este método comienza con la solución dada por métodos como Landweber a la medida *k*, una aproximación de la cuál es la combinación de estas funciones $\mathbf{A}^T\mathbf{g}, \mathbf{A}^T\mathbf{A}\mathbf{A}^T\mathbf{g}, (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^2\mathbf{A}^T\mathbf{g}, ..., (\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{k-1}\mathbf{A}^T\mathbf{g}$. Sin tomar en cuenta la elección del parámetro de relajación, el resultado de una determinada iteración siempre dependerá del sub-espacio formado por estas funciones, lo cual es llamado sub-espacio Krylov (Bouman, 1998). El método del gradiente conjugado nos da la función $\mathbf{K}^k(\mathbf{A}^T\mathbf{A}, \mathbf{A}^T\mathbf{g})$, la cual minimiza la discrepancia funcional (Garcia, 2002):

$$\eta(f : g) = \frac{1}{2}(\mathbf{A}^T\mathbf{A}f, f) - (\mathbf{A}^T\mathbf{g}, \mathbf{g}) \tag{5.32}$$

Donde (,) es el operador de producto interno. Este método es conocido por su rápida convergencia y está basado en la construcción iterativa de dos bases r_k y p_k (Garcia, 2002):

- $r_0 = p_0 = \bar{g}$
- $\alpha_k = \dfrac{\|r_k\|^2}{\langle r_k, \bar{A}p_k \rangle}$
- $r_{k+1} = r_k - \alpha_k \bar{A}p_k$
- $\beta_k = -\dfrac{\langle r_{k+1}, \bar{A}p_k \rangle}{\langle p_k, \bar{A}p_k \rangle}$
- $p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$

Entonces, el programa iterativo para el cálculo de la solución aproximada está dada por:

$$f_0 = 0, \quad f_{k+1} = f_k + \alpha_k p_k \tag{5.33}$$

5.6.1. Criterio de parada

Para cualquier método de iteración, se tiene que definir un criterio de parada para el proceso de iteración. Al final de cada iteración calculamos el error residual relativo con:

$$\varepsilon_k = k \frac{\|Af_k - g\|}{\|g\|} \tag{5.34}$$

Donde *k* es el parámetro a determinar y comúnmente se asume que es uno. Podemos detener la iteración si esta cantidad está en el orden del error experimental. Esto es llamado el criterio de discrepancia.

6. PRUEBAS NUMÉRICAS

Las pruebas numéricas experimentales realizadas en el presente trabajo se realizaron utilizando datos simulados y datos reales. Con respecto a los datos simulados se empleó el modelo geopotencial global EGM2008 (*Earth Gravitational Model*, *2008*). Para los datos reales se utilizaron GVG (ver Ecuación 3.3) producidos por la misión satelital GOCE. Primeramente, se analizó la consistencia interna de los programas para analizar el tiempo de cómputo y almacenamiento, realizando la inversión de la integral del GVG (*Trr*) con los tres métodos (Integral Directa, 1D-FFT y 2D-FFT). En el análisis de tiempo y almacenamiento de los datos en memoria de cada uno de los métodos 1D-FFT y 2D-FFT se consideró padding y no padding. Posteriormente, se hizo un análisis de precisión de la inversión de la integral del GVG con respecto a la extensión de las mallas y separación de los intervalos de medición. Esto se hace empleando distintos métodos de regularización (regularización Tikhonov, descomposición de valores singulares truncados y amortiguados). Después se verificó la consistencia interna del programa para ver su correcto funcionamiento, para posteriormente agregar errores aleatorios $\sigma = 0.003E$ (*Eötvös (E),* donde $1E = 10^{-9}\ S^{-2}$) a los *Trr* generados por el modelo geopotencial EGM2008. En la determinación de la ondulación del geoide (*N*) se aplicaron 3 distintos métodos de regularización y se determinó el método con el cual se obtienen mejores soluciones de *N* al invertir el GVG empleando la integral directa.

6.1. Análisis de eficiencia y almacenamiento requerido de los métodos de inversión

Existen principalmente tres maneras para obtener el potencial de perturbación (*T)* a partir de la inversión de la integral del Gradiente Vertical de la Gravedad (ver Ecuación 3.3), donde aplicamos la integral directa del GVG. Por otro lado, es necesario indicar que se aplicó la transformada rápida de Fourier (FFT) en una y en dos dimensiones. El análisis de eficiencia en la inversión de la integral del GVG se realizó para estos tres métodos. Al realizar las operaciones de inversión de la integral fue necesario crear una matriz **A** de tamaño ***nmxnm*** donde ***n*** es el número de paralelos y ***m*** el número de meridianos, cuando ***n*** y ***m*** son grandes, por ejemplo 80x80, resultando una matriz **A** de tamaño 6400x6400. Por otro lado, la matriz **A** se generó de un tamaño de 312 MB en memoria al aplicar la inversión con la integral directa.

6.1.1. Aplicación de integración directa

En la Inversión de una integral esférica como la integral GVG el método directo es el más preciso, pero computacionalmente más intensivo, en este apartado se invirtió la integral con el método directo aplicándose a diferentes dimensiones de malla (***nxm***), para ver la máxima dimensión de malla alcanzada con intervalos ($\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$). Los resultados se muestran en la Tabla 6.1, donde se aplicó regularización Tikhonov. El sistema de cómputo utilizado para el análisis fue un procesador Core i7 de 2.40 GHz con memoria RAM de 16.0 GB y un sistema operativo de 64 bits.

Tabla 6. 1: Espacio de almacenamiento de la matriz **A** asociada y tiempo de inversión de la integral GVG para diferentes dimensiones de mallado.

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de ejecución (min)
10x10	78.1	0
20x20	1250	0
30x30	6170	0.100
40x40	19500	0.567
50x50	47600	2.533
60x60	98800	7.117
70x70	183000	17.9
80x80	312000	83.117

En la Tabla 6.1, se muestran los tamaños de las matrices **A** generadas y los tiempos que se tarda en invertir dicha integral para distintas dimensiones de malla, donde la dimensión máxima que se puede lograr invertir es de 80x80, en este caso la matriz **A** es de 6400x6400. Para la máxima dimensión de malla alcanzada el tamaño de almacenamiento es de 312 MB y el tiempo de ejecución es de 1 hora 23 minutos 7 segundos.

6.1.2. Inversión de la integral esférica combinando integración directa con 1D-FFT

La inversión de la integral del gradiente vertical de la gravedad en 2 dimensiones con 1D-FFT (ver Ecuación 4.20) también se realizó con padding y no padding, con el propósito de verificar como logramos una mejor solución y eficiencia. Esta tiene una precisión similar que la integral directa con la ventaja de ser más eficiente computacionalmente. Los resultados de la inversión en relación a su tamaño de almacenamiento de la matriz **A** y tiempo de ejecución se muestran a continuación donde es aplicado el método de regularización Tikhonov.

Tabla 6. 2: Espacio de almacenamiento de la matriz **A** asociada y tiempo de inversión de la integral del GVG con 1D-FFT en dos dimensiones (usando padding).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de ejecución (min)
10x10	31.2	0
20x20	250	0
30x30	843	0
40x40	1950	0
50x50	3810	0
60x60	6590	0.017
70x70	10400	0.017
80x80	15600	0.033
90x90	22200	0.050
100x100	30500	0.050
150x150	102000	0.250
200x200	244000	0.700
300x300	823000	3.433

Puede observarse en la Tabla 6.2 que al hacer la inversión de la Integral del GVG empleado 1D-FFT con padding la mayor dimensión de malla que permite invertir es 300x300, en este caso la matriz **A** es de 90000x90000 y su tamaño en memoria es de 823 MB. Siendo el tiempo de inversión de la integral 3 minutos 26 segundos para dimensiones de malla de 300x300. A continuación se muestra la inversión cuando no se le aplica padding; en este caso se pudo extender un poco más la dimensión de la malla invertida.

Tabla 6. 3: Espacio de almacenamiento de la matriz **A** asociada y tiempo de inversión de la integral del GVG con 1D-FFT en dos dimensiones (sin padding).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de ejecución (min)
10x10	16	0
20x20	125	0
30x30	422	0
40x40	970	0
50x50	1910	0
60x60	3290	0
70x70	5230	0
80x80	7810	0.017
90x90	11100	0.017
100x100	15200	0.033
150x150	51400	0.117
200x200	122000	0.333
300x300	411000	1.567
400x400	976000	5

En la Tabla 6.3 al hacer la inversión de la integral del GVG con 1D-FFT sin padding la mayor dimensión de malla posible de invertir es de 400x400, en este caso la matriz **A** es de 160000x160000 y su almacenamiento en memoria es casi 1 GB. Relativamente es más eficiente no usar padding en la inversión, tenemos un tiempo de 1 minuto 34 segundos para la malla de 300x300 sin padding y 3 minutos 26 segundos con padding, siendo una diferencia en tiempo, de 1 minuto 52 segundos. Por otro lado, es mayor el tamaño de almacenamiento para la matriz **A** cuando se usa padding. En la Figura 6.1 podemos ver la comparación entre estos dos métodos respecto al tiempo que se requiere para realizar la inversión de la integral del GVG con 1D-FFT.

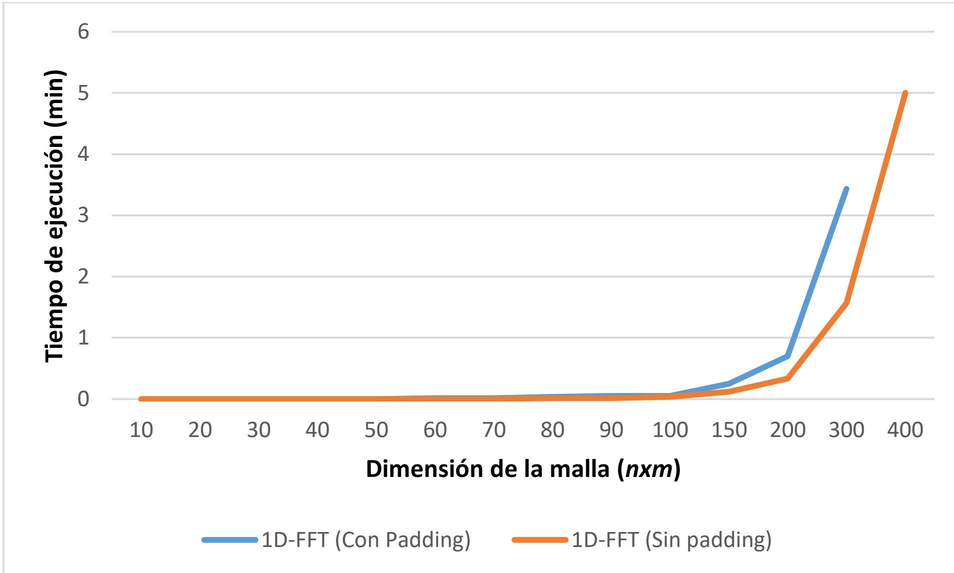

Figura 6. 1: Gráfica de comparación de tiempo en el proceso de inversión de la Integral del GVG por los métodos 1D-FFT (Con padding) y 1D-FFT (Sin padding).

En la Figura 6.1 se muestran los tiempos de ejecución para diferentes dimensiones de malla, requiriendo un poco más de tiempo cuando se le aplica padding. Por otro lado, el tamaño de la matriz **A** es relativamente mayor cuando se aplica padding.

6.1.3. Aplicación de la integral con 2D-FFT

Por último, en el análisis del tiempo de inversión y almacenamiento, se realizó la inversión de la integral del gradiente vertical de la gravedad con la transformada rápida de Fourier en dos dimensiones (2D-FFT) también fue realizada con y sin padding. Los resultados de la inversión en relación a su tamaño de matriz **A** y tiempo de ejecución se muestran a continuación (Tabla 6.4).

Tabla 6. 4: Espacio de almacenamiento de la matriz **A** asociada y tiempo de inversión de la integral del GVG con 2D-FFT (usando padding).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de ejecución (min)
10x10	2.63	0
20x20	11	0
30x30	24	0
40x40	43	0
50x50	66	0
60x60	95	0
70x70	130	0
80x80	169	0
90x90	214	0
100x100	264	0
150x150	594	0
200x200	1020	0
300x300	2310	0.017
400x400	4110	0.017
500x500	6430	0.033
600x600	9260	0.017
700x700	12260	0.050
800x800	16400	0.067
900x900	20800	0.083
1000x1000	25700	0.083
1100x1100	31100	0.117
1200x1200	37000	0.150
1400x1400	50400	0.283
1600x1600	65900	0.333
1800x1800	83400	0.433
2000x2000	102000	0.567

Al hacer la inversión de la Integral del GVG por 2D-FFT con padding la mayor dimensión de malla posible de invertir es de 2000x2000, en este caso la matriz **A** es de 4000000x4000000 y su tamaño es de 102 MB. A continuación se muestra la inversión sin padding (Tabla 6.5).

Tabla 6. 5: Espacio de almacenamiento de la matriz **A** asociada y tiempo de inversión de la integral del GVG con 2D-FFT (sin padding).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de ejecución (min)
10x10	2.63	0
20x20	11	0
30x30	24	0
40x40	43	0
50x50	66	0
60x60	95	0
70x70	130	0
80x80	169	0
90x90	214	0
100x100	264	0
150x150	594	0
200x200	1020	0
300x300	2310	0.017
400x400	4110	0.017
500x500	6430	0.033
600x600	9260	0.033
700x700	12260	0.033
800x800	16400	0.067
900x900	20800	0.100
1000x1000	25700	0.100
1100x1100	31100	0.133
1200x1200	37000	0.250
1400x1400	50400	0.283
1600x1600	65900	0.333
1800x1800	83400	0.483
2000x2000	102000	0.700
2200x2200	124000	0.833
2400x2400	148000	1.033
2600x2600	174000	1.150
2800x2800	201000	1.467
3000x3000	231000	1.833

Al hacer la inversión de la integral del GVG por 2D-FFT con padding la mayor dimensión posible de malla invertida es 3000x3000, en este caso la matriz **A** es de 9000000x9000000 y su tamaño de almacenamiento es de 231 MB con tiempo de ejecución de 1 minutos 50 segundos, en este caso se puede extender la malla 1000 paralelos y meridianos más que cuando no se usa padding. La Figura 6.2 nos muestra el comportamiento en tiempo de la inversión del GVG usando los tres métodos de inversión (Integral Directa, 1D-FFT y 2D-FFT) con respecto a diferentes dimensiones de malla.

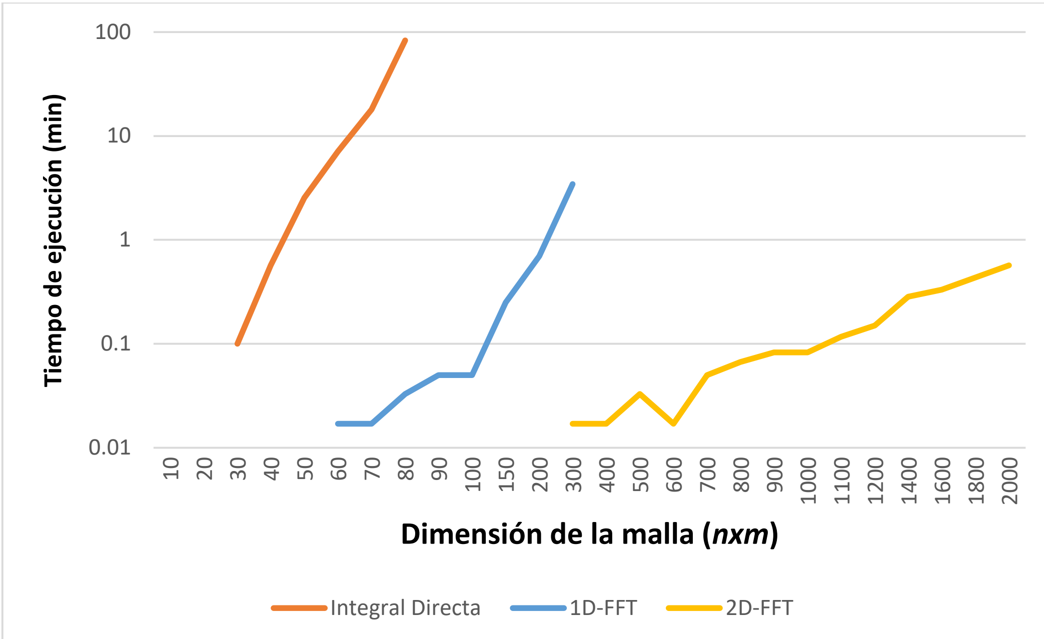

Figura 6. 2: Gráfica de comparación de tiempo en el proceso de inversión de la Integral del GVG por los métodos de la Integral Directa, 1D-FFT y 2D-FFT (Escala logaritmica).

Podemos observar que es mucha la diferencia en tiempo que existe al emplear la integral directa con respecto a los dos métodos de la FFT, por ejemplo, en una malla de 80x80 (máxima extensión alcanzada para el método de integración directa), el tiempo de ejecución aplicando la integral directa es de 1 hora 23 minutos, mientras que para la integración con 1D-FFT es 2 minutos y con 2D-FFT es 0 minutos. En la Figura 6.3 se muestra el análisis en base a el almacenamiento de la matriz **A** empleando los tres métodos de inversión.

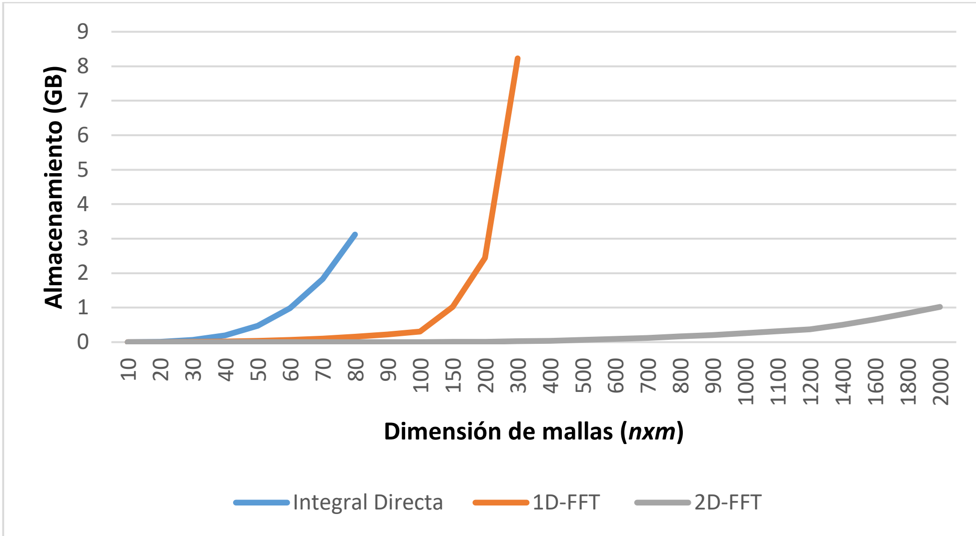

Figura 6. 3: Gráfica de comparación de almacenamiento en el proceso de inversión de la Integral del GVG por los métodos de la Integral Directa, 1D-FFT y 2D-FFT.

Similarmente, en la comparación de almacenamiento que se genera con los tres métodos de integración, el método que requiere mayor almacenamiento es la integral directa con un tamaño para el archivo creado de la matriz **A** de 312 MB para una malla de 80x80, posteriormente 1D-FFT para dimensiones de 80x80 genera un tamaño de almacenamiento de 15.6 MB y con 2D-FFT se genera la matriz **A** de un tamaño de memoria de 169 KB. Podemos ver que el almacenamiento es más demandante cuando es utilizado el método de la integral directa 296.4 MB de memoria más comparado con 1D-FFT y con respecto a 2D-FFT se generan 311.8 MB más que con la inversión de la integral directa. En la Figura 6.4 se muestra la comparación entre los métodos 1D-FFT y 2D-FFT empleando diferentes extensiones de malla con respecto al almacenamiento de la matriz **A**.

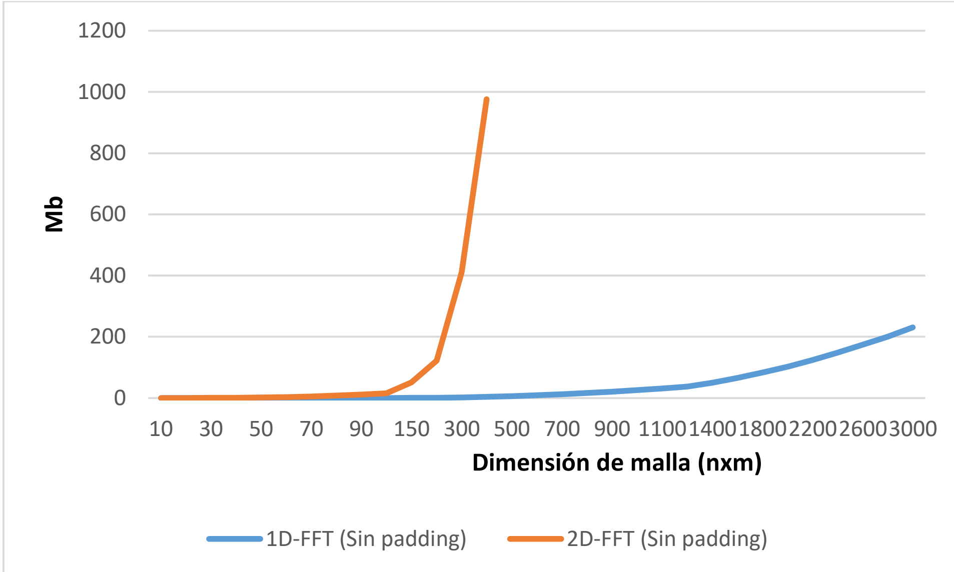

Figura 6. 4: Gráfica de comparación de almacenamiento de matriz **A** en el proceso de inversión de la Integral del GVG empleando los métodos 1D-FFT y 2D-FFT.

Es más demandante emplear el método 1D-FFT (sin padding) con respecto al tiempo de ejecución, por ejemplo, para una malla de 400x400 se emplea un tiempo de 5 minutos, mientras que para 2D-FFT (sin padding) se emplea un tiempo de 1 minuto, donde resultan 4 minutos de diferencia. La mayor extensión de malla generada se puede lograr con el método 2D-FFT (sin padding) donde llega a una malla de 3000x3000. En los análisis anteriores podemos ver que al realizar la inversión del GVG con la integral directa se requiere mayor tiempo de ejecución y tiene un mayor almacenamiento en memoria la matriz **A**, por otro lado, al emplear 2D-FFT se requiere menor tiempo de ejecución y menor almacenamiento en memoria de la matriz **A**, en este caso se produce el problema del error de la convergencia de meridianos. Por lo anterior, es conveniente utilizar 1D-FFT al invertir la integral del GVG, obteniendo una precisión similar que la integral directa con más eficiencia en la inversión del sistema y menor gasto de memoria en el almacenamiento de la matriz **A**.

6.2. Precisión de la inversión de la integral GVG con respecto a la extensión y densidad de los datos

Se realizó la inversión de la integral GVG empleando regularización Tikhonov y dos métodos de SVD (*Singular Value Decomposition*) con datos del modelo geopotencial EGM2008, los métodos de SVD aplicados son descomposición de valores singulares amortiguado (DSVD, por sus siglas en inglés) y descomposición de valores singulares truncado (TSVD, por sus siglas en inglés). La configuración máxima alcanzada al invertir la integral del GVG con regularización SVD es de 80x80. Se emplearon intervalos de malla ($\Delta\phi$) de 0.20°, 0.25° y 0.30° en latitud por longitud (*nxm*). Para los métodos SVD la matriz **A** se descompone en 3 matrices (ver Ecuación 5.14), en ese sentido se pudo invertir una matriz de 80x80. El tamaño de las matrices y la velocidad de cómputo con diferentes dimensiones de malla se muestran a continuación (Tablas 6.6, 6.7 y 6.8).

Tabla 6. 6: Inversión de la integral directa del GVG empleando el método de regularización SVD, se muestra el tamaño de la matriz generada (**A**) y el tiempo de ejecución ($\Delta\phi$ = 0.20°).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de inversión de matriz **A** (minutos)
10x10	78.1	0
20x20	1250	0.017
30x30	6170	0.250
40x40	19500	1.683
50x50	47600	6.800
60x60	98800	22.083
70x70	183000	59.717
80x80	312000	236.533

Tabla 6. 7: Inversión de la integral directa del GVG empleando el método de regularización SVD, se muestra el tamaño de la matriz generada (**A**) y el tiempo de ejecución ($\Delta\phi$ = 0.25°).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de inversión de matriz **A** (minutos)
10x10	78.1	0
20x20	1250	0.017
30x30	6170	0.283
40x40	19500	1.750
50x50	47600	7.083
60x60	98800	22.900
70x70	183000	62.483
80x80	312000	243.45

Tabla 6. 8: Inversión de la integral directa del GVG empleando el método de regularización SVD, se muestra el tamaño de la matriz generada (**A**) y el tiempo de ejecución ($\Delta\phi$ = 0.30°).

Dimensión de malla	Tamaño de matriz **A** (KB)	Tiempo de inversión de matriz **A** (minutos)
10x10	78.1	0
20x20	1250	0.033
30x30	6170	0.350
40x40	19500	1.9
50x50	47600	7.55
60x60	98800	23.933
70x70	183000	64.5
80x80	312000	255.917

Se observa que entre mayores son los intervalos de separación de la malla el tiempo del proceso de la descomposición de valores singulares aumenta (236, 243 y 255 minutos, respectivamente para la máxima dimensión de malla alcanzada, la cual es de 80x80), por otro lado, el tamaño en almacenamiento de la matriz **A** es el mismo para los diferentes intervalos de separación que corresponden con la misma dimensión de malla (***nxm***). En la siguiente grafica (Figura 6.5) podemos observar las diferencias de tiempo para los diferentes intervalos de malla.

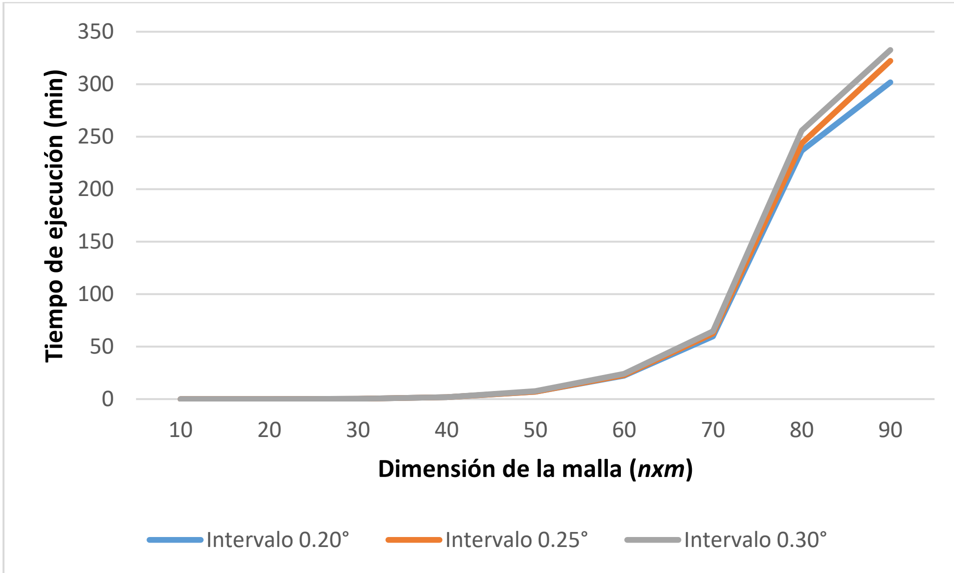

Figura 6. 5: Gráfica de comparación del proceso de inversión de la Integral del GVG por el método de la integral directa aplicando regularización SVD, empleando diferentes separaciones de malla.

El intervalo de malla que conlleva mayor tiempo de inversión es 0.30°, donde para una malla de 80x80 el proceso de creación de la matriz **A** y la SVD lleva un tiempo de aproximadamente 4 horas 16 minutos para un intervalo de separación mayor (0.30°), mientras para la misma malla (80x80) con intervalo 0.25° se requiere un tiempo de 4 horas 3 minutos. Por último, para la separación de malla más pequeña ($\Delta\phi$ = 0.20°) analizada, toma un tiempo de 3 horas 56 minutos. La diferencia de tiempo es de 13 minutos en las mallas con $\Delta\phi$ de 0.30° y 0.25°, mientras que entre las malla con $\Delta\phi$ de 0.25° y 0.20° existe una diferencia de tiempos de 7 minutos, las matrices **A** asociadas a las diferentes dimensiones de malla con diferente separación tienen el mismo tamaño de almacenamiento en dependencia de sus dimensiones (***nxm***), es decir, cambia el tamaño de almacenamiento al emplear dimensiones diferentes, pero la matriz (**A**) no cambia de tamaño cuando se emplea diferente intervalo de separación ($\Delta\phi$).

En la siguiente sección se hace el análisis de precisión con los tres diferentes métodos de regularización analizados con anterioridad empleando datos del modelo geopotencial EGM2008 para realizar la comparación de precisión.

6.2.1. Inversión de la integral aplicando regularización Tikhonov

En este caso se aplica la inversión del GVG aplicando el método de regularización Tikhonov, empleando valores *Trr* del modelo geopotencial EGM2008 a una altura constante (250 km), esto para obtener *N*. Se realizó el procedimiento agregando errores aleatorios ($\sigma = 0.003E$) a los *Trr* generados, detectando el mejor parámetro de regularización para cada método con $\Delta\phi$ igual a 0.20°, 0.25° y 0.30° empleando la integral numérica directa.

Para este método de regularización (Tikhonov), los parámetros de regularización (α) resultaron entre $2x10^{-35}$ y $8x10^{-35}$, por otro lado, la mayor dimensión de malla posible de invertir es de 80x80, con un tiempo de computo de 1 hora 21 minutos 15 segundos y un tamaño de la matriz **A** de 312 MB para intervalos de separación de malla de 0.20°. El parámetro de regularización para cada dimensión de malla se muestra en la Tabla 6.9.

Tabla 6. 9: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$.

Dimensión de malla	Tiempo de inversión (min)	α	Estadística (m)	
			μ	σ
60x60	5.95	$8x10^{-35}$	-0.005	0.390
70x70	17.783	$2x10^{-35}$	-0.1264	0.335
80x80	81.25	$3x10^{-35}$	-0.073	0.287

En una malla de 60x60 el parámetro de regularización óptimo es $8x10^{-35}$ con correlación de 0.988. En una malla 70x70 el parámetro de regularización óptimo es $2x10^{-35}$ con correlación de 0.990. En una malla 80x80 el parámetro de regularización óptimo es $3x10^{-35}$ con correlación de 0.993. Se encuentra mejor correlación (Figura 6.6) para la malla de máxima dimensión alcanzada (80x80), así como mejor precisión en su comparación (29 cm). En la Figura 6.6 se muestra la comparación del potencial de perturbaciones (*T*) en el paralelo central con unidades m^2/s^2, donde T_S es la solución de *T* obtenido del modelo geopotencial EGM2008 afectada por error aleatorio y T_M es *T* obtenido del mismo modelo sin afectación de error aleatorio.

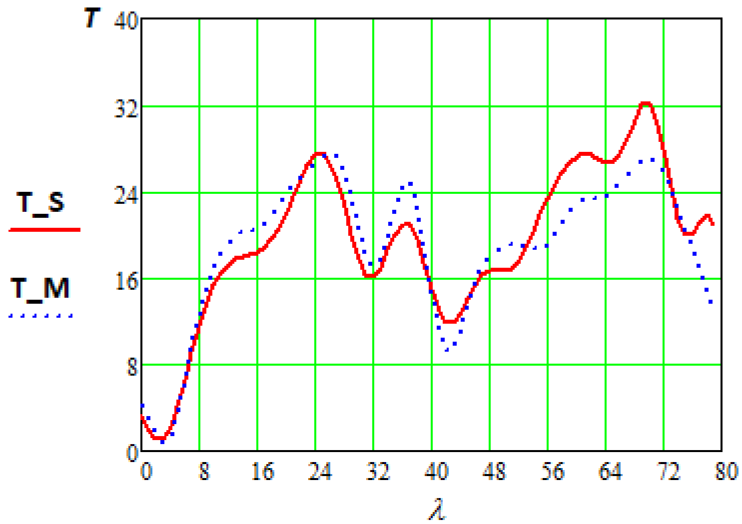

Figura 6. 6: Perfil de la comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$ y dimensiones de 80x80, unidades m^2/s^2.

Para intervalos de mallado $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ empleando regularización (Tikhonov), los parámetros de regularización resultaron entre $3x10^{-35}$ y $2x10^{-34}$ para mallas de 60x60, 70x70 y 80x80, por otro lado, la mayor dimensión de malla alcanzada (80x80), lleva un tiempo de cómputo de 1 hora 23 minutos 7 segundos y un tamaño de almacenamiento en la matriz **A** de 312 MB, siendo el mismo tamaño de almacenamiento para los diferentes intervalos de separación (0.20°, 0.25° y 0.30°) que corresponden al mismo tamaño ($\boldsymbol{n}x\boldsymbol{m}$). El parámetro de regularización para cada dimensión de malla se muestra a continuación, así como resultados en la comparación.

Tabla 6. 10: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	Tiempo de inversión (min)	α	Estadística (m)	
			μ	σ
60x60	7.117	$3x10^{-35}$	-0.107	0.310
70x70	17.9	$5x10^{-35}$	-0.0009	0.316
80x80	83.117	$2x10^{-34}$	0.195	0.316

En una malla de 60x60 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $3x10^{-35}$ con correlación de 0.992. En una malla de 70x70 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $5x10^{-35}$ con correlación de 0.992. En una malla de 80x80 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $2x10^{-34}$ con correlación de 0.993. La mejor precisión obtenida con este método es de 31 cm (Figura 6.7) para una malla de 60x60 donde se obtuvo una media de -11 cm.

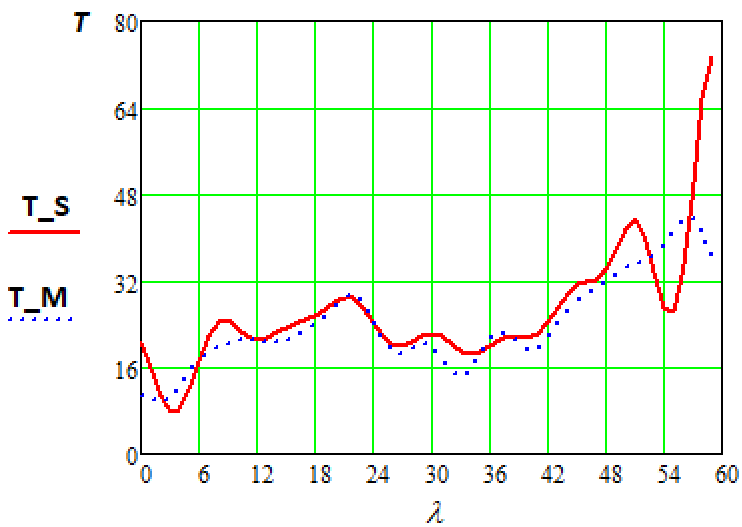

Figura 6. 7: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y dimensiones de 60x60, unidades m^2/s^2.

Para este método (Tikhonov con $\Delta\phi$ = 0.30), los parámetros de regularización resultaron entre $7x10^{-35}$ y $2x10^{-34}$, por otro lado, la máxima dimensión de malla que es posible de invertir es de 80x80, con un tiempo de computo de 1 hora 34 minutos 25 segundos y un tamaño de almacenamiento de la matriz **A** de 312 MB. Los parámetros de regularización y resultados estadísticos para cada dimensión de malla se muestran en la Tabla 6.11.

Tabla 6. 11: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$.

Dimensión de malla	Tiempo de inversión (min)	α	Estadística (m)	
			μ	σ
60x60	7.517	$7x10^{-35}$	0.031	0.337
70x70	21.583	$2x10^{-34}$	0.272	0.309
80x80	94.417	$2x10^{-34}$	0.142	0.276

En una malla con dimensiones de 60x60 el parámetro de regularización óptimo es $7x10^{-35}$ con correlación de 0.992. En una malla 70x70 el parámetro de regularización óptimo es $2x10^{-34}$ con correlación de 0.993. En una malla 80x80 el parámetro de regularización óptimo es $2x10^{-34}$ con correlación de 0.994. La mejor precisión (28 cm) se obtiene en la máxima dimensión posible de invertir (Figura 6.8).

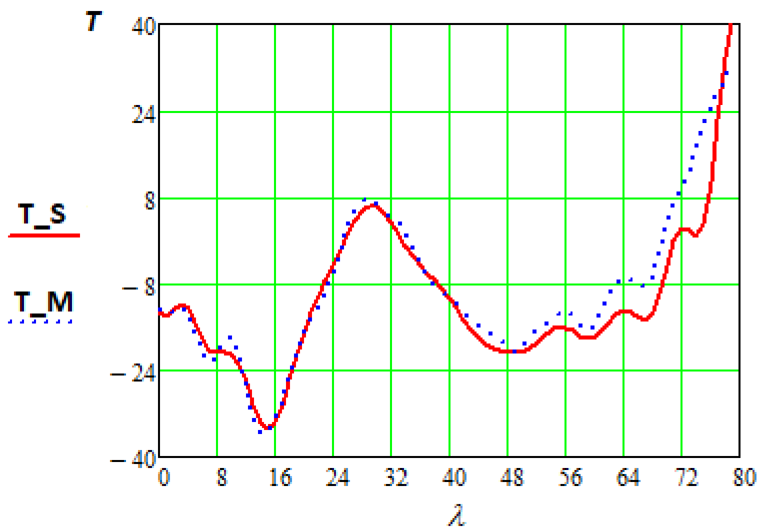

Figura 6. 8: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$ y dimensiones de 80x80, unidades m^2/s^2.

La mejor desviación estándar (28 cm) obtenida para la inversión de diferentes dimensiones de malla y separación con $\Delta\phi$ = 0.30° es en la malla de 80x80.

6.2.2. Inversión de la integral con el método Damped-SVD

En este apartado se hace la inversión de la integral del GVG con el método de regularización Damped-SVD, empleando valores *Trr* del modelo geopotencial EGM2008, con diferentes dimensiones de mallado. En este método los parámetros de regularización van de $8x10^{-36}$ a $1x10^{-34}$, para este método la inversión de la integral lleva más tiempo que con el método de Tikhonov. Los parámetros de regularización y los resultados estadísticos para dimensiones de malla de 60x60, 70x70 y 80x80 se muestran a continuación (Tabla 6.12) donde $\Delta\phi$ = 0.20°.

Tabla 6. 12: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Damped-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	α	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	22.083	$1x10^{-34}$	0.133	-0.011	0.364
70x70	59.717	$4x10^{-35}$	0.25	-0.126	0.293
80x80	236.533	$8x10^{-36}$	0.417	-0.0733	0.266

En la malla de dimensiones de 60x60 el mejor parámetro de regularización es $1x10^{-34}$ con correlación de 0.990. En una malla de 70x70 el parámetro de regularización óptimo es $4x10^{-35}$ con correlación de 0.993. En una malla de 80x80 el parámetro de regularización óptimo es $8x10^{-36}$ con correlación de 0.994. En la mayor dimensión de malla se encontró mejor precisión (27 cm), en la gráfica (Figura 6.9) podemos ver el comportamiento de la correlación para una malla de 80x80.

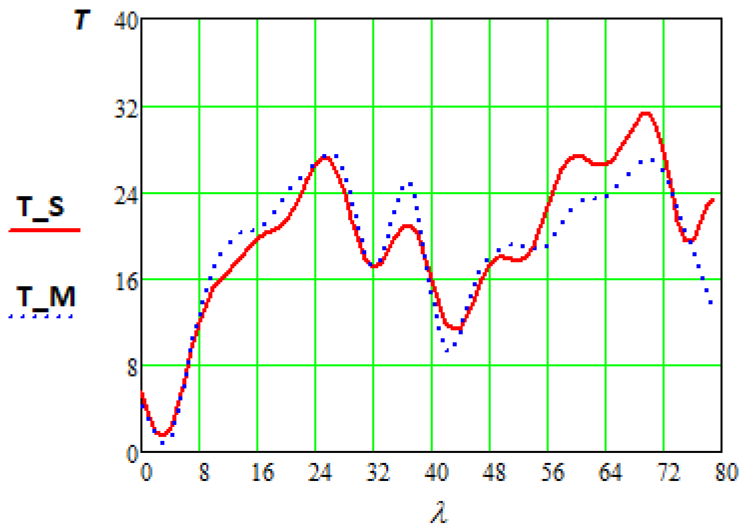

Figura 6. 9: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Damped-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$ y dimensiones de 80x80, unidades m^2/s^2.

Para separación de malla 0.25° con dimensiones de 60x60, 70x70 y 80x80, los parámetros de regularización resultaron de $5x10^{-36}$ a $4x10^{-34}$. Los parámetros de regularización y los resultados de las estadísticas se muestran a continuación.

Tabla 6. 13: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Damped-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	α	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	22.717	$5x10^{-35}$	0.183	-0.110	0.268
70x70	61.950	$9x10^{-35}$	0.100	0.0007	0.302
80x80	244.233	$4x10^{-34}$	0.433	0.208	0.302

En una malla de 60x60 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $5x10^{-35}$ con correlación de 0.994. En una malla de 70x70 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $9x10^{-35}$ con correlación de 0.993. En una malla de 80x80 el parámetro de regularización que resulta óptimo es $4x10^{-34}$ con correlación de 0.993. La mejor precisión

(27 cm) de las dimensiones de mallas invertidas anteriormente (Tabla 6.13) es para la dimensión de mallado de 60x60, donde también se obtuvo mejor correlación (Figura 6.10).

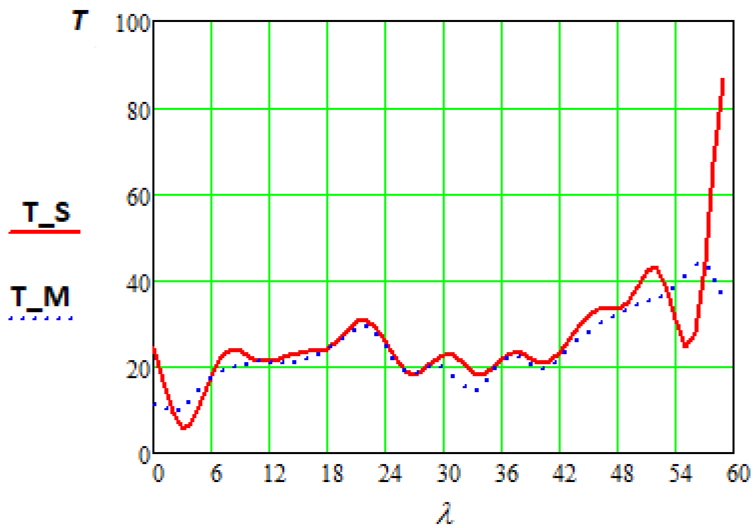

Figura 6. 10: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Damped-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y dimensiones de 60x60, unidades m^2/s^2.

Para este método (regularización Damped-SVD) con $\Delta\phi$ = 0.30°, los parámetros de regularización resultaron entre $2x10^{-34}$ y $5x10^{-34}$.

Tabla 6. 14: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Damped-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	α	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	23.933	$2x10^{-34}$	0.133	0.031	0.326
70x70	64.5	$5x10^{-34}$	0.250	0.255	0.297
80x80	243.45	$4x10^{-34}$	0.433	0.142	0.262

En una malla 60x60 el parámetro de regularización óptimo es $2x10^{-34}$ con correlación de 0.992. En una malla 70x70 el parámetro de regularización óptimo es $5x10^{-34}$ con correlación de 0.994. En una malla 80x80 el parámetro de regularización óptimo es $4x10^{-34}$ con correlación de 0.995. Las precisiones alcanzadas son de 33, 30 y 26 cm, donde se obtiene mejor precisión (26 cm) en la dimensión de malla de 80x80 (Figura 6.11).

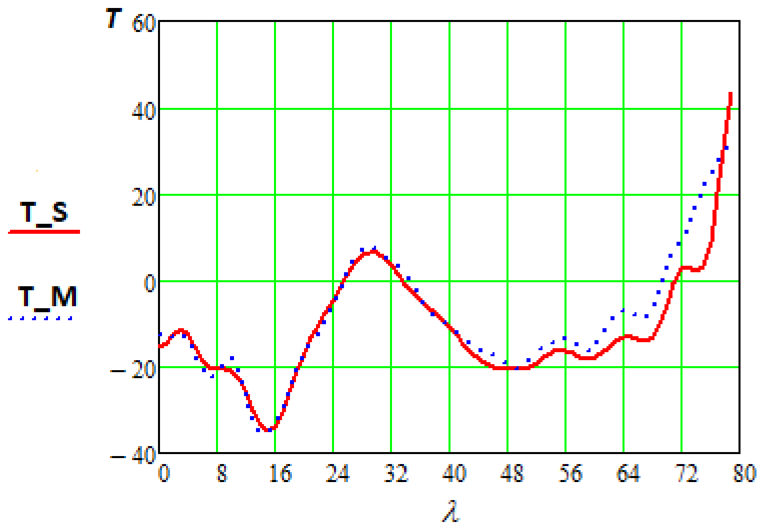

Figura 6. 11: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Damped-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$ y dimensiones de 80x80, unidades m^2/s^2.

La mejor desviación estándar (26 cm) en este método se obtiene con dimensión de malla de 80x80 y una separación de mallado de 0.30°, obteniendo una media de 14 cm.

6.2.3. Inversión de la integral con el método Truncated-SVD

En este apartado se muestran los resultados del análisis de precisión usando el método de regularización Descomposición Truncada del Valor Singular (TSVD, por sus siglas en inglés). El Número de Valores Singulares (NVS) óptimo para este método de mallas con dimensiones de 60x60 a 80x80 con $\Delta\phi$ = 0.20°, resultan entre 3476 y 6241. El NVS para cada dimensión se muestra en la Tabla 6.15. A continuación se presentan las comparaciones afectadas por errores aleatorios de $\sigma = 0.003E$ donde se aplica el método de regularización TSVD (*Truncated Singular Value Decomposition*).

Tabla 6. 15: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Truncated-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	NVS	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	22.083	3476	0	-0.020	0.697
70x70	59.717	4777	0.017	-0.142	0.612
80x80	236.533	6241	0.017	-0.090	0.566

En una malla de 60x60 el número de valores singulares óptimo es 3476 con correlación de 0.964. En una malla 70x70 el número de valores singulares óptimo es 4777 con correlación de 0.969. En una malla 80x80 el número de valores singulares óptimo es 6241 con correlación de 0.974. La mejor precisión (56 cm) en la comparación con separación de malla de 0.20° es obtenida en la inversión de una malla de 80x80 donde a su vez se obtiene una media de -9 cm, en la siguiente grafica (Figura 6.12) podemos ver cómo se comporta la correlación para este mallado.

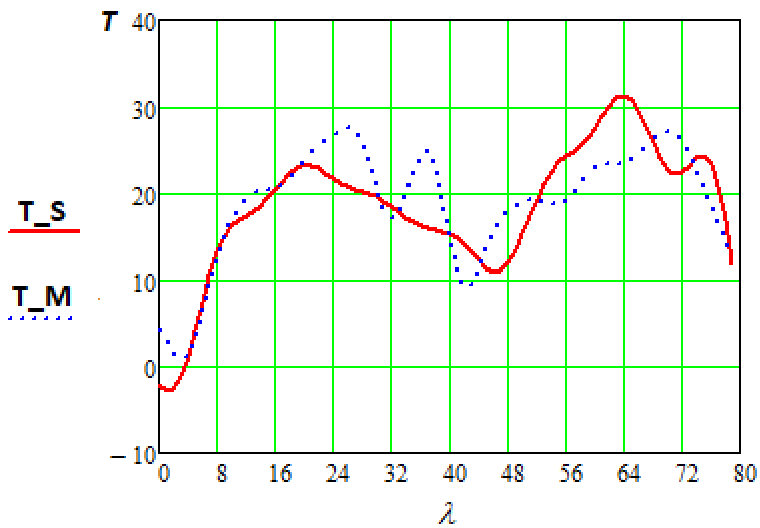

Figura 6. 12: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Truncated-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.20°$ y dimensiones de 80x80, unidades m^2/s^2.

Los NVS óptimos (para este método de mallas de dimensiones de 60x60, 70x70 y 80x80 con $\Delta\phi$ = 0.25°) resultan entre 3462 y 6161. La SVD y los resultados de la comparación para cada dimensión se muestran en la Tabla 6.16.

Tabla 6. 16: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Truncated-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	NVS	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	22.717	3462	0.017	-0.128	0.597
70x70	61.95	4648	0.017	-0.004	0.540
80x80	244.233	6161	0.017	0.323	0.537

En una malla de 60x60 el número de valores singulares óptimo es 3462 con correlación de 0.970. En una malla de 70x70 el número de valores singulares óptimo es 4648 con correlación de 0.978. En una malla de 80x80 el número de valores singulares óptimo es 6161 con correlación de 0.982. La mejor precisión (54 cm) en la comparación con separación de malla de 0.25° es obtenida en la inversión de una malla de 70x70 donde a su vez se obtiene una media de -4 mm, en la siguiente grafica (Figura 6.13) podemos ver cómo se comporta la correlación para este mallado.

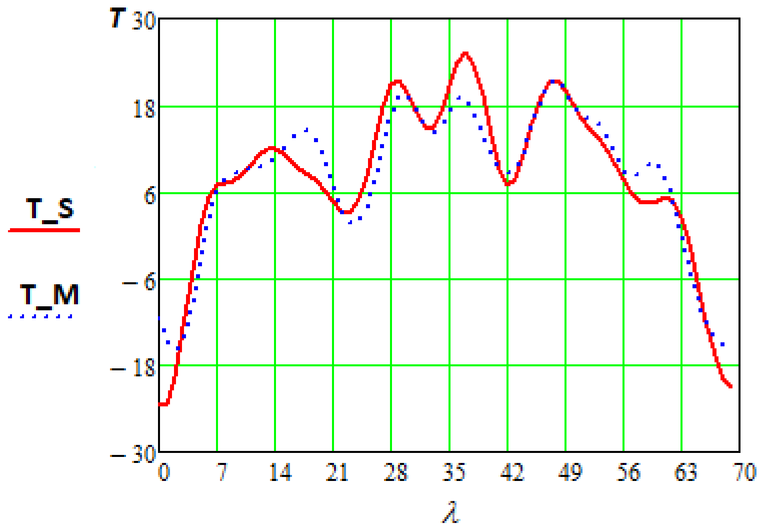

Figura 6. 13: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Truncated-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y dimensiones de 70x70, unidades m^2/s^2.

Los NVS óptimos (para este método de una malla que va de dimensiones de 60x60 a 80x80 con intervalos 0.30°) resultan entre 3405 y 6153. El SVD para cada dimensión se muestra en la Tabla 6.17.

Tabla 6. 17: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión numérica directa de la integral del GVG con regularización Truncated-SVD, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$.

Dimensión de malla	Matriz (min)	NVS	Tiempo de inversión (min)	Estadística (m)	
				μ	σ
60x60	23.933	3405	0	0.026	0.536
70x70	64.5	4589	0	0.470	0.525
80x80	243.45	6153	0.017	-0.078	0.581

En una malla de 60x60 el número de valores singulares óptimo es 3405 con correlación de 0.981. En una malla de 70x70 el número de valores singulares óptimo es 4589 con correlación de 0.983. En una malla de 80x80 el número de valores singulares óptimo es 6153 con correlación de 0.978. La mejor precisión (53 cm) en la comparación con separación de malla de 0.30° es obtenida en la inversión de una malla de 70x70 donde a su vez se obtiene una media de 47 cm, en la siguiente grafica (Figura 6.14) podemos ver cómo se comporta la correlación para este mallado.

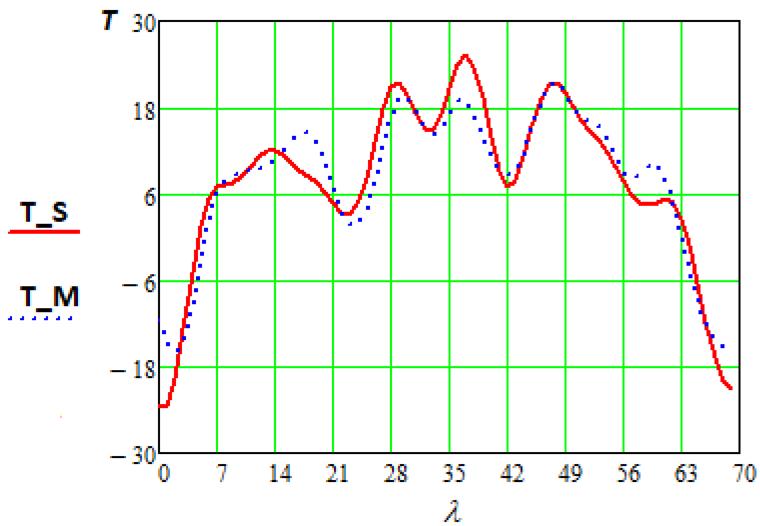

Figura 6. 14: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con integración numérica directa, aplicando regularización Truncated-SVD, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.30°$ y dimensiones de 70x70, unidades m^2/s^2.

La mejor desviación estándar (53 cm) en este método (TSVD) se obtiene con una dimensión de malla de 70x70 y una separación de mallado de 0.30° obteniendo una media de 47 cm.

Para los tres métodos de regularización analizados (Tikhonov, DSVD y TSVD) se emplearon errores aleatorios de $3x10^{-3}E$ empleando datos del modelo geopotencial EGM2008 esto para distintas configuraciones de mallado, donde el método que resulta con mejor precisión es el método DSVD, mientras que el método menos preciso es el TSVD. Se emplearon separaciones de mallas ($\Delta\phi$) de 0.20°, 0.25° y 0.30°, para dimensiones de mallas de 60x60, 70x70 y 80x80, donde la mejor desviación estándar obtenida fue de 26 cm, resultando una media de 14 cm esto para una malla de 80x80 con $\Delta\phi$ = 0.30°, donde se aplicó regularización DSVD resultando $\alpha = 4x10^{-34}$. El segundo método con el que se obtuvo mejores precisiones y con menor tiempo de inversión de la integral del GVG fue aplicando regularización Tikhonov, donde la mejor desviación estándar es de 28 cm para una malla de 80x80 con $\alpha = 2x10^{-34}$. Por último, aplicando regularización TSVD la mejor desviación estándar alcanzada es de 47 cm, este último método es el que resulto menos preciso.

6.3. Precisión con respecto a la densidad de datos empleando 1D-FFT

Se realizó un análisis de precisión con datos simulados del modelo geopotencial EGM2008, en donde se realizó la inversión de la Integral del Gradiente Vertical de la Gravedad (GVG) empleando 1D-FFT en dos dimensiones. El análisis consistió en obtener el potencial de perturbaciones (*T*) para posteriormente obtener la altura geoidal (*N*) a partir del Trr (GVG) generado por el modelo geopotencial EGM2008. Se realizó la inversión para dimensiones de 10x10 hasta 160x160 grados cuadrados y un área rectangular de 160x360 (***n****x****m***). Se emplearon densidades de malla ($\Delta\phi$) de 0.10°, 0.25°, 0.50° y 1°. Se realiza el procedimiento con las tres opciones diferentes de relleno (*padding*, cero *padding* y no *padding*), eliminando el 15% de efecto de orilla (*edge*, por su nombre en inglés) y agregando errores pseudo aleatorios de $3x10^{-3}E$.

Las unidades de los resultados que se muestran a continuación son en metros que es la unidad de la altura geoidal u ondulación del geoide (***N***). Los resultados obtenidos de los parámetros de regularización, la media, desviación estándar y correlación para las diferentes dimensiones de malla se muestran en la Tabla 6.18. Donde se realizó la inversión del GVG. A continuación se muestran los resultados de mallas con separación de 0.10° con diferentes opciones de padding mencionadas anteriormente, los siguientes resultados fueron obtenidos usando padding.

Tabla 6. 18: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$3x10^{-28}$	0.044	0.095	0.976
20x20	$2x10^{-27}$	-0.304	0.152	0.965
30x30	$3x10^{-27}$	-0.609	0.219	0.967
40x40	$2x10^{-27}$	-0.553	0.244	0.981
50x50	$2x10^{-27}$	-0.650	0.432	0.977
60x60	$4x10^{-27}$	0.303	0.440	0.964
70x70	$3x10^{-28}$	0.412	0.458	0.976
80x80	$4x10^{-28}$	0.240	0.515	0.982
90x90	$3x10^{-28}$	0.287	0.567	0.978
100x100	$1x10^{-28}$	0.257	0.484	0.982
110x110	$3x10^{-29}$	0.111	0.465	0.983
120x120	$4x10^{-29}$	-0.026	0.361	0.990
130x130	$4x10^{-29}$	-0.093	0.340	0.991
140x140	$5x10^{-29}$	-0.186	0.392	0.988
150x150	$6x10^{-29}$	-0.105	0.318	0.991
160x160	$9x10^{-29}$	-0.035	0.332	0.990
160x360	$2x10^{-28}$	-0.117	0.361	0.985

En la Tabla (6.18) anterior para las dimensiones de mallas que van de 10x10 a 160x160 los resultados tienen un comportamiento similar para todas las opciones de mallado, obteniéndose parámetros de regularización de $3x10^{-29}$ a $4x10^{-27}$ y correlaciones de 0.964 a 0.991 para todas las configuraciones de mallado empleadas. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están en el orden de 9.5 cm a 57 cm y -3 cm a -65 cm, respectivamente, el comportamiento de la comparación para una malla de 160x160 se muestra en la Figura 6.15. En la malla de separación 160x360 resulta una media de -12 cm, desviación estándar de 36 cm y correlación de 0.985 con un parámetro de regularización de $2x10^{-28}$.

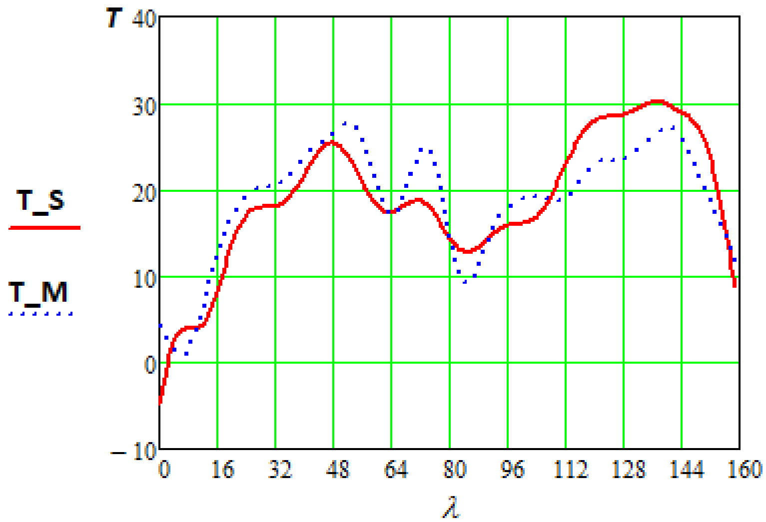

Figura 6. 15: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$ y dimensiones de 160x160 (usando padding), unidades m^2/s^2.

Los resultados para diferentes configuración de mallas con separación de malla de 0.10° usando 0 padding se muestra en la Tabla 6.19. Donde se muestran relativamente mejores resultados estadísticos en la mayoría de las configuraciones de mallas cuando se emplea padding que cuando se emplea 0 padding, esto se da porque al usar padding se reduce el error de convolución inversa.

Tabla 6. 19: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando 0 padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$3x10^{-30}$	0.152	0.159	0.902
20x20	$2x10^{-29}$	-0.290	0.185	0.943
30x30	$3x10^{-29}$	-0.617	0.222	0.966
40x40	$3x10^{-29}$	-0.778	0.260	0.984
50x50	$2x10^{-29}$	-0.680	0.432	0.977
60x60	$4x10^{-30}$	0.072	0.418	0.967
70x70	$3x10^{-30}$	0.210	0.447	0.975
80x80	$4x10^{-30}$	0.141	0.496	0.982
90x90	$2x10^{-30}$	0.264	0.525	0.980
100x100	$1x10^{-30}$	0.203	0.456	0.984
110x110	$4x10^{-31}$	0.097	0.440	0.985
120x120	$4x10^{-31}$	-0.010	0.354	0.990
130x130	$4x10^{-31}$	-0.095	0.338	0.991
140x140	$4x10^{-31}$	0.099	0.342	0.990
150x150	$5x10^{-31}$	-0.107	0.342	0.990
160x160	$1x10^{-30}$	-0.043	0.350	0.989
160x360	$7x10^{-28}$	-0.016	0.385	0.986

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, yendo de $4x10^{-31}$ a $7x10^{-28}$ y 0.902 a 0.991, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 16 cm a 53 cm y -1 cm a 78 cm, respectivamente. En la siguiente gráfica (Figura 6.16) podemos ver el comportamiento de la comparación para una malla de 70x70 usando 0 padding.

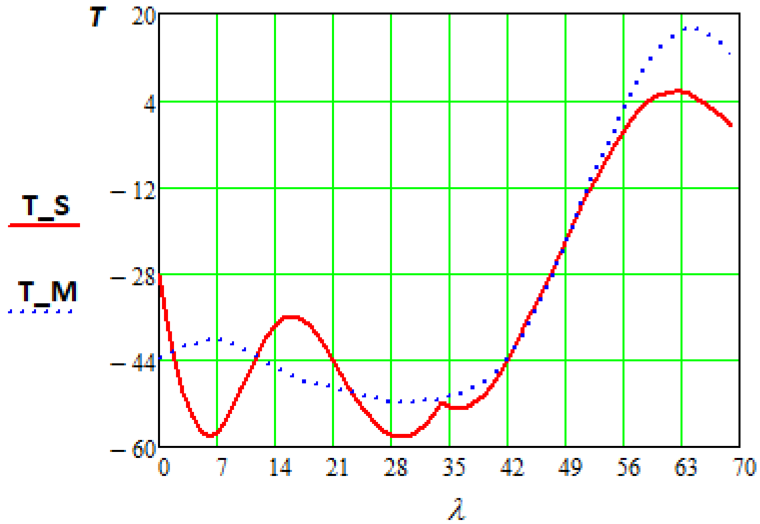

Figura 6. 16: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión con 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$ y dimensiones de 70x70 (usando 0 padding) , unidades m^2/s^2.

La última opción de padding empleada fue no padding en este caso los resultados muestran que las desviaciones estándar y las medias tienen un comportamiento variado, es decir en algunas configuraciones hay mejores resultados de estos parámetros estadísticos cuando se usa 0 padding y en otras ocasiones resultan mejor cuando no se usa padding. Sin embargo, se encuentran mejores resultados estadísticos para la mayoría de las configuraciones donde se emplea 0 padding que cuando no se emplea padding. Por otro lado, las correlaciones resultan más bajas en la comparación de la mayoría de las configuraciones cuando no se usa padding (Figura 6.17).

Tabla 6. 20: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT sin padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$3x10^{-30}$	0.128	0.052	0.995
20x20	$2x10^{-29}$	-0.326	0.085	0.990
30x30	$3x10^{-29}$	-0.668	0.169	0.981
40x40	$2x10^{-29}$	-0.681	0.245	0.982
50x50	$2x10^{-29}$	-0.710	0.449	0.976
60x60	$4x10^{-30}$	0.200	0.469	0.957
70x70	$4x10^{-30}$	0.295	0.513	0.970
80x80	$4x10^{-30}$	0.270	0.586	0.976
90x90	$4x10^{-30}$	0.257	0.689	0.967
100x100	$2x10^{-30}$	0.214	0.662	0.967
110x110	$2x10^{-31}$	0.090	0.641	0.967
120x120	$3x10^{-31}$	-0.060	0.492	0.981
130x130	$3x10^{-31}$	-0.171	0.443	0.984
140x140	$4x10^{-31}$	-0.191	0.398	0.987
150x150	$5x10^{-31}$	-0.112	0.338	0.991
160x160	$5x10^{-31}$	0.006	0.315	0.991
160x360	$2x10^{-30}$	0.044	0.410	0.981

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, yendo de $2x10^{-31}$ a $3x10^{-29}$ y 0.957 a 0.995, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 5 cm a 69 cm y 6 mm a -71 cm, respectivamente.

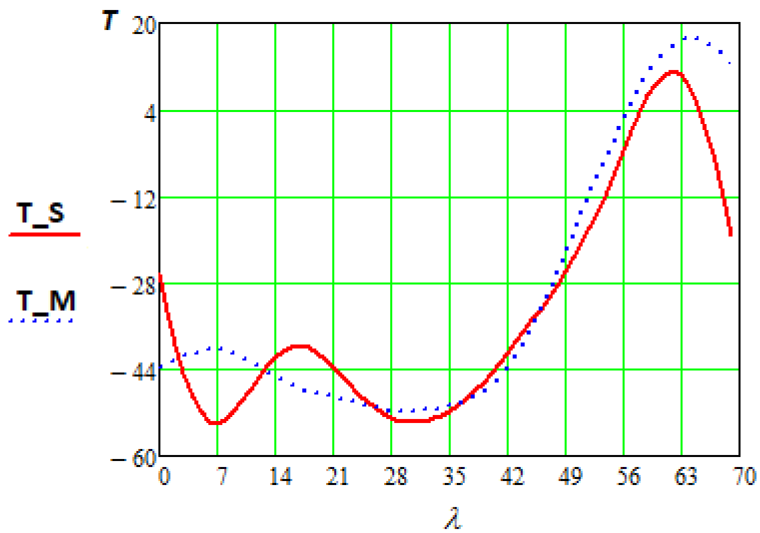

Figura 6. 17: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.10°$ y dimensiones de 70x70 (sin padding) , unidades m^2/s^2.

En la Figura 6.18 se muestra la comparación de la altura geoidal (*N*) donde es obtenida por los *Trr* del modelo EGM2008 afectando el resultado por errores aleatorios de $3x10^{-3}E$, por otro lado se genera *N* a partir del potencial de perturbación (*T*) generado por el mismo modelo (EGM2008), esto es hecho para encontrar el mejor parámetro de regularización para diferentes configuraciones de mallado. Los resultados de la comparación muestran diferencias del orden de 1 a 4 m para el área central, donde para esta comparación se emplea $\Delta\phi$ = 0.10° y dimensiones de 160x360, para esta configuración se encuentra un parámetro de regularización optima de $2x10^{-30}$ (Tabla 6.20).

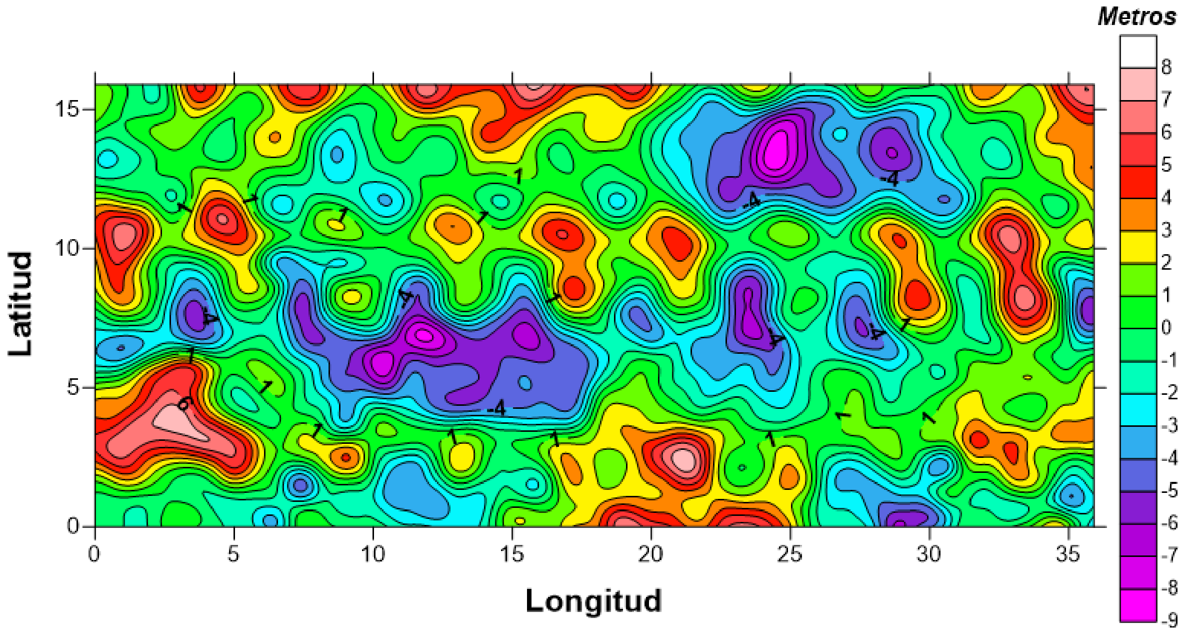

Figura 6. 18: Error en la comparación del proceso de inversión con datos simulados del modelo geopotencial EGM2008 de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, empleando 0.10° en separaciones de malla con dimensiones de 160x360 (0 padding).

A continuación se realiza el análisis anterior con densidades de malla 0.25°, usando las mismas dimensiones de malla con las tres opciones de padding empleadas con anterioridad. En esta comparación los resultados son de mayor calidad, resultando mejores precisiones, medias y correlaciones que el análisis con $\Delta\phi$ = 0.10° en la mayoría de las configuraciones de mallado. Los resultados de este análisis se muestran a continuación.

Tabla 6. 21: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$4x10^{-30}$	-0.457	0.224	0.957
20x20	$2x10^{-30}$	-0.349	0.434	0.966
30x30	$4x10^{-31}$	0.432	0.432	0.982
40x40	$2x10^{-31}$	0.262	0.489	0.982
50x50	$5x10^{-32}$	-0.079	0.376	0.989
60x60	$1x10^{-31}$	-0.105	0.321	0.991
70x70	$3x10^{-31}$	0.033	0.351	0.990
80x80	$3x10^{-31}$	0.189	0.305	0.993
90x90	$3x10^{-31}$	0.225	0.307	0.993
100x100	$3x10^{-31}$	0.035	0.282	0.994
110x110	$2x10^{-31}$	-0.103	0.285	0.995
120x120	$2x10^{-31}$	-0.153	0.250	0.996
130x130	$4x10^{-31}$	-0.022	0.277	0.995
140x140	$3x10^{-31}$	-0.033	0.228	0.997
150x150	$3x10^{-31}$	0.028	0.292	0.994
160x160	$2x10^{-31}$	0.037	0.248	0.997
160x360	$3x10^{-32}$	-0.042	0.259	0.998

En la Tabla (6.21) anterior, las dimensiones de mallas que van de 10x10 a 160x160 tienen resultados de parámetros de regularización y correlación en el orden de $5x10^{-32}$ a $4x10^{-30}$ y 0.957 a 0.996, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 22 cm a 49 cm y -2 cm a -46 cm. En la malla con dimensiones de 160x360 resulta una media de -4.2 cm y correlación 0.998 con un parámetro de regularización de $3x10^{-32}$. En la Figura 6.19 se muestra la correlación existente en una malla de dimensiones 160x160 con $\Delta\phi$ = 0.25°.

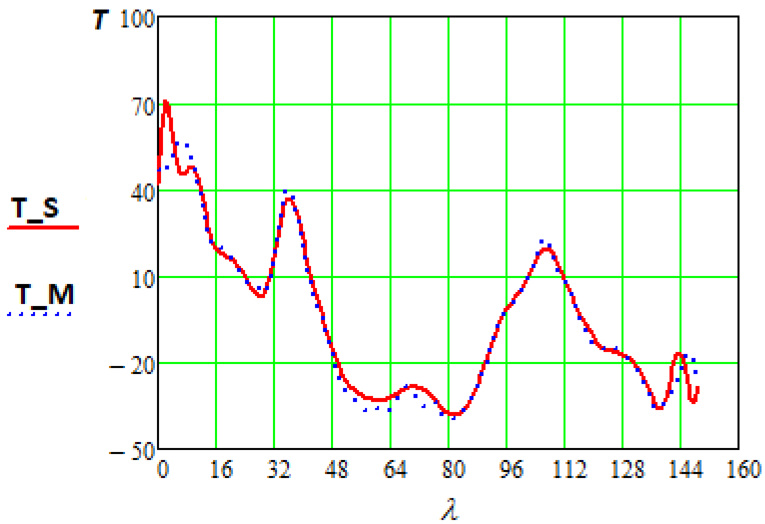

Figura 6. 19: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión con 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y dimensiones de 160x160 (usando padding) , unidades m^2/s^2.

Los resultados para diferentes mallas con $\Delta\phi$ = 0.25° usando 0 padding se muestran en la Tabla 6.22. En los resultados para este análisis (Tabla 6.22) donde se aplicó 0 padding se obtuvieron ligeramente mejores resultados estadísticos que en el análisis anterior (Tabla 6.21).

Tabla 6. 22: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando 0 padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$4x10^{-30}$	-0.459	0.237	0.951
20x20	$3x10^{-30}$	-0.635	0.414	0.978
30x30	$5x10^{-31}$	0.207	0.422	0.982
40x40	$2x10^{-31}$	0.200	0.463	0.984
50x50	$7x10^{-32}$	-0.057	0.381	0.989
60x60	$1x10^{-31}$	-0.109	0.342	0.990
70x70	$3x10^{-31}$	0.024	0.360	0.990
80x80	$3x10^{-31}$	0.186	0.304	0.993
90x90	$3x10^{-31}$	0.232	0.309	0.993
100x100	$3x10^{-31}$	0.0380	0.287	0.994
110x110	$3x10^{-31}$	-0.037	0.286	0.995
120x120	$2x10^{-31}$	-0.167	0.250	0.996
130x130	$3x10^{-31}$	-0.105	0.274	0.995
140x140	$2x10^{-31}$	-0.048	0.219	0.997
150x150	$4x10^{-31}$	0.019	0.286	0.995
160x160	$3x10^{-31}$	0.023	0.251	0.997
160x360	$3x10^{-32}$	-0.042	0.256	0.998

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, resultando de $3x10^{-32}$ a $4x10^{-30}$ y 0.951 a 0.998, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 22 cm a 46 cm y 2 cm a -64 cm, respectivamente. La Figura 6.20 muestra el comportamiento de la estadística para una malla de 80x80.

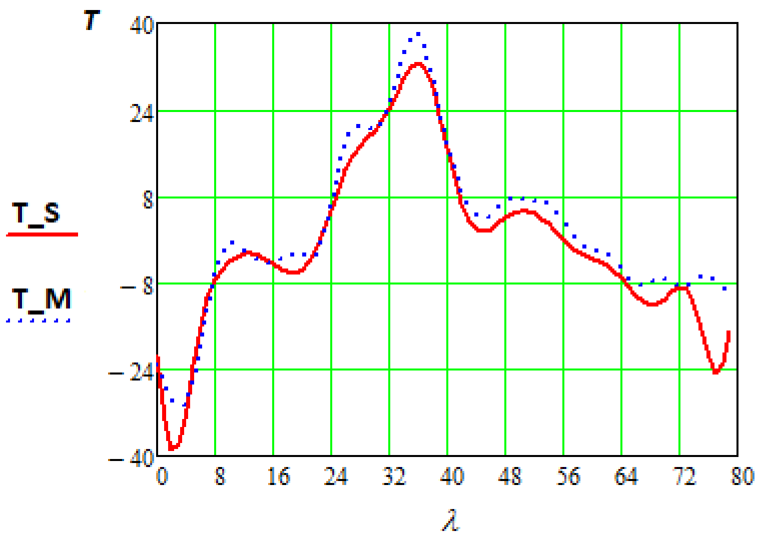

Figura 6. 20: Perfil de comparación de T en el paralelo central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y dimensiones de 80x80 (usando 0 padding) , unidades m^2/s^2.

Para esta configuración de malla (80x80) se encontró un α óptimo de $3x10^{-31}$, media de 19 cm, desviación estándar de 30 cm y correlación 0.993. A continuación se muestran los resultados de las comparaciones sin usar padding (Tabla 6.23), donde resultan con menos precisión que la comparación anterior (Tabla 6.22).

Tabla 6. 23: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT sin padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$4x10^{-30}$	-0.484	0.142	0.983
20x20	$2x10^{-30}$	-0.461	0.437	0.969
30x30	$6x10^{-31}$	0.314	0.510	0.975
40x40	$3x10^{-31}$	0.229	0.656	0.967
50x50	$4x10^{-32}$	-0.115	0.508	0.979
60x60	$9x10^{-32}$	-0.112	0.337	0.991
70x70	$2x10^{-31}$	0.168	0.361	0.989
80x80	$4x10^{-31}$	0.283	0.353	0.991
90x90	$4x10^{-31}$	0.487	0.330	0.992
100x100	$5x10^{-32}$	-0.009	0.320	0.994
110x110	$3x10^{-31}$	-0.107	0.315	0.993
120x120	$3x10^{-31}$	-0.053	0.270	0.995
130x130	$3x10^{-31}$	-0.048	0.283	0.994
140x140	$3x10^{-31}$	-0.008	0.266	0.995
150x150	$4x10^{-31}$	-0.002	0.316	0.994
160x160	$3x10^{-31}$	0.002	0.247	0.997
160x360	$5x10^{-32}$	-0.006	0.279	0.998

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, están en el orden de $4x10^{-32}\,a\,4x10^{-30}$ y 0.967 a 0.998, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas (Tabla 6.23) están entre 14 cm a 66 cm y -8 mm a 49 cm, respectivamente. La siguiente Figura (6.21) muestra el comportamiento estadístico de una malla de 160x360.

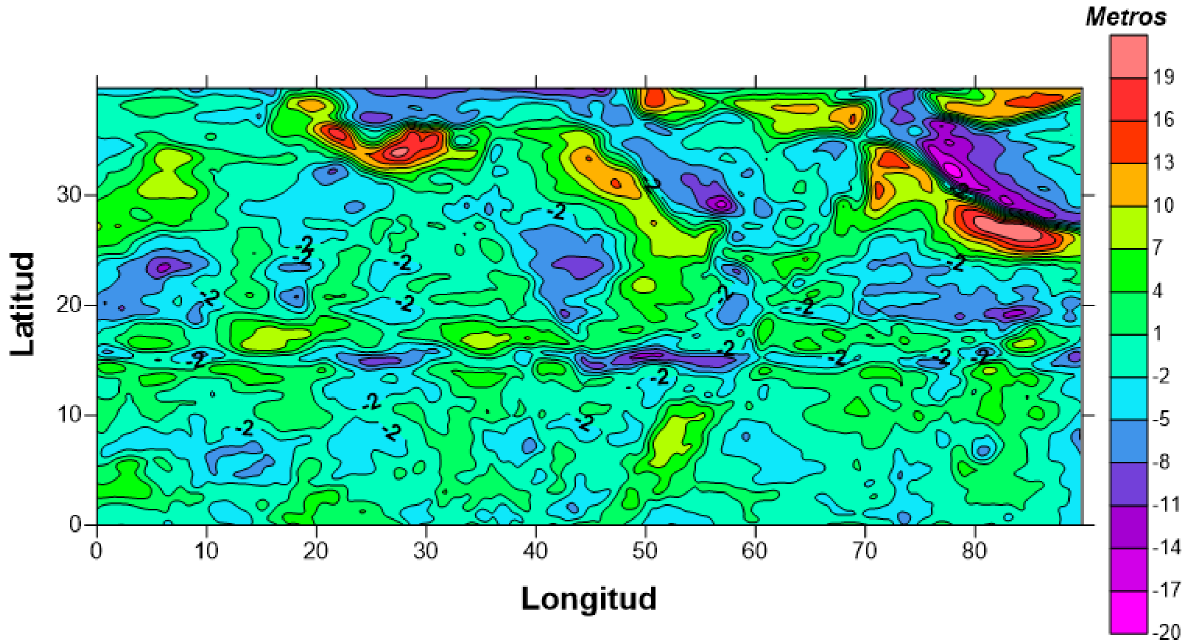

Figura 6. 21: Error en la comparación del proceso de inversión con datos simulados del modelo geopotencial EGM2008 de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, empleando 0.25° en separaciones de malla con dimensiones de 160x360 (padding).

Los resultados de la gráfica anterior (Figura 6.21) muestra las diferencias de la altura geoidal (*N*) obtenidas a partir de la inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT a partir de datos del modelo geopotencial EGM2008. Se realizó el análisis anterior con densidades de malla 0.50°, usando las mismas dimensiones de malla con las tres opciones de padding empleadas con anterioridad, los resultados se muestran a continuación (Tabla 6.24). La mayoría de las comparaciones anteriores (Tabla 6.23) resultaron con mejores resultados estadísticos que las comparaciones de malla con dimensiones de 0.50°.

Tabla 6. 24: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$7x10^{-31}$	-0.475	0.404	0.980
20x20	$4x10^{-32}$	0.286	0.494	0.981
30x30	$4x10^{-32}$	-0.087	0.338	0.990
40x40	$8x10^{-32}$	0.166	0.316	0.993
50x50	$8x10^{-32}$	0.046	0.295	0.993
60x60	$6x10^{-32}$	-0.098	0.252	0.996
70x70	$5x10^{-32}$	-0.059	0.224	0.996
80x80	$6x10^{-32}$	0.032	0.255	0.996
90x90	$3x10^{-32}$	-0.045	0.304	0.996
100x100	$3x10^{-32}$	-0.032	0.289	0.997
110x110	$3x10^{-32}$	-0.015	0.346	0.996
120x120	$3x10^{-32}$	0.048	0.313	0.997
130x130	$2x10^{-32}$	-0.005	0.282	0.997
140x140	$2x10^{-32}$	-0.020	0.274	0.997
150x150	$2x10^{-32}$	-0.024	0.273	0.997
160x160	$2x10^{-32}$	0.026	0.268	0.997
160x360	$1x10^{-32}$	0.022	0.289	0.997

En la Tabla (6.24) anterior para las dimensiones de mallas que van de dimensiones 10x10 a 160x160 los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen resultados con ligeras diferencias, las cuales están en el orden de $2x10^{-32}$ a $7x10^{-31}$ y 0.980 a 0.997, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 22 cm a 49 cm y -5 cm a -48 cm. En la comparación de la malla de separación 160x360 (Figura 6.22) resulta una media de 2.2 cm, desviación estándar de 29 cm y correlación 0.997 con un parámetro de regularización de $1x10^{-32}$.

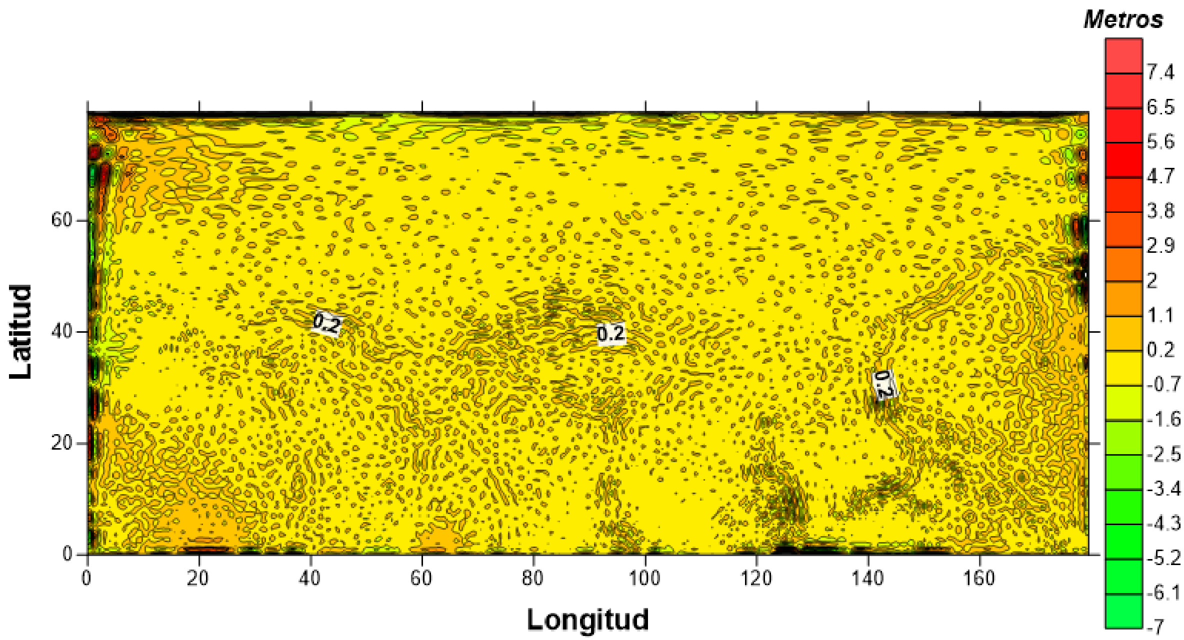

Figura 6. 22: Error en la comparación del proceso de inversión con datos simulados del modelo geopotencial EGM2008 de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, empleando 0.50° en separaciones de malla con dimensiones de 160x360 (usando padding).

A continuación (Tabla 6.25) se muestran los resultados de la comparación para diferentes dimensiones de mallado con intervalos de separación de 0.50 empleando 1D-FFT usando 0 padding.

Tabla 6. 25: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando 0 padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$7x10^{-31}$	-0.524	0.419	0.979
20x20	$4x10^{-32}$	0.216	0.477	0.982
30x30	$4x10^{-32}$	-0.100	0.343	0.990
40x40	$7x10^{-32}$	0.190	0.312	0.993
50x50	$8x10^{-32}$	0.047	0.294	0.994
60x60	$6x10^{-32}$	-0.112	0.258	0.996
70x70	$5x10^{-32}$	-0.051	0.222	0.996
80x80	$7x10^{-32}$	0.027	0.253	0.996
90x90	$4x10^{-32}$	-0.022	0.299	0.997
100x100	$3x10^{-32}$	-0.033	0.285	0.997
110x110	$5x10^{-32}$	-0.026	0.347	0.996
120x120	$3x10^{-32}$	0.036	0.311	0.997
130x130	$2x10^{-32}$	-0.0002	0.283	0.997
140x140	$2x10^{-32}$	-0.019	0.274	0.997
150x150	$2x10^{-32}$	-0.015	0.277	0.997
160x160	$2x10^{-32}$	0.024	0.268	0.997
160x360	$1x10^{-32}$	0.022	0.292	0.997

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, encontrándose entre los valores de $1x10^{-32}$ a $7x10^{-31}$ y 0.979 a 0.997, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 22 cm a 48 cm y -0.2 mm a -52 cm, respectivamente. La Figura 6.23 muestra el comportamiento de la comparación para una malla de 80x80 para separación de malla 0.50° usando 0 padding.

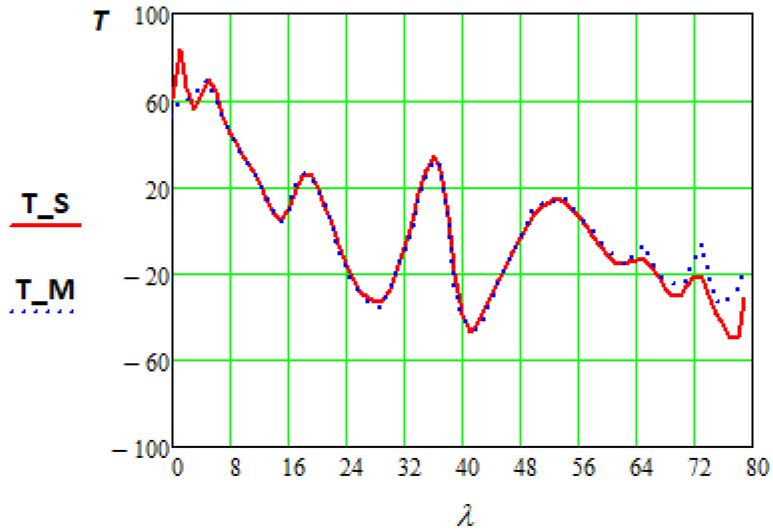

Figura 6. 23: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$ y dimensiones de 80x80 (usando 0 padding) , unidades m^2/s^2.

En la configuración de mallado anterior (Figura 6.23) se obtuvo una media de 27 mm, desviación estándar de 25 cm y una correlación de 0.996. A continuación se muestran los resultados para las mismas configuraciones de mallado anterior, donde se realiza la inversión con 1D-FFT sin padding.

Tabla 6. 26: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT sin padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$6x10^{-31}$	-0.499	0.452	0.974
20x20	$7x10^{-32}$	0.264	0.668	0.965
30x30	$2x10^{-32}$	-0.127	0.351	0.990
40x40	$1x10^{-31}$	0.272	0.358	0.990
50x50	$8x10^{-32}$	-0.015	0.292	0.994
60x60	$8x10^{-32}$	-0.030	0.275	0.995
70x70	$7x10^{-32}$	-0.005	0.269	0.995
80x80	$6x10^{-32}$	0.015	0.260	0.996
90x90	$3x10^{-32}$	-0.089	0.303	0.996
100x100	$4x10^{-32}$	0.038	0.318	0.996
110x110	$6x10^{-32}$	-0.116	0.373	0.996
120x120	$2x10^{-32}$	-0.014	0.306	0.997
130x130	$2x10^{-32}$	0.024	0.275	0.998
140x140	$2x10^{-32}$	0.018	0.284	0.997
150x150	$3x10^{-32}$	-0.067	0.293	0.997
160x160	$2x10^{-32}$	0.056	0.270	0.997
160x360	$1x10^{-32}$	0.037	0.297	0.997

En la comparación anterior (Tabla 6.26) los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen poca variación, resultando en el orden de $1x10^{-32}$ a $6x10^{-31}$ y 0.965 a 0.998, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están en el orden de 26 cm a 67 cm y -5 mm a -50 cm, respectivamente. La Figura 6.24 muestra el comportamiento de la comparación para una malla de 100x100.

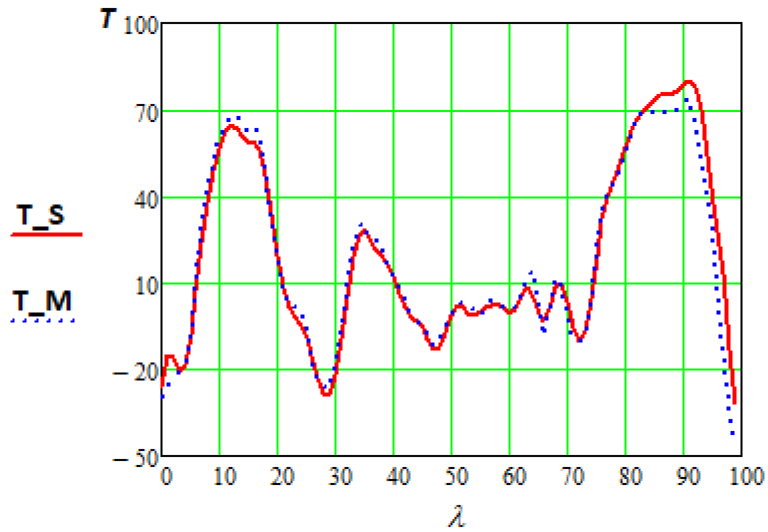

Figura 6. 24: Perfil de comparación de *T* en el paralelo central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$ y dimensiones de 100x100 (sin padding) , unidades m^2/s^2.

Cuando se emplea la configuración $\Delta\phi$ = 1° la mayor dimensión de malla posible de invertir es de 90x90, esto es porque no es posible invertir latitud mayor de 90°. Los resultados para diferentes dimensiones de malla en la inversión de la integral del GVG con 1D-FFT usando padding se muestra a continuación.

Tabla 6. 27: Resultados de la comparación en la obtención de *N* al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$3x10^{-32}$	0.228	0.487	0.981
20x20	$2x10^{-32}$	0.144	0.314	0.993
30x30	$2x10^{-32}$	-0.036	0.273	0.995
40x40	$2x10^{-32}$	0.013	0.256	0.996
50x50	$1x10^{-32}$	-0.014	0.321	0.996
60x60	$95x10^{-34}$	0.050	0.334	0.997
70x70	$9x10^{-33}$	-0.016	0.311	0.997
80x80	$9x10^{-33}$	0.033	0.301	0.996
90x90	$2x10^{-32}$	-0.120	0.413	0.993

En la Tabla 6.27 las dimensiones de mallas invertidas son desde 10x10 hasta 90x90 los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen resultados con pequeñas diferencias, están en el orden de $95x10^{-34}$ a $1x10^{-32}$ y 0.981 a 0.997, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están en el orden de 26 cm a 49 cm y 13 mm a 23 cm. La correlación para este análisis de dimensión de malla de 90x90 con intervalos de 1° se muestra a continuación (Figura 6.25).

Figura 6. 25: Perfil de comparación de T en el meridiano central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1°$ y dimensiones de 90x90 (usando padding) , unidades m^2/s^2.

En la Tabla 6.28 se muestran los resultados para las mismas dimensiones e intervalos, esta vez usando 0 padding. Se encuentran resultados estadísticos de mayor calidad en la mayoría de las dimensiones de mallado analizados (Tabla 6.28) que en la comparación anterior (Tabla 6.27).

Tabla 6. 28: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT usando 0 padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1^{\circ}$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$2x10^{-32}$	0.200	0.444	0.983
20x20	$2x10^{-32}$	0.151	0.298	0.993
30x30	$2x10^{-32}$	-0.033	0.272	0.995
40x40	$2x10^{-32}$	0.021	0.256	0.996
50x50	$1x10^{-32}$	-0.012	0.319	0.996
60x60	$95x10^{-34}$	0.048	0.338	0.996
70x70	$8x10^{-33}$	-0.019	0.310	0.997
80x80	$95x10^{-34}$	0.033	0.305	0.996
90x90	$1x10^{-32}$	-0.112	0.371	0.994

En la comparación anterior (Tabla 6.28) los resultados de los parámetros de regularización y correlación tienen variación en su resultado que va de $8x10^{-33}$ a $1x10^{-32}$ y 0.997 a 0.983, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están en el orden de 26 cm a 44 cm y -12 mm a 20 cm, respectivamente. La Figura 6.26 muestra el comportamiento de la estadística para una malla de 80x80, para este mallado resulta una media de 33 mm, desviación estándar de 31 cm y una correlación de 0.996.

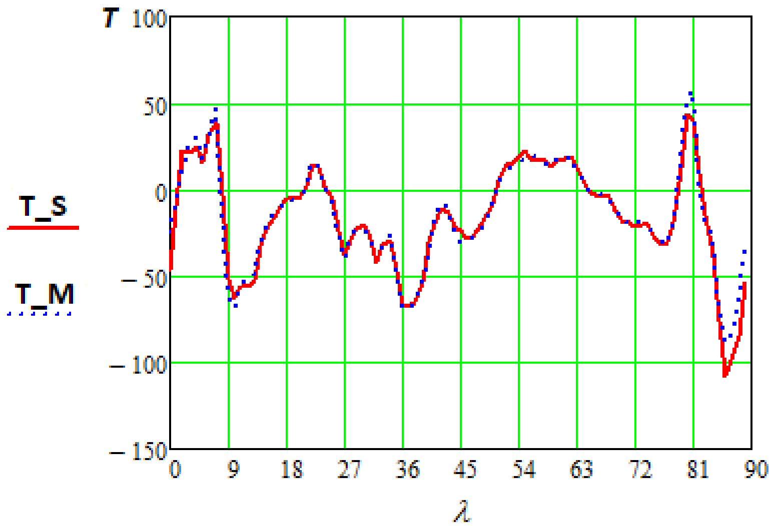

Figura 6. 26: Perfil de comparación de T en el meridiano central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1°$ y dimensiones de 90x90 (usando 0 padding) , unidades m^2/s^2.

A continuación (Tabla 6.29) se muestran los resultados para las mismas configuraciones de mallado anterior (Tabla 6.28), donde se realiza la inversión con 1D-FFT sin padding. Los mejores resultados para los intervalos con $\Delta\phi$ = 1° para las diferentes dimensiones de malla al invertir la integral del GVG resultan mejor cuando se usa 0 padding (Tabla 6.28).

Tabla 6. 29: Resultados de la comparación en la obtención de N al aplicar la Inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT sin padding con regularización Tikhonov, densidad de la malla $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1°$.

Dimensión de malla	α	Estadística (m)		Correlación
		μ	σ	
10x10	$2x10^{-32}$	0.201	0.593	0.971
20x20	$4x10^{-32}$	0.112	0.362	0.991
30x30	$2x10^{-32}$	-0.056	0.300	0.994
40x40	$2x10^{-32}$	-0.017	0.263	0.996
50x50	$1x10^{-32}$	0.034	0.334	0.996
60x60	$9x10^{-33}$	0.050	0.338	0.996
70x70	$9x10^{-33}$	-0.007	0.315	0.997
80x80	$9x10^{-33}$	0.067	0.299	0.996
90x90	$2x10^{-32}$	-0.121	0.413	0.993

En la comparación anterior los resultados de los parámetros de regularización y correlación están en el orden de $9x10^{-33}$ a $1x10^{-32}$ y 0.971 a 0.997, respectivamente. Las desviaciones estándar y medias en general para todas las dimensiones de mallas están entre 26 cm a 59 cm y -7 mm a 0.20 cm, respectivamente. La siguiente Figura (6.27) muestra el comportamiento de la estadística para una malla de 90x90.

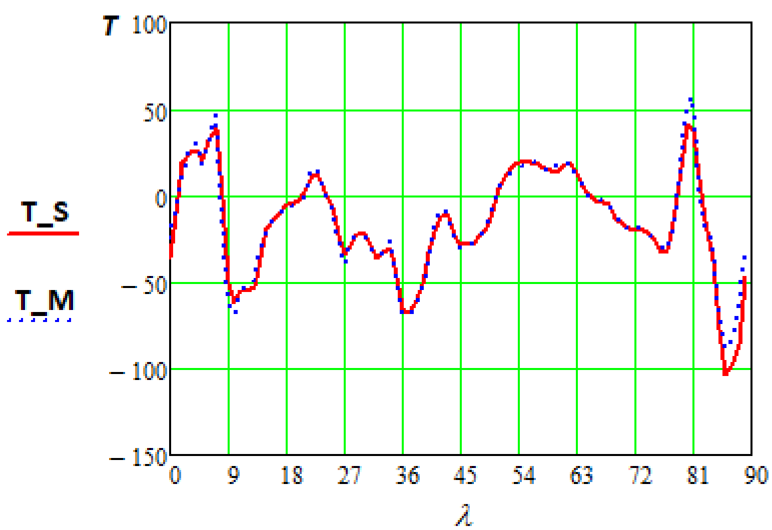

Figura 6. 27: Perfil de comparación de T en el meridiano central del proceso de inversión de la Integral del GVG por 1D-FFT aplicando regularización Tikhonov, con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 1°$ y dimensiones de 90x90 (sin padding) , unidades m^2/s^2.

Los resultados de la comparación de la malla de 90x90 anterior (Figura 6.27) tiene una media de -12 cm, una desviación estándar de 41 cm, correlación igual a 0.993, esto resulta con un parámetro de regularización de $2x10^{-32}$.

Las precisiones alcanzadas en la inversión de la integral del GVG empleando 1D-FFT con tres opciones diferentes de padding tienen ligeras variaciones entre sí, la mejor desviación estándar resulta de 5 cm para una malla de 10x10 donde se obtiene una media de 13 cm y correlación de 0.995 en este caso no se emplea padding, las precisiones para todas las configuraciones de mallas en general están en el orden de 5-69 cm. La mejor precisión que resulta se da para la configuración de malla con $\Delta\phi$ = 0.10° y dimensiones 10x10, mientras que la configuración que resulta con menor precisión es para una malla de 90x90, para los dos casos comentados anteriormente resultan sin emplear padding. Para las diferentes dimensiones de malla con $\Delta\phi$ = 0.25° las precisiones obtenidas están en el orden de 14-66 cm. Para el intervalo 0.50° la mejor precisión obtenida es de 22 cm, esto se da en dos casos para dimensiones de 70x70 de malla cuando se emplea padding y 0 padding, la más baja precisión obtenida (67 cm) con estos intervalos de separación (0.25°) se da en una malla con dimensiones 20x20 en la cual no se emplea padding. Por último, para las mallas con intervalos de 1°, la mejor precisión resulta de 26 cm, la cual se da en las 3 opciones de padding con dimensión 40x40 para los tres casos, la menor precisión resultante fue en la comparación de una malla de 10x10 sin padding (Tabla 6.29).

6.4. Error de interpolación

La misión satelital GOCE generó valores del Gradiente de Gravedad Vertical (*Trr*) a la altura del satélite y en forma dispersa en el sentido vertical y horizontal. En la evaluación e inversión de integrales esféricas y geodésicas como lo es la del GVG empleando técnicas de Fourier requiere que las mediciones tengan una distribución uniforme con respecto a la latitud y longitud. Por otro lado, los datos necesitan estar a una altura constante (*H*).

Para interpolar los datos de la misión GOCE a mallas uniformes de datos se puede aplicar el método de colocación por mínimos cuadrados (ecuación 5.20). Para este método la esfera terrestre es dividida en ventanas o trapecios geográficos. Para esto, es importante conocer cuál es la división que contiene al menos un dato en todas sus ventanas, o cuál es la división que contiene un número mínimo razonable de datos.

La Figura 6.28 muestra la trayectoria del satélite GOCE alrededor de la superficie terrestre para un mes de orbita donde el número de mediciones generadas para ese mes es de 974920, siendo el mes de febrero del año 2010 con *H = 259.504 km*.

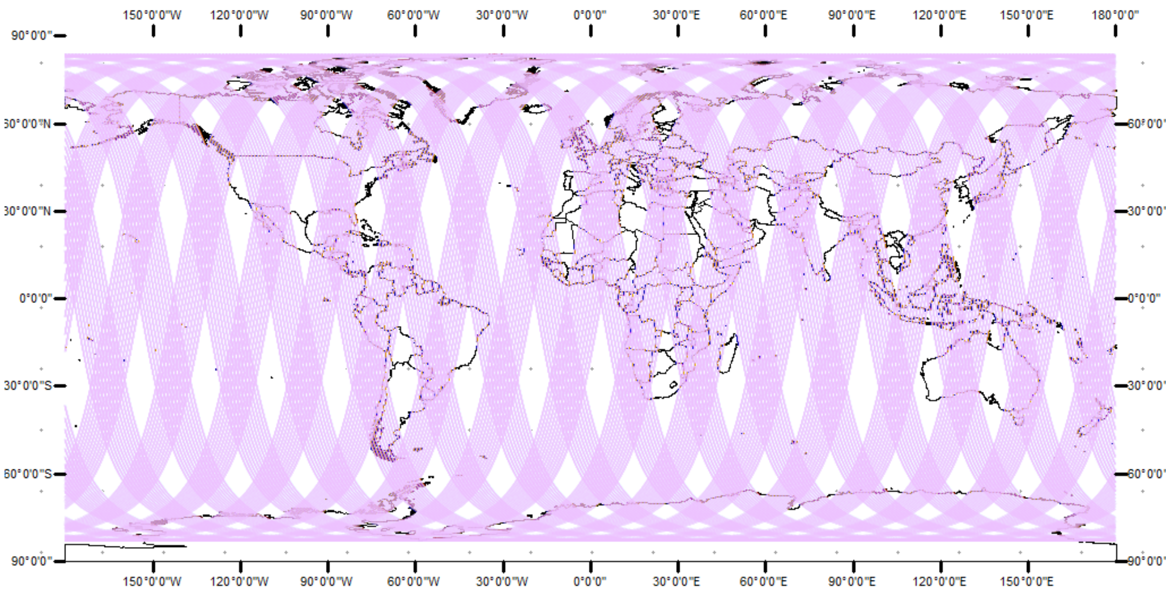

Figura 6. 28: Trayectoria orbital del satelite GOCE considerando el mes de febrero del año 2010.

La misión satelital GOCE en toda su duración logró en promedio 2302365 mediciones por mes, donde el mayor número de mediciones logradas por mes fue de 2678400 y el menor de 604800. En mallas de 10°x10° con intervalos de separación por ventana de 0.30° se observa que para 2 y 3 meses de datos todas las ventanas contienen al menos una medición, esto se da para latitudes de 30° y 60°. Los valores del *Trr* de la misión GOCE fueron comparados con los datos de *Trr* del modelo geopotencial EGM2008 (Figura 6.29).

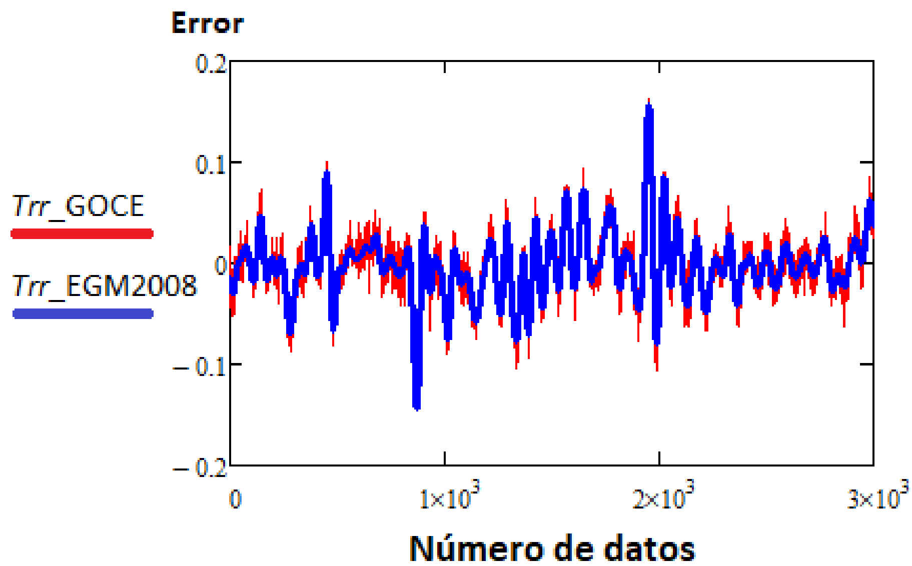

Figura 6. 29: Comparación del *Trr* entre valores generados por el satelite GOCE y el modelo geopotencial EGM2008, considerando el mes de abril del año 2010, unidades $1/s^2$.

En la gráfica anterior se presentan los valores del *Trr* obtenidos por la misión satelital GOCE y los correspondientes del modelo geopotencial EGM2008, la comparación es para los primeros 3000 valores del *Trr*. Las diferencias entre ellos tuvieron una media de 0.16 mili*E* (m*E*) y una desviación estándar de 12 m*E*.

6.5. Empleo de datos reales

La misión satelital geodésica GOCE generó mediciones del *Trr* en un periodo de 4 años, orbitó a una altura promedio de 252.9 km durante ese tiempo, obteniendo un total de 103606415 mediciones del *Trr*.

Un primer análisis se realizó para 2 meses de mediciones del satélite GOCE, donde fue necesario realizar una interpolación, la cual se realizó con el método de Colocación por Mínimos Cuadrados (CMC).

La configuración de mallado para un primer análisis fue la siguiente:

- Dimensiones de malla 10°x10°
- 441 ventanas
- Intervalo de las ventanas de los datos 0.5°
- Latitud inicial 30°
- Longitud inicial 0°

Se observa que para los meses de noviembre y diciembre del año 2009 (SOL1) no se encuentran ventanas vacías para la configuración anterior, por otro lado, las mediciones realizadas en el mes de mayo y junio del 2010 (SOL2) tampoco se encuentran ventanas vacías, por lo cual se realizó la comparación (Figura 6.30) del par de meses mencionados, en los cuales se encontró una altura promedio de 6637.7 km, en la siguiente gráfica se comparó el valor del *Trr* generado por la misión GOCE.

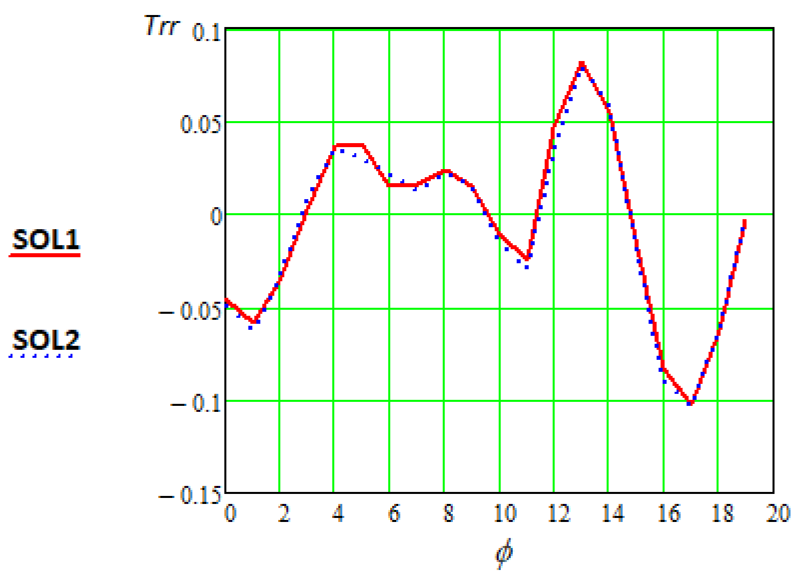

Figura 6. 30: Valores interpolados de *Trr* de la misión GOCE empleando CMC para ventana de datos de 0.5° en el meridiano $\lambda = 0°$, unidades $1/s^2$.

En la comparación bimensual anterior se encuentra una media de -0.65 m*E*, una desviación estándar de 4.1 m*E* y una correlación de 0.994.

Se realizó una comparación similar a la anterior (misma configuración de malla) usando datos del *Trr* de tres meses de mediciones de la misión satelital GOCE empleando los 4 años de datos. En el análisis de los conjuntos de valores *Trr* interpolados se encontraron valores de desviaciones estándar del orden de 3.7 a 14.6 m*E*, donde los mejores resultados estadísticos (Figura 6.31), resultaron en la comparación de los meses de mayo, junio y julio del 2011 (SOL3) comparado con agosto, septiembre y octubre del 2011 (SOL4) donde se emplea una altura promedio (*H*) de 259.48 km, resultando una media de 0.06 m*E*, desviación estándar de 3.7 m*E* y correlación de 0.997.

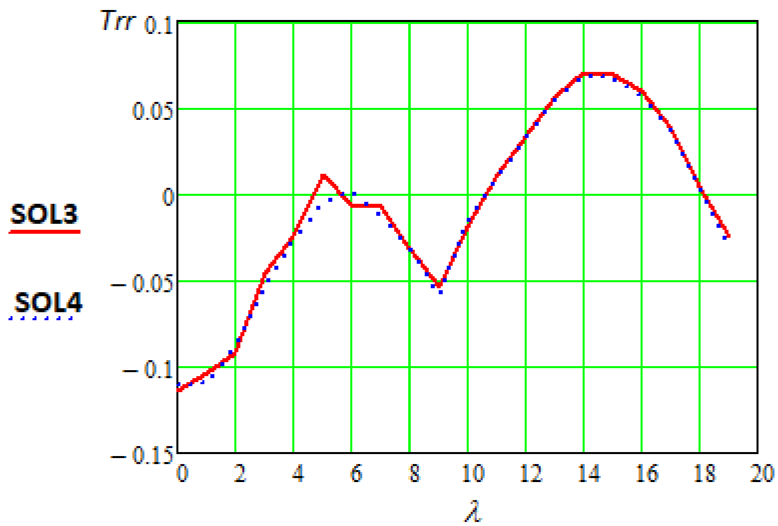

Figura 6. 31: Valores interpolados de *Trr* de la misión GOCE empleando CMC para ventana de datos de 0.5° en el paralelo $\phi = 30°$ a partir de tres meses de datos, unidades $1/s^2$.

En la mayoría de conjuntos de tres meses comparados se encuentran todas las ventanas generadas con al menos un dato de *Trr*, de los cuatro años, los pares de meses donde se observaron ventanas vacías son febrero, marzo y abril del 2010, de igual manera el conjunto de meses de agosto, septiembre y octubre del 2012 contienen ventanas vacías.

Para la misma configuración con $\Delta\phi = 0.25°$ se encuentra que son necesarios 7 meses de datos para no tener ventanas vacías en una malla de 10°x10°, en los 4 años de medición no se contienen ventanas vacías en conjuntos de 7 meses continuos a partir del primer mes de medición de la misión GOCE. En la siguiente Tabla (6.30) se muestran los resultados de las comparaciones estadísticas del conjunto de meses de los 4 años de medición de la misión GOCE, donde cada conjunto de datos son 7 meses de medición del *Trr*.

Tabla 6. 30: Comparación de conjuntos de meses de datos del valor *Trr* a partir de 7 meses de mediciones de la misión satelital GOCE con intervalos $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$.

Conjunto de datos	Estadística (m*E*)		Correlación
	μ	σ	
(1-7)-(8-14)	-0.068	4.946	0.995
(15-21)-(22-28)	-0.095	7.735	0.988
(29-35)-(36-42)	0.049	9.962	0.986
(29-35)-(39-45)	-0.168	5.879	0.996

Los resultados muestran la comparación estadística de 4 años de órbita del satélite GOCE a partir de 7 meses de mediciones, se comparan conjuntos de 7 meses donde los números entre paréntesis representan el conjunto de meses, por ejemplo (1-7) representa los primeros 7 meses de mediciones de la misión GOCE donde se tiene *H* = 259.505 km, en los resultados observamos que las medias son muy bajas, las cuales están entre los valores de 0.05 y -0.17 m*E*, por otro lado, la desviación estándar están en el orden de 4.946-9.946 m*E*. Las correlaciones de las comparaciones están entre 0.986 y 0.996. El resultado con mayor precisión se da en la comparación del primer conjunto de meses y el segundo conjunto (Figura 6.32), donde resulta una media de -0.07 m*E*, desviación estándar de 4.95 m*E* y una correlación de 0.995.

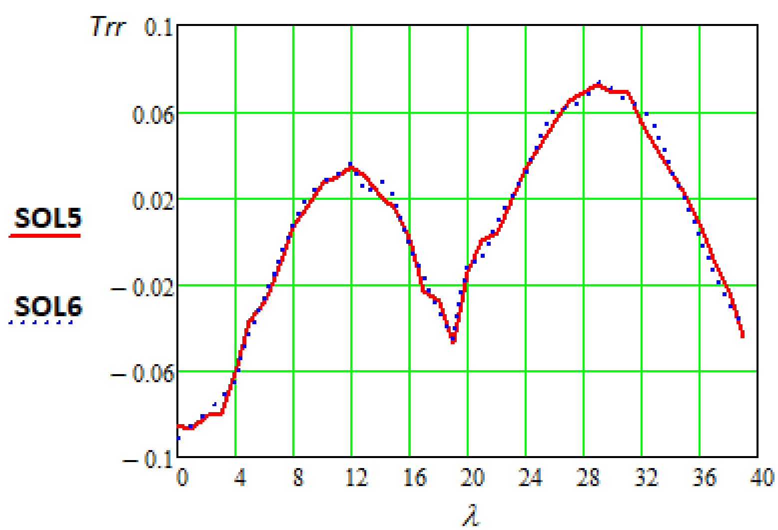

Figura 6. 32: Valores interpolados de *Trr* de la misión GOCE empleando CMC para ventana de datos de 0.25° en el paralelo $\phi = 30°$ a partir de 7 meses de datos, unidades $1/s^2$.

En la comparación anterior el primer conjunto de meses (SOL5) es de noviembre y diciembre del 2009, enero, febrero, marzo, abril y mayo del 2010 (conjunto de meses 1), el segundo conjunto (SOL6) son los meses de junio, octubre, noviembre y diciembre del 2010, enero y febrero del 2011 (conjunto de meses 2). A partir del Trr obtenido de la misión GOCE se aplica la inversión de la integral con 1D-FFT, donde se aplica el método de regularización Tikhonov de esta manera es posible obtener el potencial de perturbaciones (T). Primeramente, se hace la inversión de la integral del GVG con conjuntos de 3 meses de datos (Trr), estos valores se comparan con los T del modelo geopotencial EGM2008 (Tabla 6.31), los resultados están en m^2/s^2 que es la unidad de T. Los resultados de los parámetros de regularización obtenidos en la inversión con datos simulados son diferentes a los obtenidos con datos reales.

Tabla 6. 31: Comparación de valores de T, obtenidos de invertir la integral GVG empleando 1D-FFT con regularización Tikhonov ($\alpha = 6x10^{-29}$) a partir de valores Trr interpolados con 3 meses de datos reales a una malla de 10°x10° con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$, con los correspondientes valores del EGM2008.

Conjunto de datos	Estadística		Correlación
	μ	σ	
(1-3)-T_EGM2008	0.007	0.081	0.961
(7-9)-T_EGM2008	0.006	0.0824	0.959
(1-3)-(7-9)	0.0005	0.0082	0.999
(16-18)-T_EGM2008	0.0075	0.082	0.959
(19-21)-T_EGM2008	0.0069	0.082	0.959
(16-18)-(19-21)	0.0006	0.0083	0.999

En la comparación con T del modelo geopotencial EGM2008 se encuentran mejores resultados en dependencia del parámetro de regularización que se está utilizando, en los primeros tres meses comparados se encuentra un parámetro de regularización óptimo de $6x10^{-29}$, de igual manera se emplea el mismo parámetro de regularización para los demás meses analizados, los mejores resultados estadísticos al obtener T a partir de tres meses de datos Trr de GOCE comparando con T obtenido del modelo geopotencial EGM2008 (Figura 6.33) son encontrados para los meses (7-9) que corresponden a los meses de mayo, junio y octubre del 2010 con valores de 0.081 m^2/s^2 en desviación estándar, una media de 0.007 m^2/s^2 y una correlación de 0.961.

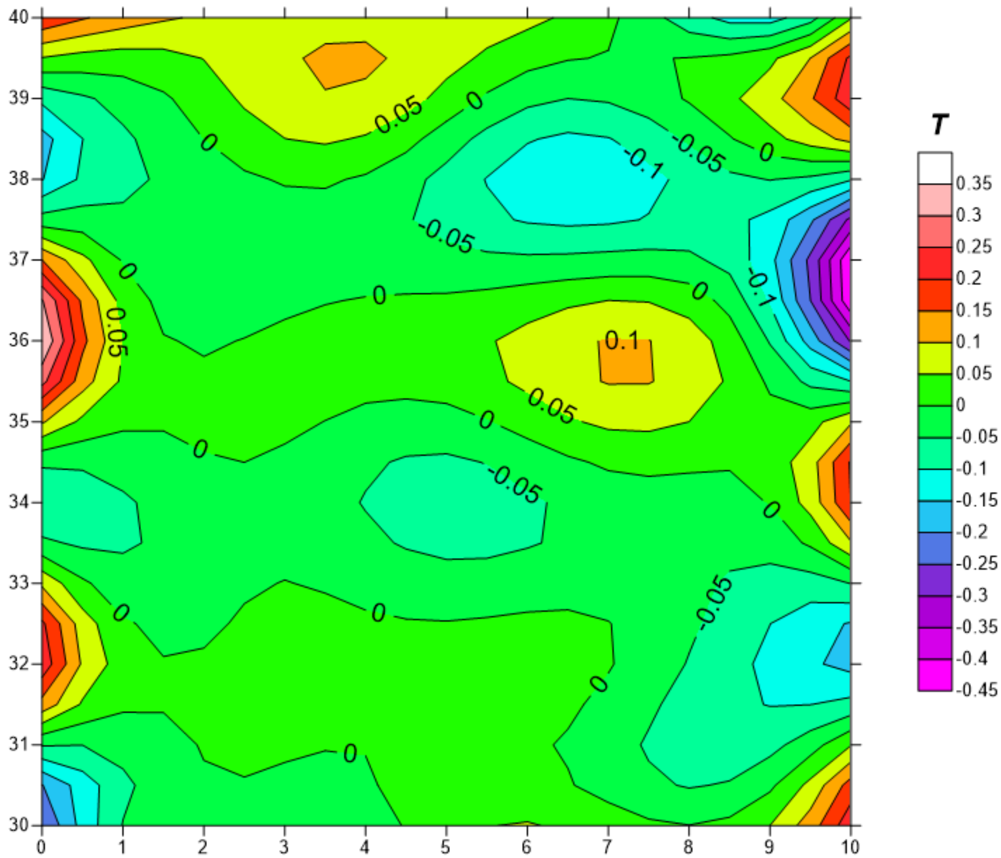

Figura 6. 33: Gráfica de error del potencial de perturbaciones *T* de mediciones generadas por el satelite GOCE a partir de 3 meses de datos Trr, comparado con *T* del modelo geopotencia EGM2008 (unidades m^2/s^2).

Se comparan entre si los datos *T* de la misión GOCE del conjunto de meses donde para los meses del 1 al 3 (SOL7) comparados con los meses (SOL8) del 7 al 9 (Figura 6.34) se obtienen resultados de una media de 0.0005 m^2/s^2, desviación estándar de 0.008 m^2/s^2 y correlación de 0.999.

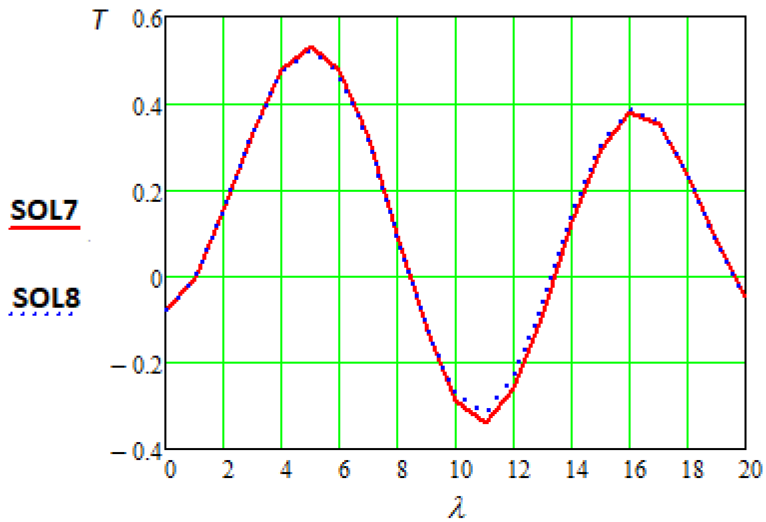

Figura 6. 34: Comparación del potencial de perturbaciones T de mediciones generadas por el satelite GOCE a partir de 3 meses de datos, correlación del paraleo central de dos conjunto de datos.

En un último análisis, se realiza la comparación de los valores de la altura geoidal (N) de conjuntos de datos de la misión GOCE (Trr) interpolados con 7 meses de datos reales, en una área de 10°x10°, donde se emplea un parámetro de regularización $\alpha = 3x10^{-28}$ y separación de mallas $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$. Se emplean 6 conjuntos de meses de datos de GOCE y se comparar entre sí. Los resultados se muestran a continuación.

Tabla 6. 32: Comparación de valores de N entre conjunto de valores Trr interpolados con 7 meses de datos reales a una malla de 10°x10° con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$, obtenidos de invertir la integral GVG empleando 1D-FFT con regularización Tikhonov ($\alpha = 3x10^{-28}$).

Conjunto de datos	Estadística (mm)		Correlación
	μ	σ	
(1-7)-(8-14)	-0.025	0.447	0.999
(15-21)-(22-28)	0.002	1.273	0.998
(29-35)-(36-42)	0.056	1.537	0.998

Las precisiones obtenidas de los conjuntos de datos comparados entre si van en el orden de 0.447-1.537 mm, con medias en el orden 0.003-0.056 mm y correlaciones que van de 0.998-0.999. En la Figura 6.35 se muestra la comparación del valor N de los conjunto de meses (29-35) que corresponden a los meses de junio, julio, agosto, septiembre, octubre, noviembre, diciembre del 2012 con el conjunto (36-42) que corresponden a los meses de enero, febrero, marzo, abril, mayo, junio y julio.

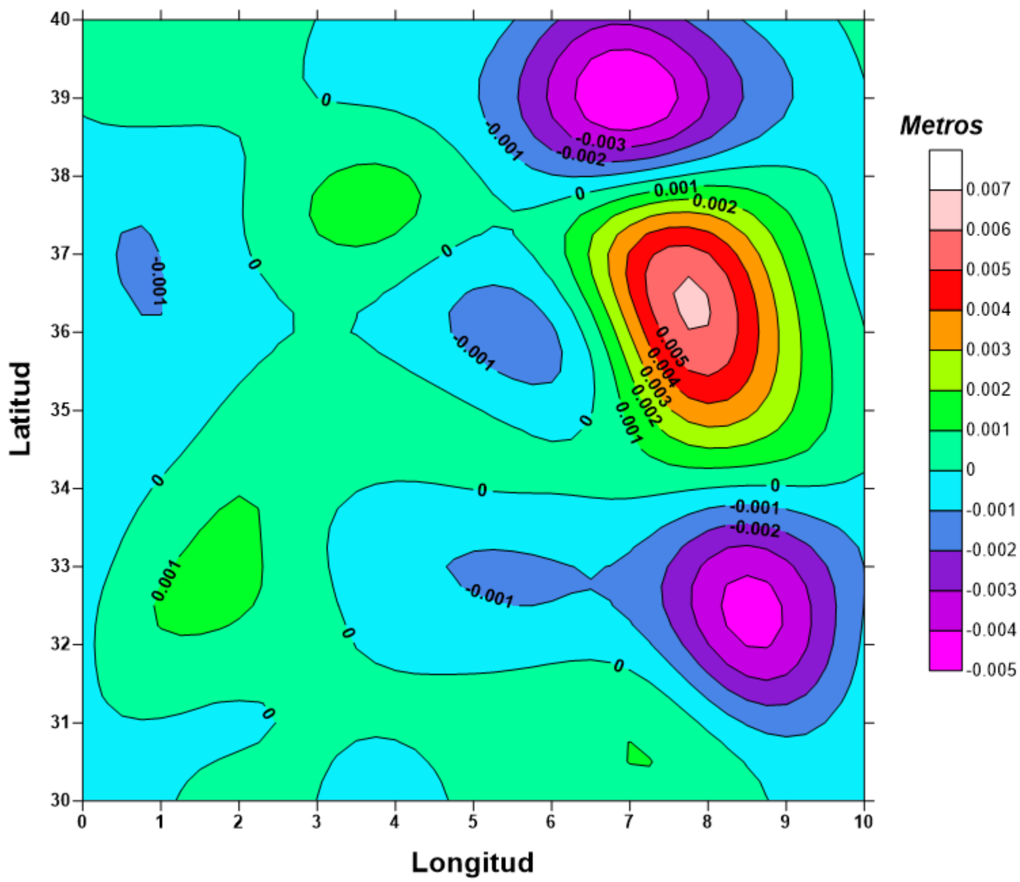

Figura 6. 35: Gráfica de error en la comparación de la altura geoidal (*N*) de dos conjuntos de datos de 7 meses del *Trr* obtenido por la misión GOCE con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ y una malla de 10°x10°, obtenidos de invertir la integral GVG empleando 1D-FFT con regularización Tikhonov.

Los resultados de la comparación de los conjuntos de datos tienen buena consistencia entre sí, resultan diferencias de alturas geoidales en el orden de 1 a 5 mm (Figura 6.35). La comparación que resulta con mejor precisión del análisis anterior (Tabla 6.32) es la de los primeros dos conjuntos de meses, resulta una precisión de 0.447 mm y media de -0.025.

7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

7.1. Conclusiones

En la inversión de la integral del GVG se alcanzaron distintas dimensiones de mallado en dependencia del método que se emplea para la inversión de dicha integral. Por un lado, cuando se aplicó la inversión con la integral directa la máxima dimensión de malla posible de invertir fue de 80x80 en este caso la matriz **A** asociada a la Ecuación (4.23) fue de dimensiones 6400x6400 con almacenamiento en memoria de 312 MB y un tiempo de inversión de 1 hora 23 minutos 7 segundos. Por otro lado, en la inversión aplicando 1D-FFT se obtuvieron mallas con dimensiones de 300x300 usando padding y 400x400 sin padding, siendo **A** de dimensiones 90000x90000 con almacenamiento en memoria de 823 MB y un tiempo de inversión de 3 minutos 26 segundos cuando se emplea padding. En el caso de no emplear padding **A** fue de 160000x160000 con almacenamiento de 976 MB y tiempo de inversión de 5 minutos. En el caso de emplear 2D-FFT, se logró extender hasta 2000x2000 usando padding siendo **A** de dimensiones 4000000x4000000 con almacenamiento de 102 MB con un tiempo de inversión de 34 segundos y 3000x3000 sin padding con **A** de 9000000x9000000 requiriendo 231 MB de almacenamiento y un tiempo de inversión de 1 minuto 50 segundos.

En la inversión de la integral del GVG con el método directo empleando datos simulados del modelo geopotencial EGM2008, de los distintos métodos de regularización utilizados se obtuvo un mejor resultado estadístico con el método de Descomposición de Valor Singular Amortiguado (DSVD, por sus siglas en inglés), donde se lograron precisiones del orden de 27-30 cm, para dimensiones de mallas de 60x60, 70x70 y 80x80 con separación de mallado 0.20°, 0.25° y 0.30°, obteniendo parámetros de regularización entre $8x10^{-36}$ y $5x10^{-34}$ en los métodos de regularización Tikhonov y DSVD. Las medias obtenidas en la comparación con datos simulados aplicando esta metodología en general para todas las configuraciones analizadas fueron del orden de 47 cm a 1 mm. Por otro lado, el tiempo de inversión resultó menor cuando se aplicó el método de regularización Tikhonov.

Al utilizar 1D-FFT en la inversión de la integral del GVG se empleó regularización Tikhonov para distintas configuraciones de mallas con intervalos ($\Delta\phi = \Delta\lambda$) de 0.10°, 0.25°, 0.50° y 1°, y se obtuvieron desviaciones estándar del orden de 5 a 69 cm, empleando parámetros de regularización entre $95x10^{-34}$ y $4x10^{-27}$. Al emplear 1D-FFT se obtuvieron mejores resultados en las comparaciones realizadas con la inversión usando padding.

Comparando los resultados de los métodos de inversión del GVG empleando la Integral directa y 1D-FFT con el método de regularización Tikhonov, se lograron precisiones del orden de 29 a 39 cm y 31 a 35 cm, respectivamente. Esto para una configuración de mallado de $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ con dimensiones de 60x60, 70x70 y 80x80. En el caso de emplear regularización DSVD en la inversión en modo directo se obtuvieron precisiones del orden de 27 a 30 cm.

En la interpolación de los datos a mallas regulares se empleó el método de CMC donde se aplicó la configuración de dimensiones de malla de 10°x10°, latitud inicial 30° y longitud inicial 0° con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.50°$, encontrando que se requieren al menos 3 meses de datos *Trr* para no tener ventanas vacías, resultando desviaciones estándar del orden de 3.7 a 14.6 m*E*, los mejores resultados estadísticos fueron para los meses de mayo, junio y julio del 2011, comparados con los meses de agosto, septiembre y octubre del 2011, con una altura promedio *H* = 259.48 km, resultando una media de 0.06 m*E*, desviación estándar de 3.7 m*E* y correlación de 0.997. Por otro lado, con la misma configuración anterior con intervalos de $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$ en la interpolación, se requieren 7 meses de datos de la misión para no encontrar ventanas vacías, resultando en la comparación desviaciones estándar del orden de 4.946 a 9.996 m*E*. En la comparación de conjunto de valores *Trr* interpolados con 7 meses de datos el resultado con mayor precisión se obtuvo al comparar los dos conjuntos de meses iniciales, resultando una media de -0.07 m*E*, desviación estándar de 4.95 m*E* y correlación de 0.995 empleando una altura promedio de *H* = 259.505 km.

Al invertir la integral del GVG con el método 1D-FFT usando conjuntos de 7 meses de mediciones (*Trr*) de la misión satelital GOCE. Se obtuvo la altura geoidal (*N*) con precisiones del orden de 0.45-1.54 mm, al comparar los 6 conjuntos de datos interpolados con el método de colocación por mínimos cuadrados. Esto fue para un área de 10°x10° con $\Delta\phi = \Delta\lambda = 0.25°$, latitud inicial de 30° y longitud inicial de 0°.

7.2. Recomendaciones

Como trabajo futuro se propone comparar alturas geoidales obtenidas a partir de datos de la misión GOCE con alturas geoidales determinadas a partir de modelos geopotenciales precisos para verificar la consistencia entre los resultados. Se recomienda hacer un análisis de los datos de la misma misión GOCE en áreas específicas, por ejemplo México donde se encuentra gran cantidad de información geodésica y posteriormente realizar el análisis de precisión correspondiente. Probar diferentes métodos de regularización en la determinación de alturas geoidales al emplear 1D-FFT en la inversión de la integral del GVG.

Por otro lado, se recomienda trabajar con datos de la misión satelital GRACE para dar solución al geoide en un área local o regional y realizar el respectivo análisis de precisión. Por último, se recomienda investigar sobre otros métodos de interpolación de funciones esféricas.

REFERENCIAS

- Barthelmes, F. y Köhler, W., (2016). International Center for Global Earth Models (ICGEM), in: Drewes, H., Kuglitsch, F., Adám, J. et al., The Geodesist Handbook 2016, Journal of Geodesy (2016), 90(10), pp. 907-1205, doi: 10.1007/s00190-016-0948-z.
- Bernard, A., y Touboul, P. (1989). Spaceborne gradiometer-Its principle and status of development. *NASA STI/Recon Technical Report A*, *90*.
- Bertero, M., y Boccacci, P. (1998). *Introduction to inverse problems in imaging*. CRC press.
- Bouman, J., y Koop, R. (1997). Quality differences between Tikhonov regularization and generalized biased estimation in gradiometric analysis. *DEOS Progress Letters*, *97*(1), 42-48.
- Bouman, J. (1998). Quality of regularization methods. *DEOS Report 98.2*.
- ESA, G. F. (1999). Steady-State Ocean Circulation Mission: Report for mission selection. *ESA SP*, *1233*(1).
- Brigham, E. O., y Brigham, E. O. (1988). *The fast Fourier transform and its applications* (Vol. 448). Englewood Cliffs, NJ: prentice Hall.
- Fischer, D., y Michel, V. (2013). Inverting GRACE gravity data for local climate effects. *Journal of Geodetic Science*, *3*(3), 151-162.
- García, R. V. (2002). Local geoid determination from GRACE mission. *Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Sciences, The Ohio State University, Columbus, Report*, *460*.
- Gatti, A., M., Reguzzoni, F., Migliaccio, F., Sansò. (2016).Computation and assessment of the fifth release of the GOCE-only space-wise solution: Presented at the 1st Joint Commission 2 and IGFS Meeting, 19-23 September 2016, Thessaloníki, Greece.
- Guzmán, G. (2008). Análisis de la Determinación del Potencial Mediante el Principio del Balance de Energía (tesis de maestría en ciencias geodésicas). Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, Sinaloa. (p. 66-74)
- Gerlach, C., Földvary, L., Švehla, D., Gruber, T., Frommknecht, B., Oberndorfer, H., y Steigenberger, P. (2003). A CHAMP-only gravity field model from kinematic orbits

using the energy balance approach. *Poster presented at EGS-AGU-EUG Joint Assembly*, 06-11.

- Haagmans, R., De Min, E., y Van Gelderen, M. (1993). Fast evaluation of convolution integrals on the sphere using 1D FFT, and a comparison with existing methods for Stokes' integral. *Manuscripta geodaetica*, *18*(5), 227-227.
- Hansen, P. C., y O’Leary, D. P. (1993). The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, *14*(6), 1487-1503.
- Hansen, P. C., y O’Leary, D. P. (1997). Regularization algorithms based on total least squares. In *Recent Advances in Total Least Squares Techniques and Errors-in Variables Modeling: Proceedings of the Second International Workshop on Total Least Squares Techniques and Errors-in Variables Modeling, SIAM, Philadelphia* (p. 127-137).
- Hanke, M. (1995). *Conjugate gradient type methods for ill-posed problems.* (Vol. 327). CRC Press.
- Heiskanen, W. A., y Moritz, H. (1967). Physical geodesy. *Bulletin Géodésique (1946-1975), 86*(1), 491-492.
- Hofmann-Wellenhof, B., y Moritz, H. (2006). *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media.
- Ilk, K. H. (1993). Regularization for high resolution gravity field recovery by future satellite techniques. *MATHEMATICAL RESEARCH*, *74*, 189-189.
- Jekeli, C., y Upadhyay, T. N. (1990). Gravity estimation from STAGE, a Satellite-to-Satellite Tracking Mission. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, *95*(B7), 10973-10985.
- Jekeli, C. (2009). Fourier geodesy. *Lecture notes, Department of Civil Environmental Engineering and Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio*.
- Jansson, P. A. (1997). Deconvolution of images and spectra. *Deconvolution of images and spectra, by Jansson, PA. Academic Press, San Diego, CA (USA), 1997, XIV+ 514 p., ISBN 0-12-380222-9*.

- Kabanikhin, S. I. (2008). Definitions and examples of inverse and ill-posed problems. *Journal of Inverse and Ill-Posed Problems*, *16*(4), 317-357.
- Keating, T., Taylor, P., Kahn, W., y Lerch, F. (1986). Geopotential research mission, science, engineering and program summary, NASA Technical Memorandum 86240.
- Lagendijk, R. L., y Biemond, J. (1991). Iterative identification and restoration of images. *The Kluwer International Series in Engineering and Computer Science, Boston: Kluwer, 1991*.
- Liu, X., y Wu, X. (2015). Construction of Earth's gravitational field model from CHAMP, GRACE and GOCE data. *Geodesy and Geodynamics*, *6*(4), 292-298.
- Martín, A., y Padín, J. (2003). Geodesia Física: material de prácticas. *Ed. UPV, València*.
- Martinec, Z. (2003). Green's function solution to spherical gradiometric boundary-value problems. *Journal of Geodesy*, *77*(1), 41-49.
- Meinesz, V. (1928). Gravity survey by submarine via Panama to Java. *The Geographical Journal*, *71*(2), 144-156.
- Moritz, H. (1980). Advanced physical geodesy. *Advances in Planetary Geology*.
- Morozov, V. A. (1984). Methods for solving incorrectly posed problems.
- Newton, I. (1687). Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, Vol. 3, S. *Pepys, London*, 419.
- Oran Brigham, E. (1988). The fast Fourier transform and its applications. *UK: Prentice Hall*.
- Pail, R., Goiginger, H., Mayrhofer, R., Schuh, W. D., Brockmann, J. M., Krasbutter, I., y Fecher, T. (2010). GOCE gravity field model derived from orbit and gradiometry data applying the time-wise method. In *Proceedings of the ESA living planet symposium* (Vol. 28). European Space Agency Bergen, Norway.
- Pail, R., Bruinsma, S., Migliaccio, F., Förste, C., Goiginger, H., Schuh, W. D., y Veicherts, M. (2011). First GOCE gravity field models derived by three different approaches. *Journal of Geodesy*, *85*(11), 819.
- Pail, R. y G. Plank (2003). "GOCE Gravity Field Processing Strategy." Studia Geophysica et Geodaetica.

- Rummel, R., Schwarz, K. P., y Gerstl, M. (1979). Least squares collocation and regularization. *Bulletin Geodesique*, *53*(4), 343-361.
- Rummel, R. (1979). Determination of short-wavelength components of the gravity field from satellite-to-satellite tracking or satellite gradiometry-an attempt to an identification of problem areas. *Manuscripta Geodetica*, *4*(2), 107-148.
- Schwarz, K. P. y M. Gerstl (1979). "Least Squares Collocation and Regularization."
- Schwarz, K. P., y Kryński, J. (1977). Improvement of the geoid in local areas by satellite gradiometry. *Journal of Geodesy*, *51*(3), 163-176.
- Seeber, G. (2003). *Satellite geodesy: foundations, methods, and applications*. Walter de Gruyter.
- Schuh, W. (1996). Tailored numerical solution strategies for the global determination of the earth's gravity field. Technical Report Folge 81, Mitteilungen der geodätischen Institute der Technischen Universität Graz.
- Sjogren, W. L., Wimberly, R. N., y Wollenhaupt, W. R. (1974). Lunar gravity via the Apollo 15 and 16 subsatellites. *The Moon*, *9*(1-2), 115-128.
- Sjöberg, L. (2012). Solutions to Linear Inverse Problems on the Sphere by Tikhonov Regularization, Wiener filtering and Spectral Smoothing and Combination-A Comparison. *Journal of Geodetic Science*, *2*(1), 31-37.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Torge, W. (2001). Geodesy. Third completely revised and extended edition. Walter de Gruyter. Berlin, Germany. (p. 55-57).
- Vinod, H. y UlIah, A. (1981). *Recent advances in regression methods*. Marcel Dekker.
- Vonbun, F. O., Kahn, W. D., Argentiero, P. D., y Koch, D. W. (1977). Spaceborne earth applications ranging system/SPEAR. *Journal of Spacecraft and Rockets*, *14*(8), 492-495.
- Xu, P. (1992b). The value of minimum norm estimation of geopotential fields. *Geophysical Journal International*, 111, 170- 178.