

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y EL ESPACIO
FACULTAD DE INFORMÁTICA CULIACÁN
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN



ANÁLISIS DE CONFIABILIDAD DE UNA BASE GEODÉSICA
GNSS
TESIS

QUE COMO REQUISITO PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO DE CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

PRESENTA:

MARTÍN CARRILLO CHÁVEZ

DIRECTORES DE TESIS:

DR. RAMÓN VICTORINO GARCÍA LÓPEZ

DR. GUADALUPE ESTEBAN VÁZQUEZ BECERRA

CULIACÁN, SINALOA. FEBRERO DE 2018

AGRADECIMIENTOS

A mi familia por todo su apoyo, en especial a mi madre y hermanas por su paciencia y comprensión durante este periodo de formación.

Al Dr. Guadalupe Estaban Vázquez Becerra y Dr. Ramón Victorino García López por su apoyo incondicional y ser una guía desde el comienzo de este trabajo de investigación y por su apoyo durante todo el proceso hasta la culminación del mismo.

Al posgrado de Ciencias de la Información de la Universidad Autónoma de Sinaloa por brindarme la oportunidad de realizar mis estudios de maestría.

A toda la planta docente y personal administrativo del posgrado; Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio y la Facultad de Informática Culiacán.

A mis compañeros del posgrado, que siempre me brindaron su apoyo.

A mis amigos, que siempre han estado ahí en los buenos momentos para compartir y celebrar pequeños triunfos, en la adversidad para brindar palabras de aliento y enseñarme a ser una persona resiliente.

A la Universidad Autónoma de Sinaloa.

A CONACyT por el apoyo financiero.

INDICE

CAPÍTULO I INTRODUCCIÓN	1
1.1 Planteamiento del problema	1
1.2 Antecedentes	2
1.3 Justificación	4
1.4 Objetivos	5
1.4.1 Objetivo general	5
1.4.2 Objetivos particulares	5
CAPITULO II MARCO TEÓRICO	6
2.1 Distribuciones de probabilidad	6
2.1.1 Distribución normal.....	6
2.1.2 Distribución chi-cuadrada χ^2	8
2.1.3 Distribución Student t	9
2.1.4 Distribución Fisher F	10
2.2 Tipos de errores en las mediciones geodésicas	11
2.2.1 Errores sistemáticos.....	11
2.2.2 Errores aleatorios	12
2.2.3 Errores accidentales (outliers).....	12
2.2.4 Outliers.....	13
2.2.4.1 Outlier único.....	14
2.2.4.2 Máximo EMD para un outlier	15
2.3 Modelo Paramétrico Gauss-Markov	16
2.4 Pruebas estadísticas	17
2.4.1 Prueba global para la varianza de referencia.....	17
2.4.2 Determinación total de errores en los vectores medidos.....	19
2.4.3 Determinación de errores por componentes	20
2.4.4 Determinación de errores con base a la prueba de τ	22
2.4.5 Determinación de errores de acuerdo a la teoría de Baarda.....	23
2.4.6 Estadísticas para detección de múltiples outliers	28
2.5 Estabilidad en la inversión de la matriz de ecuaciones normales N	30
2.6 Análisis de confiabilidad	31
2.6.1 Hipótesis nula e hipótesis alternativa	31

2.6.2 Tipos de errores en test estadísticos.....	33
2.6.3 Confiabilidad interna.....	33
2.6.4 Confiabilidad externa.....	34
2.7 Robustez	35
2.7.1 Descripción de deformación de una red.....	36
2.8 Sistemas GNSS	40
2.8.1 Observables	41
2.8.1.1 Medidas de código.....	42
2.8.1.2 Medidas de fase	42
2.8.2 Tipos de posicionamiento.....	43
2.8.2.1 Diferencias simples.....	44
2.8.2.2 Diferencias dobles	44
2.9 Sistemas de coordenadas	46
2.9.1 Coordenadas geodésicas.....	46
2.9.2 Coordenadas espaciales geocéntricas.....	47
2.9.3 Coordenadas espaciales topocéntricas.....	48
2.9.4 Transformación de coordenadas.....	49
2.9.4.1 Geodésicas – Geocéntricas.....	49
2.9.4.2 Geodésicas – Topocéntricas	50
CAPITULO III MATERIALES Y METODOS	51
3.1 Materiales	51
3.1.1 Equipo geodésico utilizado.....	51
3.1.2 Programas de cómputo utilizado	52
3.1.2.1 Topcon Tools.....	52
3.1.2.2 Fortran90	53
3.2 Métodos	54
3.2.1 Modelo matemático para el ajuste de redes geodésicas con técnicas de medición GNSS.....	54
3.2.1.1 Modelo matemático	54
3.2.1.2 Ecuaciones de observación	55
3.2.1.3 Matriz A	57
3.2.1.4 Vector de observaciones	57
3.2.1.5 Vector de parámetros.....	58
3.2.1.6 Matriz de varianza de las observaciones	58

CAPITULO IV PRUEBAS NUMÉRICAS	60
4.1 Descripción de pruebas	60
4.2 Prueba estadística con la varianza de referencia de una red geodésica regular	60
4.2.1 Prueba global	63
4.2.2 Detección de outliers.....	64
4.2.3 Confiabilidad interna.....	65
4.2.4 Confiabilidad externa.....	66
4.3 Análisis de confiabilidad de una base geodésica	70
4.3.1 Análisis de estabilidad.....	71
4.3.2 Confiabilidad interna.....	76
4.3.3 Confiabilidad externa.....	83
4.4 Análisis de precisión de georeferenciación de la base geodésica GNSS	84
CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	90
5.1 Conclusiones	90
5.2 Recomendaciones	92
BIBLIOGRAFIA	93

INDICE DE FIGURAS

Figura 2.1: Función de Gauss en términos de x, c	7
Figura 2.2 Distribución χ^2 con parámetro de no centralidad (λ_0). Tomada de (Knight et al., 2010).	9
Figura 2.3: Estrategia propuesta para la detección de outliers y eliminación de errores graves (Kuang, 1996).	26
Figura 2.4: Esquemas representativos de diferencias de fases.	44
Figura 2.5: Esquema representativo de diferencias dobles de fase.	45
Figura 2.6: Sistema de coordenadas para el elipsoide.	46
Figura 2.7: Representación gráfica de la latitud geocéntrica ψ	47
Figura 2.8: Sistema de coordenadas local y rectangular espacial. Tomada de (Rapp, 1985).	48
Figura 3.1: Receptor geodésico doble frecuencia Geomax Zenith 25	51
Figura 3.2: Interfaz gráfica del programa en Fortran para realizar el análisis de confiabilidad donde se puede apreciar el menú disponible.	54
Figura 3.3 Representación gráfica de los tres casos para las ecuaciones de observación para los vectores medidos de una red geodésica GNSS.	56
Figura 4.1: Red geodésica regular establecida con mediciones GNSS en la ciudad de Culiacán.	61
Figura 4.2: Residuos de las mediciones de la red geodésica GNSS.	62
Figura 4.3: Representación gráfica de la detección de outliers de la red geodésica GNSS regular.	65
Figura 4.4: Errores Mínimos Detectables de la red geodésica regular.	66
Figura 4.5: Efectos de los Errores Mínimos Detectables en las coordenadas de los puntos de la red geodésica. Con $\mu = 0.012m$ y $\sigma = 0.007m$	67
Figura 4.6: Precisión horizontal, vertical y total de los puntos por determinar de la red geodésica regular antes de eliminar los outliers. Con $\mu_H = 0.006m$, $\mu_T = 0.007m$, $\sigma_H = 0.003m$ y $\sigma_T = 0.003m$	68
Figura 4.7: Precisión horizontal, vertical y total de los puntos por determinar de la red geodésica regular después de eliminar los outliers detectados. Con $\sigma_H = 0.048m$, $\sigma_V = 0.029m$ y desviación estándar promedio $\sigma = 0.038m$	69
Figura 4.8: Residuos de las mediciones después de eliminar los posibles outliers detectados en la red geodésica regular. Con $\hat{\sigma}_0^2 =$, $n = 68$, $m = 24$ y $r = 44$...	70
Figura 4.9: Esquema representativo de las bases geodésicas GNSS medidas.	72

Figura 4.10: Comparación de precisión nominal y procesado de las bases geodésicas GNSS.	73
Figura 4.11: Comparación de precisión de procesado y ajuste de las bases geodésicas GNSS.	74
Figura 4.12: Precisión y Error Relativo de las bases geodésicas GNSS.	75
Figura 4.13: Redundancia de las bases geodésicas GNSS.	76
Figura 4.14: Redundancia de las bases geodésicas GNSS con dos puntos de control.	77
Figura 4.15: Redundancia de las bases geodésicas GNSS con un punto de control.	77
Figura 4.16: Error Global Mínimo Detectable de las bases geodésicas GNSS.	78
Figura 4.17: Error global mínimo detectable de la base de 55 km en función del tiempo de medición.	79
Figura 4.18: Error global mínimo detectable de la base de 345 km en función del tiempo de medición.	79
Figura 4.19: Error Mínimo Detectable por cada observación de las bases geodésicas GNSS procesadas con efemérides transmitidas.	80
Figura 4.20: Error Mínimo Detectable por cada observación de las bases geodésicas GNSS procesadas con efemérides precisas.	81
Figura 4.21: Error mínimo detectable por cada observación para la base geodésica GNSS de 55 km en función del tiempo.	82
Figura 4.22: Error mínimo detectable por cada observación para la base geodésica GNSS de 55 km en función del tiempo con dos puntos de control.	83
Figura 4.23: Efecto en las coordenadas causados por los Errores Mínimos Detectables en las bases geodésicas GNSS.	83
Figura 4.24: Sesión 1 hora: Comparación de precisión (total) de bases GNSS con efemérides precisas y transmitidas.	85
Figura 4.25: Sesión 2 horas: Comparación de precisión total de bases geodésicas GNSS con efemérides precisas y transmitidas.	86
Figura 4.26: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides precisas.	86
Figura 4.27: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides transmitidas.	87
Figura 4.28: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides precisas en sesión de 4 horas y 2 horas.	87
Figura 4.29: Varianza de referencia de las bases GNSS medidas.	88
Figura 4.30: Numero de condición de la matriz N en función de la distancia.	88

INDICE DE TABLAS

Tabla 2.1 Tipos de errores en pruebas estadísticas. Tomada de (Lehmann, 2013).	33
Tabla 3.1 Precisiones de receptores geodésicos doble frecuencia utilizados según fabricante (Carrillo, 2015). Utilizados en las mediciones de la red geodésica regular y bases.....	52
Tabla 3.2: Formato de archivo con vectores exportados de una red geodésica procesados por Topcon Tools.	53
Tabla 4.1 Coordenadas resultantes del programa Topcon Tools de la red geodésica regular con distancias promedio de 5 km (ver Figura 4.1).	62
Tabla 4.2: Resultados de detección de outliers de la red geodésica por el método de Baarda.....	64
Tabla 4.3 Distancias al punto de referencia y tiempo de medición de las bases geodésicas GNSS medidas.....	71

RESUMEN

Actualmente el establecimiento de del apoyo geodésico a los levantamientos topográficos y cartográfico se lleva a cabo principalmente mediante mediciones de los Sistemas Globales de Navegación Satelital (GNSS). En la presente tesis se realizó un estudio sobre la confiabilidad interna y externa de bases geodésicas con diferentes distancias con respecto al vértice de referencia. Las distancias consideradas fueron de 500 m a 350 km. Para las bases medidas, que fueron aproximadamente de 500 m de longitud, el vértice de referencia empleado fue el CULC de la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA). Con el propósito de probar los algoritmos matemáticos propuestos se utilizó una red regular de ocho puntos, con distancias promedio de cinco kilómetros. En la sesión de medición de dicha red se generaron veinticuatro líneas base entre los puntos. Las mediciones fueron procesadas con el programa Topcon Tools, exportándose las componentes vectoriales sin ser ajustadas por mínimos cuadrados. Se encontró una relación entre los residuos “grandes” de las mediciones y la detección de posibles outliers por el método de Baarda. Los efectos máximos en las coordenadas causados por los Errores Mínimos Detectables (EMD) tuvieron los valores más pequeños donde hubo los mayores EMD. Antes de eliminar los outliers detectados existe una similitud entre la precisión horizontal y total de la red geodésica con errores mayores a **10 cm**. Después de eliminar los posibles outliers la precisión mejoró con errores asociados menores a dicho valor. En el caso de las bases medidas, los residuos de las mediciones fueron similares (orden del milímetro) para cada una, a excepción de la base de 300 y 345 km de distancia que fueron mayores (niveles centimétricos). Al aplicar las pruebas estadísticas a cada base GNSS no se detectó ningún outlier. La precisión horizontal, vertical y total resulto con errores menores a 5 cm, solo bajó su precisión superando los 5 cm para la base de 300 y 345 km de distancia del punto de control. Con respecto al Error Global Mínimo Detectable, este aumento en función de la distancia de la base al punto de referencia. Los efectos en las coordenadas causados por los EMD en las bases, se mantuvo uniforme para el efecto mínimo, mientras que los efectos máximos presentaron un incremento de acuerdo a la distancia de las bases al punto de referencia.

ABSTRACT

At present, the establishment of the geodesic support of the surveying and mapping projects, it is performed mainly by the use of the Global Navigation Satellite Systems (GNSS). For this thesis an study about the internal and external reliability of a geodetic base-line is performed considering several distances with respect to the reference station. These distances ranged from 500 m to 350 km. All the measured baselines were of about 500 m of length, being CULC of the INEGI National Active Geodetic Network the reference station (RGNA). For the purpose of testing the algorithms and programs elaborated, a 8 points regular urban network was employed, with main sides on 5 km. On this network 24 baselines were measured, the data generated was processed by the Topcon Tools program. The vectors were exported without being adjusted y least squares. A relationship was found among the larger measurement residuals and the possible outlier detection by Baarda's method. The maximum effects on coordinates produced by the Minimum Detectable Errors (MDE), showed the smallest values were the largest MDE were present. Before eliminating the detected outliers, the horizontal and total precisions were similar, having errors larger than 10 cm. After the removal of outliers, the precisions improved to a sub- decimeter level. With respect to the measured baselines, the residuals obtained were similar for most of them (at the mm level), excepting the baselines of 300 and 345 km away from the reference station, which had residuals at the cm level. No outlier was detected by the statistical test on any of the baselines. The total precisions of the baselines were better than 5 cm, excepting the baselines with 300 and 345 km distance from the reference station. It was found that the Global Minimum Detectable Error augmented with the separation of the reference station. The effects on the coordinates produced by the MDE were regular for the minimum effect value. While for the maximum effect value, they were getting larger with respect to the distance of the reference station.

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1.1 Planteamiento del problema

Actualmente el establecimiento de redes geodésicas se realiza principalmente mediante mediciones con los Sistemas Globales de Navegación Satelital (GNSS). Al igual que cualquier método geodésico de posicionamiento, las mediciones u observaciones asociadas son afectadas por una serie de errores sistemáticos, aleatorios y graves (outliers). Para dar solución a las coordenadas de los vértices o puntos por determinar se emplean métodos de ajuste matemático basados en el principio de los mínimos cuadrados con el propósito de obtener la mejor solución posible. Aunado al ajuste matemático se realizan tests estadísticos a fin de detectar la presencia de errores no aleatorios (errores graves) en las observaciones. El procedimiento para la detección de errores graves fue propuesto por Baarda (1968) y es conocida como la teoría de confiabilidad.

En la práctica geodésica los levantamientos cartográficos y topográficos son georeferenciados mediante el establecimiento de una línea base geodésica empleando tecnología GNSS. A su vez dichas bases son ligadas a estaciones GNSS permanentes que no pocas veces se encuentran relativamente alejadas del área del levantamiento. En nuestro país por ejemplo, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía (INEGI) mantiene la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA) cuyos vértices tienen una separación promedio de 500 km.

Esto genera una configuración geométrica-geodésica muy irregular requiriéndose un cuidado especial en el procedimiento de medición con el fin de mantener los niveles de precisión aceptables para la determinación de coordenadas. Para ello también se requiere realizar el análisis estadístico de confiabilidad de la red.

Además, las exigencias que se presentan en el área de la ingeniería y en el control de obras es necesario, por ejemplo, establecer una base geodésica GNSS para obtener coordenadas de alta precisión, en algunos casos hasta el

nivel del milímetro y así asegurar que se cumplan las precisiones requeridas en la planimetría del proyecto. De ahí surge la necesidad de realizar un proceso riguroso para la detección de outliers y realizar el ajuste para obtener una solución confiable a las coordenadas de los vértices de control.

1.2 Antecedentes

El análisis estadístico en las redes geodesicas con el fin de mejorar su confiabilidad fue iniciada por Baarda (1968) y Pope (1776). Baarda propuso asumir el factor de la varianza de peso unidad del modelo lineal, como conocido. Pope considera que no existen errores del tipo II y hace uso de la varianza a posteriori por unidad de peso.

Se han elaborado trabajos de tesis que han aplicado diversos tests estadísticos, como por ejemplo Snow (2002), Medina (2007) y Romero (2014) donde aplican estas pruebas estadísticas a casos específicos de estudio y análisis de detección de outliers.

Knight et al. (2010) expone que la teoría actual de confiabilidad está basada en la asunción de un solo outlier. Sin embargo, en la práctica, podría haber más de un outlier. Por ejemplo, si un geodesta considera que una en cien medidas es un outlier y se realiza una red con 50 medidas. Encuentra que una probabilidad del 50% de que la red contenga un outlier, una probabilidad del 12% de dos, una probabilidad del 4% de tres, y una probabilidad del 2% de cuatro o más. Por lo tanto, las medidas de la confiabilidad para múltiple outliers son necesarias. Principalmente para redes con gran número de mediciones en exceso.

Knight et al. (2010) deriva una formula única para calcular el Error Mínimo Detectable (EMD) en la presencia de multiples outliers y concluye que el EMD para una cantidad θ de outliers en la i -ésima medida es tan grande o igual al correspondiente EMD para un solo outlier.

Koch (2015) derivó una fórmula para calcular el Error Mínimo Detectable (EMD) en la presencia de múltiples outliers. El método fue aplicado a la reconstrucción de una superficie en forma de campana medida por un escáner

láser. El EMD es un escalar para un outlier. Se generaliza para los múltiples outliers a un vector unitario con el mayor número de componentes, ya que ahí se encuentran los outliers que se deben buscar. El vector indica las posiciones de los outliers dentro de las observaciones, luego se multiplica por un escalar con la misma expresión que el EMD de un outlier y se define para todas las combinaciones de las observaciones con respecto al número de outliers.

Prószyński (2015) propone elaborar un método para evaluar las posibilidades de identificar un error grave de la magnitud EMD (asumiendo un solo outlier en un sistema), y junto con algunas otras características relacionadas para crear la suplementación del concepto EMD con respecto a la identificabilidad del outlier. Esto para el caso de observaciones correlacionadas contaminadas con un solo outlier. La suplementación consiste principalmente de un índice de identificabilidad de outliers asignado a cada observación individual en una red y un índice de sub-identificabilidad siendo la probabilidad máxima de la identificación de una observación incorrecta. Para esos índices también se define un factor multiplicador EMD para aumentar el índice de identificabilidad a un nivel satisfactorio. Como medida auxiliar existen índices de identificabilidad parcial referentes a pares de observaciones. Los índices se obtienen suponiendo la identificación de outlier generalizada procediendo como Knight et al. (2010) y es similar al método propuesto por Baarda (1968).

Por definición el concepto EMD no está asociado con la identificabilidad del outlier. Prószyński (2015) propuso la suplementación del concepto EMD por el par (EMD_i, ID_i) el cual sería caracterizar el error mínimo detectable en una observación particular junto con las posibilidades para su identificación en una red.

La prueba global y el escrutinio de datos son las técnicas de rastreo de datos más frecuentemente utilizadas después del ajuste. Baarda (1968) propuso la prueba global para la detección de outliers y el escrutinio de datos para la localización de los mismos. Después del ajuste de la red, se aplica primero la prueba global, que prueba la compatibilidad del factor de la varianza de referencia a posteriori. La prueba global es utilizada para descubrir discrepancias

entre las observaciones, los modelos funcionales y estocásticos la cual se aplica sobre los factores de varianza a priori y posteriori. Si la prueba falla y los modelos funcionales y estocásticos son correctos, se deduce la presencia de uno o múltiples outliers en las mediciones (Knight, Wang, & Rizos, 2010).

Por otra parte la confiabilidad externa se relaciona con el efecto de errores de observación no detectados en las estimaciones de coordenadas desconocidas. La confiabilidad externa de una red que es calculada para observaciones individuales mide los efectos de los errores no detectados en los parámetros estimados.

En este trabajo de tesis se propone aplicar un algoritmo y utilizarlo en cualquier red (o base) geodésica GNSS y realizar un análisis detallado a los vectores medidos por medio de las diferentes pruebas estadísticas para detectar la presencia de outliers y eliminar las mediciones contaminadas antes de realizar el ajuste por mínimos cuadrados y con esto obtener una alta confiabilidad interna y externa. También poder analizar casos específicos como por ejemplo una base geodésica GNSS que tiene ciertas características geométricas, es decir, que son irregulares y presentan una robustez débil.

1.3 Justificación

En la actualidad las redes geodésicas GNSS son importantes para llevar a cabo trabajos en diferentes áreas; por ejemplo, en el desarrollo de obras de ingeniería donde se requiere cumplir con un rigor metodológico que satisfaga altas precisiones (del nivel del centímetro e inclusive al milímetro). Por tal motivo es de gran importancia contar con métodos de detección de errores y realizar un análisis estadístico a los vectores medidos en una red geodésica GNSS para detectar los outliers y efectuar el ajuste para obtener la solución posible a las coordenadas de los puntos. Además la Red Geodésica Nacional Activa (RGNA) del país tiene poca densidad de cobertura y esto hace que en algunos casos el establecimiento de una base geodésica GNSS se encuentre a una distancia muy alejada de un punto de control, y a su vez la precisión de la misma sea menor. Esto obliga a que en muchas ocasiones el georeferenciamiento se produzca a

partir de la medición de una sola base en el área de trabajo, estando el punto de referencia muy alejado.

1.4 Objetivos

1.4.1 Objetivo general

- ✓ Emplear una metodología de análisis estadístico en el establecimiento de una base geodésica medidas con técnicas GNSS con alta confiabilidad y aplicar un algoritmo para detectar la presencia de errores no aleatorios. Esto en presencia de uno o más puntos de control. Calculando también el efecto de los errores en las mediciones en las coordenadas por determinar.

1.4.2 Objetivos particulares

- ✓ Aplicar la Teoría de los Mínimos Cuadrados a la solución de las mediciones que solo estén contaminadas con errores aleatorios.
- ✓ Aplicar una prueba estadística rigurosa que permita detectar errores mínimos no aleatorios en las mediciones geodésicas.
- ✓ Implementar un algoritmo matemático eficiente para encontrar los errores mínimos no aleatorios detectables en las observaciones de una base geodésica.
- ✓ Realizar un análisis estadístico de confiabilidad en el establecimiento de una base GNSS, para la cual los puntos de control están relativamente lejanos.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Distribuciones de probabilidad

El conocimiento preciso de cantidades medidas que contienen errores es uno de los mayores problemas de las Ciencias Aplicadas. Se ha indicado que los errores aleatorios permanecen en las mediciones después de haber eliminado los errores garrafales y los errores sistemáticos. Para obtener la mejor estimación de las cantidades físicas por determinar en presencia de los errores aleatorios, es necesario conocer la ley que obedece el comportamiento de estos. Estudiemos ahora con mayor detenimiento la Función de Distribución de Probabilidad (FDP) $\Phi(x)$ de las observaciones que integran la población de la cantidad física X . Existen diversos tipos de funciones $\Phi(x)$.

2.1.1 Distribución normal

En la práctica de las FDP, la más aceptada es la conocida como función Gaussiana. Esto se debe al hecho que en la práctica las observaciones y por ende, los errores o desviaciones de dichas observaciones, tienden a distribuirse siguiendo una forma acampanada.

En general, la representación de la expresión matemática de la función Gaussiana $G(c, x)$ es la siguiente

$$G(x, c) = \sqrt{\frac{2}{c\pi}} e^{\frac{-2x}{c}} \quad (2.1)$$

Donde:

x - es una variable aleatoria con media $\mu = 0$

c - constante que depende del grado de refinamiento o precisión de las observaciones.

La Figura 2.1 muestra la forma típica de la función Gaussiana. En dicha figura se puede apreciar lo siguiente:

- Es una curva simétrica acampanada simetría alrededor de la media en este caso $\mu = 0$
- Las abscisas indican la dispersión total de los errores y en consecuencia de las observaciones.
- Las ordenadas muestran la frecuencia de ocurrencia de las observaciones. La ordenada máxima corresponde a la abscisa $x = 0$ y es igual a

$$G(0, c) = \sqrt{\frac{2}{c\pi}} \quad (2.2)$$

- Existen 2 puntos de inflexión donde el valor de x igual a

$$X_{\text{inf}} = \pm \frac{\sqrt{c}}{2} \quad (2.3)$$

- A medida que los valores de x tiendan a $\pm\infty$, la función Gaussiana se vuelve asintótica al eje X.
- La curtosis de la curva indica de algún modo la precisión de las observaciones.
- Es una función continua que describe la posibilidad de que una población con media μ y desviación estándar σ .

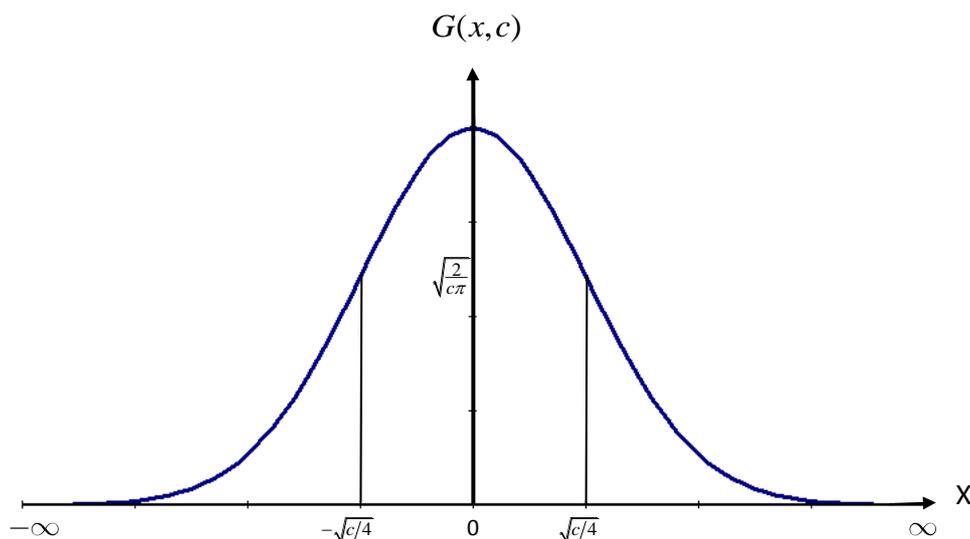


Figura 2.1: Función de Gauss en términos de x , c .

En la Figura 2.1 se puede observar que el valor máximo se da en $G(c, x)$ con $x = 0$, $\sqrt{\frac{2}{c\pi}}$, c constante que depende del grado de la precisión de las observaciones, con puntos de inflexión en $\pm\sqrt{c/4}$.

Por lo anterior podemos afirmar que los errores aleatorios tienen la misma probabilidad de ser positivos o negativos. A medida que los errores aumenten en magnitud su frecuencia de ocurrencia disminuye y viceversa. De modo que no se presenta errores aleatorios muy grandes.

2.1.2 Distribución chi-cuadrada χ^2

La distribución χ^2 es una de las distribuciones de probabilidad continua más importantes con muchos usos en la teoría estadística y la inferencia. Según O. Sheynin (1971), Ernst Karl Abbe la obtuvo en 1863, Maxwell la formuló para tres grados de libertad en 1860, y Boltzman descubrió la expresión general en 1881. Esta distribución permite comparar la relación existente entre la varianza de una serie (población) de observaciones y la varianza de un conjunto de observaciones (muestra) de dicha población de observaciones, esta relación es basada (en geodesia), en el número de mediciones en exceso (r) o grados de libertad, esto es: (Huzak, 2011).

$$\chi^2 = \frac{rS^2}{\sigma^2} \tag{2.4}$$

Donde r son las mediciones en exceso, S^2 es la varianza de una muestra y σ^2 valor de la varianza de toda la población de observaciones.

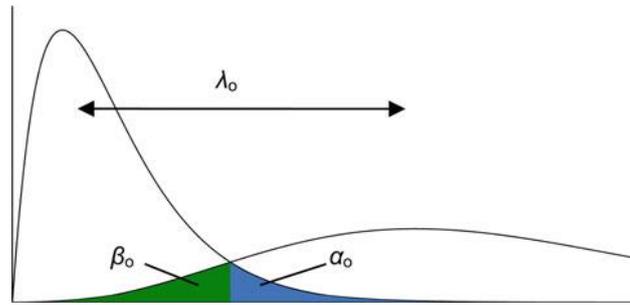


Figura 2.2 Distribución χ^2 con parámetro de no centralidad (λ_0). Tomada de (Knight et al., 2010).

Una representación de la distribución χ^2 se muestra en la Figura 2.2. El valor de α_0 representa el porcentaje del área que se desea determinar bajo la curva y β_0 la probabilidad de cometer un error tipo II (ver sección 2.6.2 y Tabla 2.1) Recordando que el área bajo la curva es la unidad y que esta distribución no es simétrica. Esta distribución es utilizada generalmente para poder determinar el rango o intervalo en el cual se espera o se infiere que el valor de la varianza de una población cualquiera pueda estar. A esta prueba se le conoce como prueba global y se lleva a cabo en función de ciertos aspectos; un valor específico de α_0 , el valor de la varianza de una muestra dada S^2 y el número de grados de libertad de la muestra r .

2.1.3 Distribución Student t

La distribución de Student es también una distribución de probabilidad continua. La distribución de Student fue creada por Gosset, conocido como "Student", quien en 1908 publicó un artículo en el que describió la función de densidad de la diferencia entre la media de una muestra y la media de la población de la que se tomó la muestra, dividido por la desviación estándar de la muestra. También proporcionó en el mismo artículo la primera tabla de la función de distribución correspondiente. Student prosiguió su investigación y en 1925 publicó un artículo en el que propuso nuevas tablas que eran más extensivas (Dodge, 2008).

Esta distribución es utilizada para comparar la media de toda una población, con la media de una muestra cualquiera de dicha población. Esta distribución es similar a la distribución normal, excepto que esta se aplica solo a una muestra.

Siendo Z una variable aleatoria, teniendo un valor de χ^2 en base a r , siendo Z y χ^2 dos variables independientes, entonces por definición se tiene que la distribución Student t es definida por (Medina, 2007)

$$t = \frac{z}{\sqrt{\chi^2/r}} = \frac{(\bar{y} - \mu) \times (\sigma / \sqrt{n})}{\sqrt{(v \times S^2 / \sigma^2) / r}} = \frac{(\bar{y} - \mu) / (\sigma / \sqrt{n})}{S / \sigma} = \frac{\bar{y} - \mu}{S / \sqrt{n}} \quad (2.5)$$

Donde \bar{y} es el valor de la media de una muestra, μ es la media de la población, S es la varianza de la muestra y n es el número de elementos que integran la población.

Además, esta distribución es utilizada para construir intervalos de confiabilidad para la media de una población basada en el valor de la media de una muestra cualquiera y la varianza de dicha muestra y en los correspondientes grados de libertad. También se utiliza para poder determinar si el valor estimado de la media de una muestra es digno de confianza en relación a la media de toda la población.

2.1.4 Distribución Fisher F

George W. Snedecor (1882-1974) promovió el desarrollo de las estadísticas en los Estados Unidos al contribuir a la fundación de un departamento de estadística en la Universidad Estatal de Iowa, para ser el primero en el país, y ayudando con sus escritos la difusión y aplicación del trabajo de Sir Ronald A. Fisher (1890-1962) sobre el análisis de la varianza y la covarianza (Fisher 1950, 1971).

Snedecor (año) denominó " F " la distribución de la relación de estimaciones independientes de la varianza en un ajuste normal como un tributo a Fisher, y ahora a la distribución se le conoce como Snedecor F . Es una distribución de

probabilidad de desviación continua con rango $[0, \infty]$, dependiendo de dos parámetros denotados ν_1 y ν_2 (Cabaña, 2011).

Esta distribución es utilizada cuando se compara el resultado de la varianza de dos muestras distintas de una misma población. Si se considera a χ_1^2 y χ_2^2 como dos variables aleatorias con r_1 y r_2 sus respectivos grados de libertad, por definición se tiene que

$$F = \frac{\chi_1^2 / r_1}{\chi_2^2 / r_2} \quad (2.6)$$

Donde χ_1^2 es el valor de la variable aleatoria uno, r_1 son los elementos que integran la variable uno, χ_2^2 es el valor de la variable dos y r_2 son los elementos que integran la variable aleatoria dos. La distribución F es utilizada para poder responder la pregunta si dos conjuntos de muestras aleatorias provienen de una misma población.

2.2 Tipos de errores en las mediciones geodésicas

Como es conocido dentro del ámbito geodésico, cualquiera que sea el origen de las mediciones estas tendrán errores, estos pueden ser ocasionados por ejemplo, inestabilidad de las condiciones atmosféricas, a imperfecciones de los instrumentos utilizados o por limitaciones humanas. Con base a esto, una manera común de dividir estos tipos de errores es en sistemáticos, aleatorios y accidentales.

2.2.1 Errores sistemáticos

Esta clase de errores son aquellos que siguen ciertas leyes físicas y hasta cierto punto pueden ser predecibles. Algunos errores sistemáticos pueden ser minimizados siguiendo procedimientos correctos de medición. Otros más pueden ser minimizados con base a la determinación de ciertas correcciones basadas en las condiciones físicas. Teóricamente es posible eliminar dichos

errores sistemáticos refinando el modelo matemático, esto se puede llevar a cabo de dos maneras:

El error sistemático es considerado como una parte funcional del modelo.

Los errores sistemáticos son considerados como efectos estocásticos (referente al peso de las observaciones) los cuales están en función de los parámetros aleatorios o por la correlación existente entre las observaciones.

2.2.2 Errores aleatorios

Esta clase de errores permanecen aun cuando se han eliminado los errores accidentales y sistemáticos de las mediciones realizadas. En general, esta clase de errores es el resultado de las imperfecciones tanto en los instrumentos de medición como en las habilidades del observador. Estos generalmente son pequeños y pueden ser tanto positivos como negativos. Esta clase de errores generalmente no siguen ninguna ley física y por lo tanto deben de ser distribuidos con base a ciertas leyes matemáticas de probabilidad.

2.2.3 Errores accidentales (outliers)

Generalmente son causados por confusión o por falta de cuidado del observador. Estos no se consideran directamente como una clasificación, pero igual se debe tratar de identificarlos y eliminarlos de las observaciones realizadas.

Con base a lo anterior, los tipos de errores son la clave para poder determinar o elaborar los ajustes correspondientes mediante mínimos cuadrados (Ver sección 2.3). Al obtener los residuales en el proceso del ajuste matemático, se puede definir que un outlier es un residual, el cual con base a cierta prueba estadística está en contradicción con su hipótesis. Esta es solo una definición relativa ya que depende de la selección de cierto nivel crítico, de la distribución estadística utilizada y de la elaboración de la prueba estadística. A pesar de esta diferencia fundamental entre la definición de un outlier y un error accidental es natural pensar que el valor de cierto outlier es causado por cierto error accidental, garrafal o sistemático no eliminado.

Prószyński (2015) hace una clasificación con respecto a los errores graves:

- ✓ Error grave detectable: es un error de observación de la magnitud de tal manera que su presencia en una serie de mediciones se señala por el estadístico de prueba de modelo global superior a su valor crítico.
- ✓ Error grave identificable: la ubicación exacta de un error grave de dentro de una red, es decir, en unas observaciones particulares en el primer ajuste, es decir, sin operaciones de eliminación de diagnóstico posterior como nueva ponderación de las observaciones. Es cuando la prueba estadística de outliers que exceda el valor crítico, corresponda con la observación contaminada.
- ✓ Error grave no identificable: error grave detectable situado en una región específica de una red (que consiste de por lo menos dos observaciones), donde todas las observaciones obtienen valores iguales de pruebas estadísticas de outliers. El error no es identificable dentro de la región.

2.2.4 Outliers

En el establecimiento de las redes geodésicas, los outliers son principalmente causados generalmente por errores graves. Por otro lado los outliers rara vez pueden ser el resultado de medidas completamente correctas, y por lo tanto, los errores o malfuncionamientos de instrumentos no siempre pueden conducir a grandes desviaciones, por ejemplo, una pequeña corrección incorrectamente aplicada.

Dado que Hawkins (1980) y la mayoría de las definiciones de outliers se limitan a muestras (observaciones repetidas), Lehmann (2012) propone una definición modificada:

“Un outlier es una observación que es probablemente causada por un error grave que es mejor no sea utilizada como tal”.

Los errores graves son generalmente producidos por errores humanos, mal funcionamiento de los instrumentos o métodos de medición incorrectos. Los errores graves no siguen ciertas reglas y normalmente no pueden ser tratados por métodos estadísticos. En principio, los errores graves no están permitidos y deben ser detectados por el inspector y las rutinas de control.

Todos los errores de observación estándar y graves provienen de la misma distribución no normal, usualmente leptocúrtica (es decir, de cola gruesa). Los outliers son meras realizaciones de observaciones procedentes de las colas de esta distribución. Algunos errores de observación vienen de la distribución normal, pero los outliers son "generados por un mecanismo diferente". Para más detalle consultar la definición de Hawkins (1980) y Lehmann (2013).

Si se quiere aplicar un procedimiento estándar de ajuste matemático, los outliers deben descartarse o ponderarse a la baja, porque el procedimiento para distribuciones leptocúrticas no es óptimo. Alternativamente, podemos acomodar los outliers mediante la aplicación de procedimientos de estimación robustos.

Para la detección de outlier en geodesia, generalmente se utilizan las siguientes pruebas estadísticas:

- ✓ Relación de varianza aposterior/apriori
- ✓ Residuos individuales normalizados
- ✓ Residuos individuales Student
- ✓ Residuos extremos normalizados
- ✓ Residuos extremos Student

2.2.4.1 Outlier único

El concepto de Error Mínimo Detectable (EMD) fue introducido por Baarda (Publ Geod New Ser 2(5), 1968) y más tarde fue desarrollado por Wang y Chen (1994), Schaffrin (1997), Teunissen (1990; 1998; 2000) y se refiere a la cuestión de la capacidad de detección de un outlier. Fue la herramienta pionera para el análisis del comportamiento de una red en la presencia de un outlier (Prószyński, 2015).

El concepto EMD en sí no cubre el tema de identificabilidad de outlier. Sólo se determina la magnitud mínima de un error grave en una observación

particular. La fórmula original para EMD que cubre el caso de observaciones correlacionadas, fue analizada por Wang y Chen (1994), Schaffrin (1997), Teunissen (1990, 1998, 2000) y se amplió para el caso de múltiples outliers.

Si hay solamente un outlier, para lo cual es θ igual a uno, entonces el vector outlier se reduce a un escalar z . Por lo tanto, para un parámetro de no centralidad (λ_0) dado, una solución única puede ser obtenida para el EMD en la observación ith como (Knight et al., 2010).

$$z_{0i} = \sqrt{\frac{\lambda_0 \sigma_0^2}{h_i^T P Q_v P h_i}} \quad (2.7)$$

donde P es la matriz de pesos, σ_0^2 es el factor a priori de la varianza, Q_v es la matriz de cofactores de los residuos estimados, h_i es el vector de una columna de con 1 y 0 donde existan posibles outliers o no. En el caso de un único outlier, la confiabilidad externa es obtenida substituyendo la solución única por el EMD de la ecuación (2.9), en la solución por mínimos cuadrados, dada por Knight et al. (2010)

$$y_{0i} = (A^T P A)^{-1} A^T P h_i z_{0i} \quad (2.8)$$

Donde y_{0i} es el vector de confiabilidad externa para el EMD en la medición ith , A es la matriz de diseño, P es la matriz de pesos.

Por otra parte, Kuang (1996) considera que un outlier es causado por un error grave contenido en la medición.

2.2.4.2 Máximo EMD para un outlier

Se puede concluir que el EMD para los outliers en la i -ésima medida es mayor o igual que el EMD correspondiente para un solo outlier.

Sin embargo, independientemente del método elegido, la evaluación completa del valor mínimo detectable en una observación particular requiere el cálculo de

las combinaciones $\binom{n-1}{\theta-1}$, es decir, las combinaciones $\theta \binom{n}{\theta}$ (Knight et al., 2010).

A continuación, se presenta la fórmula para EMD tal como figura en Prószyński (2015)

$$EMD_i = \sigma_i \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{r_i}} \quad r_i = \{\mathbf{H}^T \mathbf{C}_S^{-1} \mathbf{H}\}_{ii}; \quad (2.9)$$

donde EMD_i es el error mínimo detectable en la observación i , σ_i es la desviación estándar de la observación i , λ el parámetro de no centralidad, r_i numero de confiabilidad generalizado para la observación i , C_S es una matriz de correlación, H es la matriz de confiabilidad modificada. Para mayor detalle en la derivación de la ecuación (2.9) consultar Prószyński (2015).

2.3 Modelo Paramétrico Gauss-Markov

Consideremos el modelo paramétrico Gauss-Markov (GM), escrito en su forma original (Prószyński, 2015)

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{e} = \mathbf{y}; \quad \mathbf{e} \sim (\mathbf{0}, \mathbf{C}) \quad (2.10)$$

donde \mathbf{y} es el vector de n observaciones; \mathbf{A} es la matriz de diseño de $n \times m$,

\mathbf{x} es el vector de m parámetros desconocidos; \mathbf{e} es el vector de n errores aleatorios; usaremos también $\mathbf{v} = -\mathbf{e}$; \mathbf{C} es la matriz de covarianza de \mathbf{e} de $n \times n$ (definida positiva).

De acuerdo al principio de los mínimos cuadrados la mejor solución al sistema (2.10) estará dado por:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y} \quad \text{que cumple la condición } \sum \tilde{e}_i^2 \simeq \min \quad (2.11)$$

donde

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad (2.12)$$

\mathbf{P} = Es la matriz de los pesos de las observaciones de $n \times n$

El vector de los residuales está definido por:

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} - \mathbf{y} \quad (2.13)$$

La varianza de referencia a posteriori

$$\hat{\sigma}_0^2 = \sqrt{\frac{\mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}}{r}} \quad (2.14)$$

La ecuación (2.14) es conocida como la fórmula de Bessel y se utiliza para calcular la varianza de referencia.

2.4 Pruebas estadísticas

2.4.1 Prueba global para la varianza de referencia

La prueba global y el escrutinio de datos son las técnicas de rastreo de datos más frecuentemente utilizadas después del ajuste. Barda (1968) propuso la prueba global para la detección de outliers y el escrutinio de datos para la localización de los mismos. Después del ajuste de la red, se aplica primero la prueba global, que prueba la compatibilidad del factor de la varianza de referencia a posteriori; estimada $\hat{\sigma}_0^2$ con el factor de varianza σ_0^2 a priori seleccionado. Si la prueba global fracasa, significa que algo está mal con la hipótesis nula H_0 (ver sección 2.6.1), y el escaneo adicional de los residuos se realiza por el escrutinio de datos. Obviamente, este enfoque requiere que se conozca el factor de varianza a priori. De lo contrario, sería difícil una interpretación física significativa de los resultados de la prueba estadística (Kuang, 1996).

La prueba global de modelo es utilizada para descubrir discrepancias entre las observaciones, los modelos funcionales y estocásticos la cual se aplica sobre los factores de varianza a priori y posteriori. Si la prueba falla y los modelos

funcionales y estocásticos son correctos, se deduce la presencia de uno o múltiples outliers en las mediciones (Knight et al., 2010).

Si el modelo matemático de las observaciones y el modelo estocástico referente a los pesos está correcto, se está en condiciones de esperar que $\hat{\sigma}_0^2 = \sigma_0^2$, estableciendo una hipótesis estadística (Koch, 2015)

$$H_o = E\{\hat{\sigma}_0^2\} = \sigma_0^2 \quad \text{contra} \quad H_a = E\{\hat{\sigma}_0^2\} \neq \sigma_0^2 \quad (2.15)$$

Donde el valor de σ_0^2 debe ser especificado. En el presente trabajo se asume como la unidad y está definido en la ecuación (2.14).

Para llevar a cabo esta prueba se hará uso de la distribución $\chi^2(r)$ siendo el valor de r el número de mediciones en exceso de la red (grados de libertad). La prueba está definida por ((Kuang, 1996))

$$T = r \frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} = r \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(r) \quad (2.16)$$

Esto es, T es una variable estadística con distribución χ^2 . Dado un cierto valor del nivel de significancia (α), la hipótesis nula es aceptada, si los resultados cumple la siguiente condición (Koch, 2015).

$$\chi_{1-\alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{\alpha/2}^2 \quad (2.17)$$

Por otro lado, la hipótesis nula es rechazada si:

$$\chi_{\alpha/2}^2 \leq T \leq \chi_{1-\alpha/2}^2 \quad (2.18)$$

La solución ideal, se da cuando la hipótesis nula es aceptada, en el caso de que la igualdad (2.17) no se cumpla, se realizara una prueba para la detección de outliers. Si los hay, se eliminan dichas observaciones que los contienen, después se vuelve a realizar el ajuste y nuevamente se realiza la prueba global (2.16), en el caso en que se hallan eliminado todas las observaciones con outliers con base a sus pruebas y aun la igualdad (2.17) no se cumpla, entonces estamos en condiciones de afirmar que el modelo estocástico no fue el adecuado y por lo

tanto se tendrá que modificar; escalando la matriz de los pesos, para que con esto se pueda satisfacer la relación (2.17).

2.4.2 Determinación total de errores en los vectores medidos

La determinación de errores en los vectores medidos está definida con base al modelo de ajuste, con base en (2.10), se tiene

$$L = Ax + H_k \delta^{(k)} - v, \quad v(0, \sigma_0^2 P^{-1}) \quad (2.19)$$

En la ecuación (2.19), $\delta^{(k)}$ es la tripleta de outliers en el vector k asociado con el vector medido. Ahora se propone que n_V represente el número de vectores GPS medidos en la red, entonces $k \in \{1, \dots, n_V\}$, en el caso donde solo vectores GPS hayan sido medidos n_V tendrá un valor de $n_V = \frac{n}{3}$, por lo tanto, la matriz

H_k es una matriz de $3n_V \times 3$, en la cual al obtener su transpuesta servirá para obtener el vector k del vector total L . Esto es válido para aquel conjunto de observaciones, el cual fue ordenado en tripletas consecutivas de cada uno de los vectores medidos. De una manera más ilustrativa, el vector H_k tendrá la siguiente forma

$$H_k = [0, \dots, 0, I_k, 0, \dots, 0]^T \quad (2.20)$$

Donde

I_k es la matriz identidad de 3×3 en la observación k .

La solución por medio de mínimos cuadrados para $\delta^{(k)}$ es (Snow, 2002)

$$\delta^{(k)} = [H_k^T (P Q_e P) H_k]^{-1} H_k^T P \tilde{e} \quad (2.21)$$

Donde $\tilde{e} = -v$. La ecuación (2.21) representa la tripleta de los outliers estimados en la observación k . Las hipótesis que definen la existencia o no de outliers son las siguientes

$$H_o^{(k)} : E\{\hat{\delta}^{(k)}\} = [0 \ 0 \ 0]^T \quad \text{contra} \quad H_a^{(k)} : E\{\hat{\delta}^{(k)}\} \neq [0 \ 0 \ 0]^T \quad (2.22)$$

La correspondiente prueba estadística que define si existe o no un outlier en la observación está dada por (Knight et al., 2010)

$$T_k = \frac{\frac{R_k}{3}}{\frac{(\Omega - R_k)}{(n - u - 3)}} \sim F(\alpha, 3, n - u - 3) \quad (2.23)$$

Donde

$$R_k = \hat{\delta}^{(k)T} \left[H_k^T (P Q_e P) H_k \right] \hat{\delta}^{(k)} \quad (2.24)$$

$$\Omega = \tilde{e}^T P \tilde{e} = v^T P v \quad (2.25)$$

n numero de mediciones realizadas

u numero de mediciones necesarias

La prueba estadística (2.23) se aplica para cada una de las observaciones (vectores) de la red. La hipótesis nula es aceptada si

$$T_k \leq F_{(\alpha, 3, r-3)} \quad (2.26)$$

Donde $F_{(\alpha, 3, r-3)}$ es el valor crítico y se obtiene de las tablas de distribución de Fisher, en el caso donde (2.26) no se cumpla, se acepta la hipótesis alterna. Estadísticamente se espera cometer un error de Tipo I (ver sección 2.6.2) con una probabilidad de α , esto es, rechazar una observación cuando de hecho debe ser aceptada.

2.4.3 Determinación de errores por componentes

La experiencia ha demostrado que los errores obtenidos en observaciones geodésicas generalmente tienden a una distribución normal, con base a este hecho, se puede tratar la existencia de outliers en cada una de las componentes vectoriales que integran un vector GPS, y no en una sola cantidad (vector) como se desarrolló en la sección anterior. Esto se lleva a cabo en función

de la distribución de Student, utilizando los valores de cada uno de los residuales obtenido (Medina, 2007).

Las variables aleatorias que presentan una distribución normal se pueden estandarizar de acuerdo a la ecuación (2.5). De manera análoga, la estandarización de los residuales para cada una de las observaciones l_i y para cada una de sus componentes i (Medina, 2007)

$$z_j = \frac{e_j}{\sqrt{\sigma_0^2(Qe)_{jj}}} \quad (2.27)$$

Donde el doble subíndice jj indica el elemento de la diagonal principal de la matriz de los cofactores de los residuales de Qe . Con base a la varianza de referencia σ_0^2 es considerada generalmente como una cantidad desconocida o igual a uno, esta es remplazada por el valor de la varianza de referencia estimada $\hat{\sigma}_0^2$, finalmente se tiene

$$t_j = \frac{e_j}{\sqrt{\hat{\sigma}_0^2(Qe)_{jj}}} \quad (2.28)$$

Esta última ecuación, t_j es caracterizada por tener una distribución de Student, teniendo las mismas propiedades aleatorias tanto en el numerador como en el denominador.

Utilizando este método de componente por componente, la hipótesis estadística básica (2.22) es la misma, ahora lo que se requiere modificar es la prueba estadística para la determinación de outliers, ya que ahora, en lugar de utilizar la formula (2.23), para la detección de errores, la prueba se llevara a cabo con base a (2.28), la cual muestra la forma de los errores en la distribución de Student. Ahora la prueba estadística es usada para cada uno de los residuales, esto es para cada vector k , y para cada componente j .

Con base a un nivel de significancia α dado, ahora la hipótesis nula es rechazada si la magnitud de los residuales excede el valor crítico de la distribución de Student

H_o^j Es aceptada si: $|t_j| < t_{(\frac{\alpha}{2}, r)}$

H_o^j Es rechazada si: $|t_j| > t_{(\frac{\alpha}{2}, r)}$ (2.29)

Según Snow (2002) se ha encontrado que este tipo de prueba es menos confiable que la prueba donde se analiza todo el vector GNSS.

2.4.4 Determinación de errores con base a la prueba de tao τ

Esta prueba estadística considera que no existen los errores del tipo II (ver sección 2.6.2), además pertenece al grupo que utilizan la distribución de Student, la prueba τ hace uso de la varianza posteriori por unidad de peso (2.14), estimada de las observaciones, esta prueba fue introducida por Pope (1976) y se define como:

$$\tau = \frac{|v_i|}{\sigma_{v_i}} = \frac{|v_i|}{\sqrt{\hat{\sigma}_0^2 \times r_i / P_i}} = \frac{|v_i|}{\hat{\sigma}_0 \times \sqrt{q_{v_i v_i}}} \sim \tau_{n-r} \quad (2.30)$$

Donde

v es el valor del residual (corrección a la observación i).

r es el número de redundancia.

P es el valor en la diagonal principal del peso.

$\hat{\sigma}_0$ es el valor de la varianza de referencia estimada.

$q_{v_i v_i}$ es el elemento de la diagonal principal de la matriz Q_v .

Las tablas de la distribución τ no son fácilmente accesibles, por lo tanto la distribución τ puede ser expresada en función de la distribución Student y viceversa (Leick, Rapoport, & Tatarnikov, 2015).

$$\tau_{(\frac{\alpha_0}{2})} (n-r) = \frac{\sqrt{n-r} \times t_{(\frac{\alpha_0}{2})} (n-r-1)}{\sqrt{n-r-1 + t_{(\frac{\alpha_0}{2})}^2 (n-r-1)}} \quad (2.31)$$

$$t_{(\alpha_0, n-r-1)} = \sqrt{\frac{(n-r-1) \times \tau_{(\alpha_0, n-r)}^2}{(n-r) \times \tau_{(\alpha_0, n-r)}^2}} \quad \text{Para } \tau^2 < n-r \quad (2.32)$$

Donde

$$\alpha_0 \approx 1 - (-1 - \alpha)^{1/n} \quad (2.33)$$

La hipótesis nula que utiliza la prueba τ asume que los errores de las observaciones presentan una distribución normal con $E\{y\} = Ax$ según (2.10), por lo tanto los residuales en la estimación del ajuste deben de tender a cero

$$H_0 : E\{v_i\} = 0 \quad \text{contra} \quad H_a : \text{que un residual tenga un outlier} \quad (2.34)$$

Con base a las reglas establecidas de la prueba τ , la hipótesis nula H_0 es rechazada para un residual v_i si se cumple la siguiente relación

$$\tau > \tau_{\frac{\alpha_0}{2}}(n-r) \quad (2.35)$$

Por lo tanto con base a lo expuesto anteriormente se puede decir que si un residual v_i cumple la relación (2.35), será candidato a ser eliminado debido a la posible presencia de un outlier. Este método está basado en el hecho de que solo una observación contiene error en el conjunto de observaciones con los cuales se generó el ajuste.

2.4.5 Determinación de errores de acuerdo a la teoría de Baarda

Baarda (1968) define los errores del tipo I y tipo II con una probabilidad de $\alpha = \alpha_0$ y $\beta = \beta_0$ respectivamente, esto para poder realizar la prueba estadística a cada una de los residuos obtenidos. Como se puede observar en la Figura 2.2, el parámetro de no centralidad $\sqrt{\lambda_0}$, que es un desplazamiento de la distribución original. La probabilidad de que una cierta observación exceda el valor crítico es de $1 - \beta_0$.

Baarda asume en su hipótesis alterna que un solo outlier existe en el conjunto de observaciones. Por lo tanto, con base al parámetro de no centralidad $\sqrt{\lambda_0}$ se pueden obtener los errores mínimos detectables $\Delta_{0,i}$ para cada una de las observaciones. Si un error $\Delta_{0,i}$ está en el rango de este valor, entonces la probabilidad de detectar dicho error será $1 - \beta_0$, mientras que la probabilidad de rechazar una observación sin error será de α_0 (Medina, 2007).

$$\Delta_{0,i} = \frac{\sigma_{0,i}}{P_i} = \sqrt{\frac{\lambda_0}{q_{v_i, v_i}}} = \sqrt{\lambda_0} \cdot \frac{\sigma_{0,i}}{\sqrt{r_i}} \quad (2.36)$$

Donde

$\Delta_{0,i}$ es la estimación del error mínimo detectable en cada una de las observaciones, el cual no puede ser detectado con una prueba estadística.

$\sigma_{0,i}$ es el valor de la desviación estándar de la observación i .

Se puede consultar Caspary (1987) dentro de la bibliografía las fórmulas que permiten determinar la influencia o el efecto de estos errores $\Delta_{0,i}$ en el vector de los residuos, así como su efecto en cada uno de ellos.

Los fundamentos que considera Baarda en su prueba estadística son que los resultados de los residuales están normalmente distribuidos y que el valor $\sigma_{0,i}$ es conocido. Esta prueba está basada en la estandarización de los residuales

$$u_i = \frac{v_i}{\sigma_{v_i}} = \frac{v_i}{\sigma_{0,i} \sqrt{q_{v_i, v_i}}} \quad (2.37)$$

El valor crítico para definir si una observación contiene o no un outlier es u_{α_0} el cual depende solo de α_0 . Este valor será excedido con una probabilidad de $1 - \beta_0$ si un outlier $\Delta_{0,i}$ con base a (2.36) está presente. Una observación i será considerada como outlier si:

$$u_i > u_{\alpha_0} \quad (2.38)$$

Las pruebas estadísticas (2.30) y (2.37) son funciones de los números de redundancia individuales. Además, la absorción de errores aumenta con la disminución de los números de redundancia (Leick, 1995) (Kuang, 1996).

Kuang (1996) propone una estrategia para la detección de outliers y eliminación de errores graves

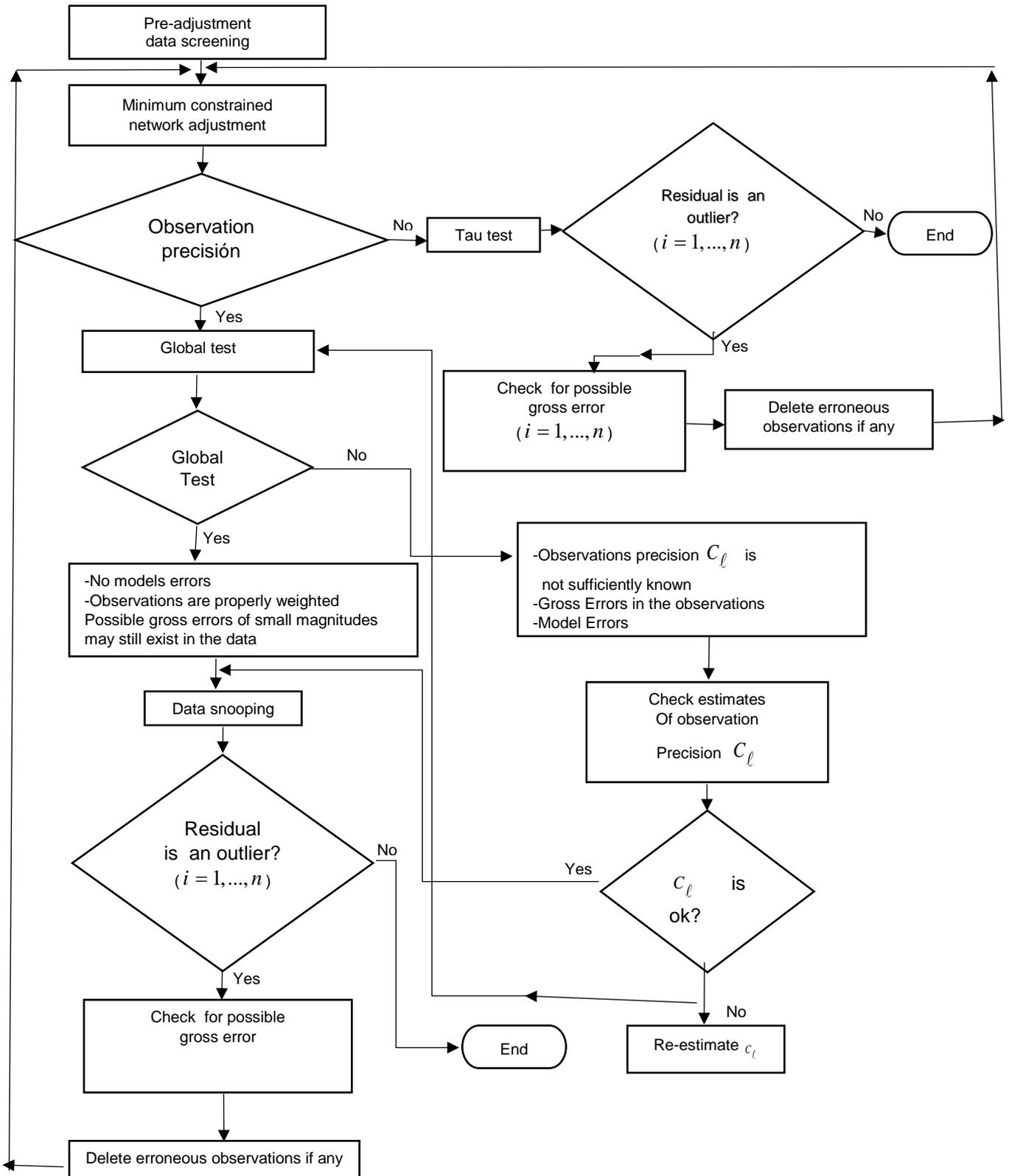


Figura 2.3: Estrategia propuesta para la detección de outliers y eliminación de errores graves (Kuang, 1996).

En primer lugar, el procedimiento comienza con el escrutinio de los datos de preajuste para detectar y eliminar errores graves. Después se ejecuta un ajuste mínimos cuadrados de la red con restricciones de referencia mínimas que da las estimaciones de los residuos observacionales \mathcal{V} y del factor de varianza a posteriori $\tilde{\sigma}_0^2$. Con un estimado del factor de varianza a posteriori y los residuos observacionales, se puede proceder con la detección de outliers y la localización y eliminación de error grave.

Si las precisiones de observación son adecuadamente conocidas, siguiendo el enfoque de Baarda (1968) para el cribado de datos, la prueba global sobre el factor de varianza estimado σ_0^2 se realiza primero. Si pasa, tenemos una razón para creer que las observaciones han sido debidamente ponderadas y no existen errores de modelo. Sin embargo, incluso en este caso, todavía puede haber algunos outliers de pequeñas magnitudes que no se detectan por la prueba global. Deberán realizarse más pruebas de detección de datos utilizando la técnica “data snooping”. Si no se encuentran errores graves, el procedimiento finaliza. De lo contrario, si se encuentran algunos outliers, se deben realizar más análisis para localizar y eliminar errores graves. Después de eso, se ejecuta de nuevo un ajuste de la red restringido mínimo, y se repite el mismo procedimiento hasta que no se encuentren outliers.

Si la prueba global falla, existen dos razones principales; es decir, o bien la precisión de la observación no se estimó adecuadamente o bien existen outliers en los datos. Si se ha estimado correctamente, se tiene una razón para creer que existen errores graves en los datos de observación, y se emplea la técnica de “data snooping” para detectar outliers y localizar y eliminar errores graves. Después de suprimir cualquier observación errónea, se vuelve a realizar el ajuste de la red y se repite el mismo procedimiento de selección de datos comenzando con la prueba global hasta que esta pasa y no se encuentran outliers. De forma similar, si las observaciones de observación adoptadas se encuentran inadecuadas (ya sea sobreestimar o subestimar la observación, son posibles errores aleatorios), la precisión de la observación debe modificarse y el ajuste de red se vuelve a ejecutar. El procedimiento de “data snooping” se repite

comenzando con la prueba global hasta que pasa y no se encuentran outliers. Después de esto el sistema se considera sin errores.

2.4.6 Estadísticas para detección de múltiples outliers

La prueba de múltiples outliers es similar a la prueba de outlier simple, como se trató en la ecuación (2.7) y también se deriva del modelo de cambio medio (Wang et al., 2013)

$$\mathbf{v} = [\mathbf{AH}] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \nabla \mathbf{S} \end{bmatrix} - \mathbf{1} \quad (2.39)$$

Donde $\nabla \mathbf{S}$ es ahora el vector de error estimado y \mathbf{H} es una matriz de n por θ , con rango θ (número de posibles outliers), que contiene ceros con un uno en cada columna correspondiente a un outlier. El uso de matrices particionadas para estimar los rendimientos del vector de outlier es

$$\nabla \mathbf{S} = (\mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PH})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PI} \quad (2.40)$$

Con matriz de varianza-covarianza de

$$\sum_{\nabla \mathbf{S}} = \sigma_0^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PH})^{-1} \quad (2.41)$$

Donde el factor de varianza a priori σ_0^2 puede ser asignado como la unidad. Por lo tanto, las estadísticas de detección de múltiples outliers es

$$T_i^2 = \nabla \mathbf{S}^T \sum_{\nabla \mathbf{S}}^{-1} \nabla \mathbf{S} = \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PH}_i (\mathbf{H}_i^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PH}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{PI}}{\sigma_0^2} \quad (2.42)$$

Las estadísticas anteriores tienen una distribución χ^2 con θ como el grado de libertad. La identificación de outliers basada en la ecuación (2.41) se puede aplicar para diferentes números de outliers, como dos o tres. En este estudio, Wang et al. (2013) considera el caso de que existen dos outliers en las mediciones.

$$\mathbf{H}_i^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (2.43)$$

Todo el posible T_i^2 , puede presentarse como la $(n \times \theta)$ matriz correspondiente a la matriz \mathbf{H}_i .

El EMD también se puede derivar para los múltiples outliers, pero con fórmulas muy complicadas ya que tales EMD son de múltiples dimensiones, véanse los detalles, por ejemplo en Wang y Chen, (1999), Knight et al. (2010).

Dependiendo de la potencia elegida del test $(1-\beta)$ y del nivel de significancia (α) , se puede obtener el parámetro de no centralidad de la prueba δ de valores de salida múltiple a partir de la ecuación (2.41) como

$$\delta = E \left\{ \frac{\mathbf{l}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H}_i (\mathbf{H}_i^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H}_i)^{-1} \mathbf{H}_i^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{l}}{\sigma_0^2} \right\} = \frac{\nabla \mathbf{S}^T \mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H} \nabla_0 \mathbf{S}}{\sigma_0^2} \quad (2.44)$$

Donde \mathbf{H} corresponde con el vector de error verdadero $\nabla \mathbf{S}$.

$$\delta_0 = \frac{\nabla_0 \mathbf{S}^T \mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H} \nabla_0 \mathbf{S}}{\sigma_0^2} \quad (2.45)$$

Que se satisface por un subconjunto de vectores EMD para una matriz \mathbf{H} dada. Sin embargo, si el vector EMD se divide en una componente vectorial $\nabla \mathbf{S}_u$ y un componente escalar $\nabla \mathbf{S}_s$, entonces asumiendo una componente vectorial unitaria, es decir, una relación de outliers, se puede obtener el componente escalar como (Wang, Wu, & Alqurashi, 2013).

$$\nabla \mathbf{S}_u = \sqrt{\frac{\delta_0 \sigma_0^2}{\nabla \mathbf{S}_u^T \mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H} \nabla \mathbf{S}_u}} \quad (2.46)$$

Por lo tanto, el vector MDB correspondiente es

$$\nabla_0 \mathbf{S} = \nabla \mathbf{S}_s \nabla \mathbf{S}_u = \sqrt{\frac{\delta_0 \sigma_0^2}{\nabla \mathbf{S}_u^T \mathbf{H}^T \mathbf{PQ}_v \mathbf{P} \mathbf{H} \nabla \mathbf{S}_u}} \nabla \mathbf{S}_u \quad (2.47)$$

Se puede encontrar que el EMD más grande está asociado con una dirección específica para una relación particular de los outliers que se van a detectar. Sin embargo, cuando los outliers son de naturaleza aleatoria, consecuentemente se desconoce su relación. Por lo tanto, un procedimiento que obtiene el EMD máximo en la i -ésima observación cuando los θ outliers también se consideran esperados; Ver los detalles sobre el EMD máximo en Knight *et al.* (2010).

2.5 Estabilidad en la inversión de la matriz de ecuaciones normales N

Una forma de medir la estabilidad de un sistema es empleando el número de condición de la matriz que será invertida. En el presente trabajo se aplica el método de inversión de Tikhonov. La solución consiste en invertir la matriz $N = A^T P A$ de la ecuación (2.12). El número de condición L_1 de una matriz de dimensiones $n \times n$ se define por $ncond(N) = \|N\|_1 \|N^{-1}\|_1$, donde $\|(\)\|$ representa el operador de la normal L_1 . Para una matriz, este operador está dado por

$$\|N\|_1 = \max_i \|N^{(i)}\|_1, i = 1, n, \|N^{(i)}\|_1 = \sum_{j=1}^n N_{ji} \quad (2.48)$$

Cuando el número de condición es mayor que $1/\epsilon$ donde ϵ es la precisión de la computadora, entonces la matriz N es considerada como mal condicionada, lo que significa que pequeñas variaciones en los datos de entrada producirán grandes cambios en la solución.

La precisión computacional está determinada primeramente por la cantidad de dígitos con los que se efectúan las operaciones aritméticas, conocidas a partir de la longitud de palabra del procesador. Para un procesador con una longitud de palabra de 32 bits se obtienen 19 dígitos decimales en precisión doble, mientras que para los procesadores de 64 bits (de última generación) se obtienen 38. Generalmente una decena de dígitos decimales es suficiente para la mayoría de propósitos de cálculos (Wilson & Morales-Luna, 2007).

2.6 Análisis de confiabilidad

El concepto de confiabilidad para las redes geodésicas fue introducido por Baarda (1968). Se refiere a la capacidad de una red para resistir errores graves en las observaciones. Respecto a esto, por lo general se distinguen la "confiabilidad interna" y la "confiabilidad externa". Lo primero se refiere a la capacidad de una red para permitir la detección de errores graves mediante la prueba de hipótesis hecha con un nivel de confianza específico $(1 - \alpha)$ y el poder de la prueba $(1 - \beta)$, donde α y β representan la probabilidad de cometer un error tipo I y tipo II, respectivamente, mientras que la segunda se relaciona con el efecto de los errores indetectables sobre los parámetros estimados y/o funciones de ellos (Kuang, 1996).

En ambos casos (prueba global y prueba de outlier), la estadística sigue una distribución de chi cuadrada no central. El parámetro de no centralidad de esta distribución está dado por

$$\lambda_0 = \frac{\mathbf{z}_0^T \mathbf{H}^T \mathbf{P} \mathbf{Q}_v \mathbf{P} \mathbf{H} \mathbf{z}_0}{\sigma_0^2} \quad (2.49)$$

Donde \mathbf{z}_0 es el vector de θ outliers, y \mathbf{H} es una matriz de $n \times \theta$, con número de renglones θ , la cual contiene ceros y unos en cada columna que corresponda a un outlier, \mathbf{Q}_v es la matriz de cofactores de los residuales y σ_0^2 es un factor de varianza a priori. La ecuación (2.49) es usada para detectar el vector de error máximo indetectable correspondiente para el parámetro de no centralidad seleccionado.

2.6.1 Hipótesis nula e hipótesis alternativa

Conceptualmente, las pruebas estadísticas sirven para determinar si algo ha salido mal con algún postulado básico; Por ejemplo, la función de probabilidad postulada para el experimento (muestra), o el valor estimado de un parámetro de población tal como la media, la varianza o ambos. Una declaración cuantitativa sobre la función de densidad probabilística postulada y sus

parámetros se define como una hipótesis estadística, la hipótesis estadística puede ser nula (H_0) o alternativa (H_a). Una hipótesis nula (H_0) es la que postula que los parámetros de población tienen algunos valores particulares. En general, para cada hipótesis nula existe un número infinito de hipótesis alternativas (H_a) que asumen valores diferentes para los parámetros estadísticos de la población. Por lo tanto, la hipótesis nula es el nivel de referencia desde el cual cualquier desviación de la hipótesis alternativa diferente tiene que ser detectada por pruebas estadísticas. Cualquier hipótesis estadística puede ser probada. Una prueba de hipótesis estadística H_0 es un algoritmo que conduce a la decisión estadística sobre la validez de H_0 (Kuang, 1996) (Lehmann, 2013).

Lehmann (2012) define una hipótesis estándar H_0 cuando se trata de detectar outliers en un vector de n observaciones geodésicas

$$H_0 : \text{No hay outliers en } \mathbf{y} \quad (2.50)$$

En la ecuación (2.50) se propone que los outliers son afectados exclusivamente por errores aleatorios y por sesgos no aleatorios de tal manera que se desvían del valor verdadero por errores distribuidos normales. Si tratamos de detectar outliers en el modelo (2.10), entonces una posible formulación de H_0 es

$$H_0 : \underline{\mathbf{y}} \sim N(\mathbf{Ax}, \sigma_0^2 \mathbf{P}^{-1}), (\mathbf{x}, \sigma_0^2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \quad (2.51)$$

Donde \mathbf{x} define el vector de parámetros desconocidos, \mathbf{A} es la matriz de diseño, \mathbf{P} es la matriz de pesos y σ_0^2 es el factor de varianza a priori.

Una prueba de hipótesis se lleva a cabo en cinco pasos:

1. Se propone una hipótesis nula H_0 .
2. Se elige un valor estándar para α , por ejemplo 0.1, 0.05 o 0.01.
3. Se elige una región crítica C de probabilidad.
4. Se observa \mathbf{y} .
5. Si $\mathbf{y} \in C$ entonces se rechaza H_0 , de lo contrario se acepta H_0 .

2.6.2 Tipos de errores en test estadísticos

Debido a las variables de muestra, no se puede tomar una decisión estadística definitiva. Se han definido dos tipos de errores potenciales, identificados como errores Tipo I y Tipo II, involucrados en una prueba estadística. El error de Tipo I se define como el error de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando esta es realmente verdadera. La probabilidad de cometer este tipo de error se denomina "nivel de significancia" denotado por α , y la probabilidad de tomar la decisión correcta se denomina "nivel de confianza" $(1 - \alpha)$. El error de Tipo II se define como el error de aceptar la hipótesis nula H_0 cuando es realmente falsa (es decir, H_a es verdadera), y la probabilidad de cometer este tipo de error se denota por β . La probabilidad de tomar la decisión correcta se denomina "potencia de la prueba" $(1 - \beta)$. Esta es la probabilidad de rechazar la hipótesis nula H_0 cuando es realmente falsa.

Tabla 2.1 Tipos de errores en pruebas estadísticas. Tomada de (Lehmann, 2013).

ERROR DE DECISIÓN	Tipo I: H_0 es verdadera, pero rechazada.	Tipo II: H_0 es falsa, pero aceptada.
PROBABILIDAD	Rango α de falsos positivos = tamaño de la prueba = nivel de significancia α	Rango β de falsos negativos = $1 -$ poder de la prueba β
EN CASO DE DETECCIÓN DE UN OUTLIER	Falsa alarma: outlier detectado, las observaciones son buenas.	Falla en poner una alarma: Outliers no detectados

2.6.3 Confiabilidad interna

Como se mencionó anteriormente, la confiabilidad interna se refiere a los límites inferiores para los outliers apenas detectables. Suponiendo un error grosero en el momento, el límite inferior para los errores justos detectables $\nabla_{0,i}$

con la técnica de escrutinio (data snooping) de datos propuesta por Baarda (1968).

$$\nabla_{0,i} = \sigma_i \frac{\delta_0}{\sqrt{r_i}} \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.52)$$

Donde δ_0 representa la distancia mínima detectable entre la hipótesis nula H_0 y la hipótesis alternativa H_a al nivel de confianza seleccionado y la potencia de la prueba. r_i es el número de redundancia y σ_i representa la desviación estándar de la observación l_i .

A pesar del uso de pruebas estadísticas rigurosas, lamentablemente, la presencia de uno o múltiples outliers puede ser pasada por alto usando la prueba del modelo global o la prueba de outlier único. Por consiguiente, es deseable tener un poco de conocimiento de la magnitud de un vector outlier que puede estar presente, para un conjunto dado de probabilidades de error de Tipo I y Tipo II (Knight et al., 2010) (Ghilani, 2011).

2.6.4 Confiabilidad externa

La confiabilidad externa se relaciona con el efecto de errores de observación ∇_i no detectados en las estimaciones de coordenadas desconocidas (Knight et al., 2010).

La confiabilidad externa de una red que es calculada para observaciones individuales, mide los efectos de los errores no detectados en los parámetros estimados (Yetkin, 2013). Baarda sugirió el uso de valores medios de coordenadas para determinar el efecto de un error no detectado con la siguiente ecuación:

$$\lambda_0 = \Delta \mathbf{X}^T \mathbf{Q}_{xx} \Delta \mathbf{X} \quad (2.53)$$

Donde λ_0 representa el parámetro de no centralidad.

El parámetro de no centralidad debe permanecer lo más pequeño posible para minimizar los efectos de errores no detectados en las coordenadas. Es

importante notar que a medida que los números de redundancia en las mediciones se hacen pequeños, los efectos de errores no detectados tienden a aumentar. Por lo tanto, el efecto sobre las coordenadas de una estación de un error en una medición con un bajo número de redundancia es mayor que los efectos de un error similar en una medición con alto número de redundancia. De hecho, es probable que una medición con un alto número de redundancia y error sea detectada como un error (Ghilani, 2006).

El número de redundancias en un ajuste aumenta en uno para cada parámetro que se elimina mediante una ecuación de restricción. Y está dado por la siguiente ecuación:

$$r = n - m + c \quad (2.54)$$

Donde r es el número de redundancias (grados de libertad) dentro del sistema, n es el número de observaciones en el sistema, m el número de parámetros desconocidos y c el número de restricciones matemáticamente independientes aplicadas al sistema.

2.7 Robustez

La robustez puede definirse como la propiedad de un procedimiento que da las respuestas, de una clase que ocurre en la práctica, a partir de suposiciones ideales. Huber (1981) dio una definición más simple: la robustez significa insensibilidad a las pequeñas desviaciones de los residuos.

La robustez se puede describir de tres maneras: la robustez cualitativa (es esencialmente equivalente a la débil continuidad de T), la robustez cuantitativa (es describir, un pequeño cambio en la suposición cuánto cambia los resultados de las estimaciones). El sesgo máximo y la varianza máxima y la robustez infinitesimal (se refiere a la influencia de la función) (Zhu, 1996).

El análisis de confiabilidad tradicional ha sido aumentado con el análisis de la fuerza geométrica utilizando técnicas de deformación, lo que resulta en la concepción de una extensión a la teoría de la confiabilidad llamada análisis de robustez. Para reflejar la terminología estadística contemporánea, se entiende por robustez la insensibilidad a errores graves o errores en los datos.

El análisis de la robustez es una fusión natural de la fiabilidad y de la deformación y se define como la capacidad de resistir deformaciones inducidas por los errores más pequeños detectables según lo determinado en el análisis de confiabilidad interna (Vaníček, Craymer, & Krakiwsky, 2001).

En la mayoría de los países, las redes geodésicas horizontales sólo se prueban en el sentido estadístico. La prueba estadística consiste en: Ensayo de errores graves en las observaciones: Prueba del valor a posteriori de la varianza, prueba de las elipses de confianza absoluta y relativa, individual y colectivamente y pruebas de estimaciones a posteriori de los residuos. Todas estas pruebas se basan en la misma hipótesis nula H_o que postula el vector de “errores de cierre” $\mathbf{w} = \mathbf{I} - \mathbf{f}(\mathbf{x}^{(0)})$ para tener una probabilidad normal de distribución con un valor medio esperado $\mathbf{A} \delta\mathbf{x}$ y esperado covarianza matriz \mathbf{C}_1 .

$$H_o : \mathbf{w} \text{ es distribuida como } N(\xi; \mathbf{A} \delta\mathbf{x}, \mathbf{C}_1) \quad (2.55)$$

2.7.1 Descripción de deformación de una red

Con el fin de poder medir el grado de robustez de una red, tenemos que ser capaces de medir su grado de deformación. La forma más simple de describir una deformación es mediante desplazamientos de puntos individuales de la red. Sobre la base de las ecuaciones normales, se puede escribir la expresión siguiente para las coordenadas ajustadas como combinaciones lineales (Vaníček, 2001):

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^{(0)} + \delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} (\mathbf{I} - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)})) \quad (2.56)$$

Y fácilmente derivan también las estimaciones para desplazamientos $\Delta\hat{\mathbf{x}}$ causado por cambios arbitrarios Δl en las observaciones

$$\Delta\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{C}_1^{-1} \Delta l \quad (2.57)$$

El problema con los desplazamientos es que sus estimaciones son dependientes del datum. Es decir, estas estimaciones dependen no sólo de la geometría de la red y de la exactitud de las observaciones, sino también de la selección de

restricciones para el ajuste, que no tienen nada que ver con la deformación de la red. Si se quiere utilizar la deformación descrita para la cuantificación de la robustez de la red, la descripción de la deformación debe reflejar únicamente la geometría de la red y el tipo y precisión de las observaciones. La decodificación de la deformación debe, por tanto, ser independiente de las restricciones de ajuste (datum). La deformación diferencial es una de tales descripciones. Denotemos un desplazamiento de un punto P_i por

$$\Delta \mathbf{x}_i = \begin{bmatrix} \Delta x_i \\ \Delta y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Entonces el gradiente tensor con respecto a la posición esta dado por

$$\mathbf{E}_i = \text{grad}(\Delta \mathbf{x}_i) = \begin{bmatrix} \partial u_i / \partial x & \partial u_i / \partial y \\ \partial v_i / \partial x & \partial v_i / \partial y \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Donde $\Delta \mathbf{x}_i$ es el vector de desplazamiento de P_i , \mathbf{E} es la matriz de deformación y es independiente de la elección del punto fijo para el ajuste. Es interesante observar la siguiente relación

$$\Delta \mathbf{x}_i = \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{c}_o \quad (2.60)$$

Donde \mathbf{x}_i es el vector de posición del punto P_i y \mathbf{c}_o es un vector de desplazamiento arbitrario, constante para la red. La matriz de deformación \mathbf{E}_i se puede descomponer en dos partes, una simétrica \mathbf{S} y otra anti-simétrica \mathbf{A} . La parte simétrica describe la expansión y contracción de la red, además de su inclinación (shear), mientras que la parte anti-simétrica describe el giro o rotación (w) del punto de interés. Esto es

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{S} + \mathbf{A} \quad (2.61)$$

Donde

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_i}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} \end{bmatrix} \quad (2.62)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$$

En el caso de observaciones GNSS, el valor de r_1 será igual a tres debido a que tres parámetros ($\Delta X, \Delta Y, \Delta Z$) son determinados en cada vector, mientras que el valor de r_2 será igual a $r - 3$ donde r es el número de mediciones en exceso.

La determinación del error mínimo detectable en observaciones GNSS, se complica por el hecho de que las componentes vectoriales están correlacionadas, una solución a este problema es presentado según Snow (2002).

La relación fundamental que existe entre el error mínimo detectable y el parámetro de no centralidad

$$\lambda' = \delta_{\min}^{(k)T} \left[H_k^T (P Q_e P) H_k \right] \delta_{\min}^{(k)} \quad (2.63)$$

Donde H_k^T este indicado en la ecuación (2.20).

$\delta_{\min}^{(k)}$ es el vector del error mínimo detectable.

P es la matriz de pesos

Q_e es la matriz de cofactores de los residuales.

El vector por determinar $\delta_{\min}^{(k)}$ es la magnitud 3×1 , por lo tanto el problema ahora se vuelve indeterminado, ya que conociendo el valor de λ' , se tiene una

ecuación pero tres incógnitas, por lo tanto no tiene solución. Una solución propuesta se aplica con base a ciertas consideraciones razonables de las componentes de los vectores GNSS. Por experiencia se puede considerar que la precisión de la componentes referente a la altura Δz o Δh es la mitad de precisa con la que se obtienen las otras dos componentes horizontales $(\Delta x, \Delta y, \Delta \lambda, \Delta \phi)$, si se asume que la precisión de las componentes horizontales son iguales, entonces se tiene que

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z / 2 \quad (2.64)$$

Relacionando estas precisiones de los tres elementos que componen el vector GNSS en la detección y estimación de los errores en una red geodésica, se puede decir que el error mínimo detectable estará dado por

$$(\delta_{\min}^{(k)})_{x,y,z} = \gamma [1 \ 1 \ 2]^T \quad (2.65)$$

Donde γ es un escalar, asumiendo que el ajuste ha sido llevado a cabo en un sistema geocéntrico espacial, y que las precisiones son consideradas en un sistema horizontal a un sistema espacial, esto es, el valor del vector anterior debe ser rotado a dicho sistema espacial, utilizando la siguiente matriz de rotación

$$R = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi \cos \lambda & -\text{sen}\lambda & \cos\phi \cos \lambda \\ -\text{sen}\phi \cos \lambda & \cos \lambda & \cos\phi \text{sen}\lambda \\ \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Después de la rotación y tomando en cuenta la determinación de los errores mínimos detectables en la ecuación (2.65), se tiene

$$(\delta_{\min}^{(k)}) = R(\delta_{\min}^{(k)})_{x,y,z} = \gamma R [1 \ 1 \ 2]^T \quad (2.67)$$

El vector $[1 \ 1 \ 2]^T$ en (2.64) representa las diferencias de precisión en las componentes norte, este y altura en el sistema de coordenadas horizontal.

Siendo ϕ y λ en (2.66) las coordenadas geodésicas medias de cada uno de los vectores en estudio.

Con base a la restricción hecha en (2.65), el vector $\delta_{\min}^{(k)}$ es unívocamente determinado resolviéndolo por el escalar γ , así se tiene que

$$\gamma^2 = \frac{\lambda'}{\left(R[1 \ 1 \ 2]^T \right)^T \left[H_k^T (PQ_e P) H_k \right] R[1 \ 1 \ 2]^T} \quad (2.68)$$

El parámetro λ' es definido por

$$\lambda' = (f_1 + 1) \frac{\phi^2}{2} \quad (2.69)$$

Donde

$$f_1 = r_1 = 3 \text{ para observaciones GNSS}$$

ϕ es un valor el cual esta tabulado y está en función de $(\alpha, \beta, f_1, f_2)$

$$f_2 = r_2 = r - 3$$

El valor de λ' como ya se ha dicho es el parámetro de no centralidad y está en función de α, β, r_1, r_2 este valor se expresa en tablas estadísticas, por ejemplo en el libro de Lehmer (1944), se encuentra una tabla para poder determinar dicho valor de no centralidad λ' .

Ahora, si el error mínimo detectable para cada triada de vectores estará dado por

$$\delta_k^{(\min)} = \gamma [1 \ 1 \ 2]^T \quad (2.70)$$

2.8 Sistemas GNSS

Los Sistemas Globales de Navegación Satelital (GNSS por sus siglas en ingles). Estos son los diferentes sistemas de posicionamiento que existen en la actualidad, GLONASS (desarrollado por Rusia), GALILEO (desarrollado por la comunidad europea), BEIDOU (desarrollado por China), los cuales tienen el objetivo principal de poder brindar la posición precisa de cualquier punto ubicado

sobre la superficie terrestre utilizando receptores geodésicos GNSS, mas sin embargo tienen otras aplicaciones prácticas como el monitoreo de las distintas capas de la atmosfera.

En el presente trabajo se empleó el sistema GLONASS y el Sistema Global de Posicionamiento (GPS por sus siglas en ingles), el cual fue concebido como un sistema de medición de distancias a partir de posiciones conocidas de satélites artificiales para el posicionamiento de puntos sobre la superficie terrestre, los mares y el aire. En forma efectiva, la señal satelital es continuamente integrada con su propio tiempo de transmisión de manera que al ser recibida, el tiempo de transito pueda ser medido por un receptor sincronizado. El objetivo original del GPS fue la determinación instantánea de posición y velocidad (navegación) y la precisa coordinación del tiempo. GPS es un sistema que tiene como objetivo la determinación de las coordenadas espaciales de puntos respecto de un sistema de referencia mundial. Los puntos pueden estar ubicados en cualquier lugar del planeta, pueden permanecer estáticos o en movimiento y las observaciones pueden realizarse en cualquier momento del día.

Para la obtención de coordenadas el sistema se basa en la determinación simultánea de las distancias a cuando menos cuatro satélites con coordenadas conocidas. Estas distancias se obtienen a partir de las señales emitidas por los satélites, las que son recibidas por receptores especialmente diseñados. Las coordenadas de los satélites son provistas al receptor por el sistema. El sistema GPS administrado por el JPO consiste en tres segmentos (Hofmann-Wellenhof et al., 2008):

2.8.1 Observables

Los observables del posicionamiento por satélite son fundamentalmente dos: de tiempo y de diferencias de fases portadoras. A partir de estos observables se puede calcular la distancia satélite-receptor, mediante la comparación entre la señal que envía el satélite y la que genera el receptor. Pero estas distancias están afectadas por una serie de errores, por consiguiente se denominan pseudo-distancias. Además con estos observables se pueden formar diferentes combinaciones.

2.8.1.1 Medidas de código

Se denomina t^S al tiempo que marca el reloj del satélite cuando emite la señal y t_R al tiempo que marca el reloj del receptor cuando la recibe. Análogamente, los desfases o errores de los relojes con respecto a las escalas de tiempo serán δ^S y δ_R . El valor del tiempo de emisión (t^S), es transmitido en el código que envía el satélite (Hofmann-Wellenhof et al., 2001). La diferencia entre ambas lecturas de tiempo (Δt) es el tiempo que ha tardado la señal en llegar al receptor:

$$\Delta t = t_R - t^S = [t_R(GPS) - \delta_R] - [t^S(GPS) - \delta^S] = \Delta t(GPS) + \Delta\delta \quad (2.71)$$

Donde $\Delta t = t_R(GPS) - t^S(GPS)$ y $\Delta\delta = \delta^S - \delta_R$. El error del satélite δ^S se puede modelar por medio de un polinomio con los coeficientes que son transmitidos en el mensaje de navegación. La pseduo-distancia esta dado por:

$$R = c \cdot \Delta t = c \cdot \Delta t(GPS) + c \cdot \Delta\delta = \rho + c \cdot \Delta\delta \quad (2.72)$$

La distancia ρ es la distancia real existente entre el satélite en la época t^S y el receptor en la época t_R .

2.8.1.2 Medidas de fase

Se denomina $\varphi^S(t)$ a la fase de la portadora recibida por el receptor con una frecuencia f^S y $\varphi_R(t)$ a la fase de una portadora de referencia generada en el receptor con frecuencia f_R . El parámetro t es una poca en la escala de tiempo del sistema. Para la época inicial (comienzo de la observación), se supone que $t_0 = 0$. A partir de la ecuación anterior se obtiene:

$$\varphi^S(t) = f^S t - f^S \frac{\rho}{c} - \varphi_0^S \quad (2.73)$$

$$\varphi_R(t) = f_R t - \varphi_{R0}$$

Las fases iniciales φ_0^S y φ_{R0} son causadas por los errores de los relojes del satélite y el receptor:

$$\begin{aligned}\varphi_0^R &= f^S \cdot \delta^S \\ \varphi_{R0} &= f_R \cdot \delta_R\end{aligned}\tag{2.74}$$

La diferencia de fase entre ambas será:

$$\varphi_R^S(t) = \varphi^S(t) - \varphi_R(t) = -f^S \frac{\rho}{c} + f^S \cdot \delta^S - f_R \cdot \delta_R + (f^S - f_R) \cdot t\tag{2.75}$$

2.8.2 Tipos de posicionamiento

En el posicionamiento relativo se determina la posición de un punto con respecto a otro que generalmente es estacionario y conocido. El método consiste en determinar las tres componentes del vector que une a ambos puntos. A este vector comúnmente se le llama línea base. Denotando al punto A como de referencia del punto B como desconocido o por determinar escribimos en forma vectorial

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_A + \Delta\mathbf{X}_{AB}\tag{2.76}$$

Las componentes del vector de línea base $\Delta\mathbf{X}_{AB}$ son:

$$\Delta\mathbf{X}_{AB} = \begin{bmatrix} X_B - X_A \\ Y_B - Y_A \\ Z_B - Z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{X}_{AB} \\ \Delta\mathbf{Y}_{AB} \\ \Delta\mathbf{Z}_{AB} \end{bmatrix}\tag{2.77}$$

El posicionamiento relativo puede realizarse con pseudorangos o con fases. Generalmente se utiliza la fase por producir resultados más precisos. El posicionamiento relativo requiere de mediciones simultáneas en ambas estaciones. Con esto se pueden formar diferencias simples, dobles o triples.

2.8.2.1 Diferencias simples

Para diferencias simples se emplean en las mediciones de dos receptores A, B a un mismo satélite j (Xu, 2007). La ecuación a utilizar se basa en la diferencia de fases

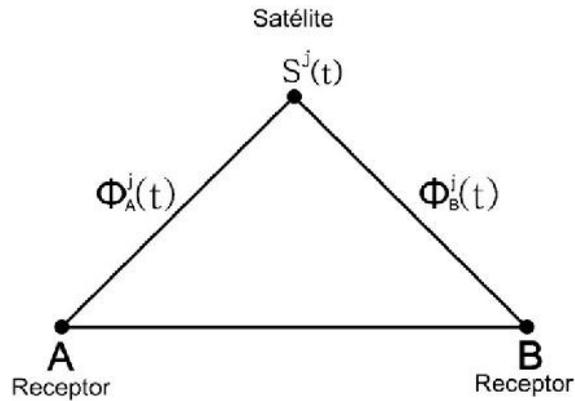


Figura 2.4: Esquemas representativos de diferencias de fases.

$$\Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) = \frac{1}{\lambda} [\rho_B^j(t) - \rho_A^k(t)] + N_B^j - N_A^j + f^j [\delta_B(t) - \delta_A(t)] \quad (2.78)$$

donde N es la ambigüedad y ρ es la distancia geométrica entre el punto de observación y el satélite.

Una expresión más compacta

$$\Phi_B^j(t) - \Phi_A^k(t) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^j(t) + N_{AB}^j + f^j \delta_{AB}(t) \quad (2.79)$$

En esta expresión se ha cancelado el error del satélite permaneciendo aun el error del reloj del receptor.

2.8.2.2 Diferencias dobles

En esta técnica se consideran dos puntos A, B y dos satélites j, k y consiste en la diferencia de dos diferencias simples, esto es

$$\begin{aligned}\Phi_{AB}^{jk} &= \Phi_{AB}^k(t) - \Phi_{AB}^j(t) \\ &= \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t) + N_{AB}^{jk}\end{aligned}\quad (2.80)$$

Con

$$\begin{aligned}\rho_{AB}^{jk} &= (\rho_B^k - \rho_A^k) - (\rho_B^j - \rho_A^j) \\ N_{AB}^{jk} &= (N_B^k - N_A^k) - (N_B^j - N_A^j)\end{aligned}\quad (2.81)$$

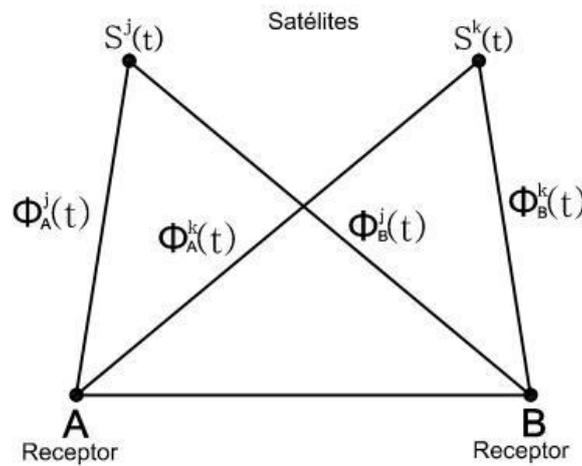


Figura 2.5: Esquema representativo de diferencias dobles de fase.

como se puede apreciar en (2.75) las dobles diferencias son prácticamente libres de errores provenientes de los relojes satelitales y de los receptores. Además para distancias cortas (menores de 10 km) disminuyen significativamente algunos efectos en la señal como son la troposfera y la ionosfera, es por ello que son las más ampliamente utilizadas para posicionamiento preciso (Hofmann-Wellenhof et al., 2008).

Si se requiere eliminar las ambigüedades que dependen del tiempo, se pueden utilizar diferencias de diferencias dobles dadas en dos épocas, estas son llamadas diferencias triples.

Considerando a estas como t_1 y t_2 entonces

$$\Phi_{AB}^{jk}(t_2) - \Phi_{AB}^{jk}(t_1) = \frac{1}{\lambda} [\rho_{AB}^{jk}(t_2) - \rho_{AB}^{jk}(t_1)] \quad (2.82)$$

es llamada la diferencia triple, la cual se puede escribir de forma simplificada

$$\Phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = \frac{1}{\lambda} \rho_{AB}^{jk}(t_{12}) \quad (2.83)$$

La ventaja de las diferencias triples es que cancela también el efecto de las ambigüedades siendo inmune a cambios producidos por el salto de ciclo.

2.9 Sistemas de coordenadas

Debido a los diferentes sistemas de coordenadas y sus respectivos orígenes de referencia es necesario emplear esta transformación para que los vectores medidos sean representados de forma correcta.

2.9.1 Coordenadas geodésicas

Estas son coordenadas referidas a un elipsoide de referencia en particular, para este caso el elipsoide WGS84 (World Geodetic System de 1984), cuyo radio ecuatorial también llamado semi-eje mayor (a) es de 6,378,137 metros y achatamiento (f) es de $1/298.257223563$, también se consideran parámetros como la velocidad angular (ω) y constante gravitacional (GM). En la Figura 2.4 se muestran las coordenadas geodésicas (latitud, longitud y altura elipsoidal)

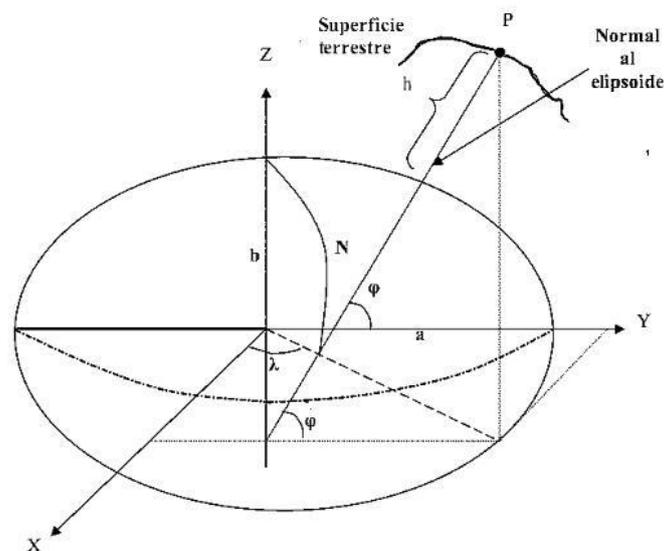


Figura 2.6: Sistema de coordenadas para el elipsoide.

La latitud geodésica ϕ de un punto ubicado sobre la superficie del elipsoide, se define como el ángulo entre la normal al elipsoide en el punto y el plano ecuatorial. Para un punto situado encima de la superficie del elipsoide, hay varias posibles definiciones. La longitud geodésica (λ) es el ángulo que se mide sobre el plano del ecuador desde un meridiano origen (Meridiano de Greenwich) hacia el meridiano del punto P de la normal al elipsoide en los intervalos de 0° a 180° en sentido Este u Oeste. La altura geodésica h se mide desde la superficie del elipsoide siguiendo la normal al elipsoide que pasa por el punto P en la superficie terrestre.

2.9.2 Coordenadas espaciales geocéntricas

La latitud geocéntrica ψ es el ángulo en el centro de la elipse entre el plano del ecuador y una línea hacia el punto cuya latitud se está definiendo.

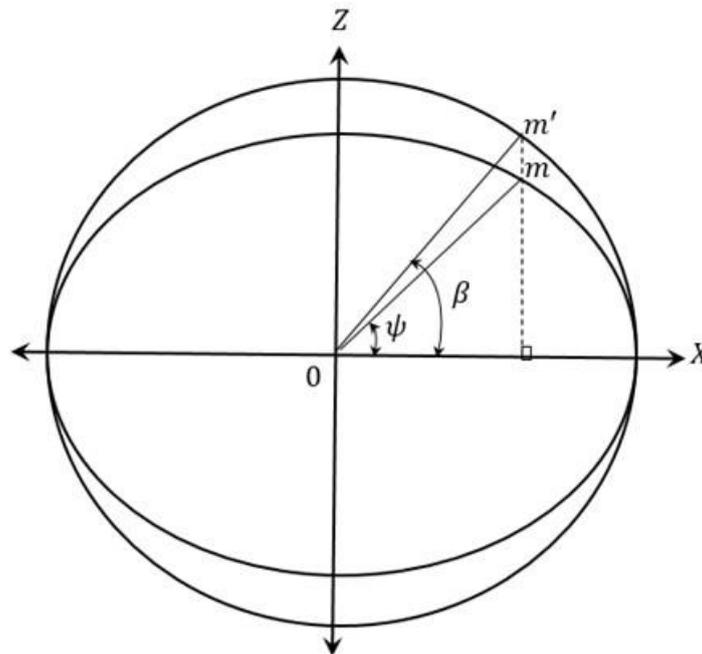


Figura 2.7: Representación gráfica de la latitud geocéntrica ψ .

2.9.3 Coordenadas espaciales topocéntricas

Se consideran dos puntos A y B ubicados sobre la superficie del elipsoide. Las coordenadas rectangulares de espaciales de estos dos puntos pueden determinarse con la ecuación (2.84), teniendo como conocidas las coordenadas geodésicas ϕ , λ , h de estos puntos.

Ahora se introduce un sistema de coordenadas local u , v , w donde el origen para este sistema está en el punto A. El eje w está en dirección de la normal al elipsoide en el punto A. El eje u es perpendicular al eje w en la dirección norte definida por el meridiano geodésico. El eje v es perpendicular al plano $u-w$ apuntando en dirección Este, positiva. Estos ejes se pueden apreciar en la Figura 2.8.

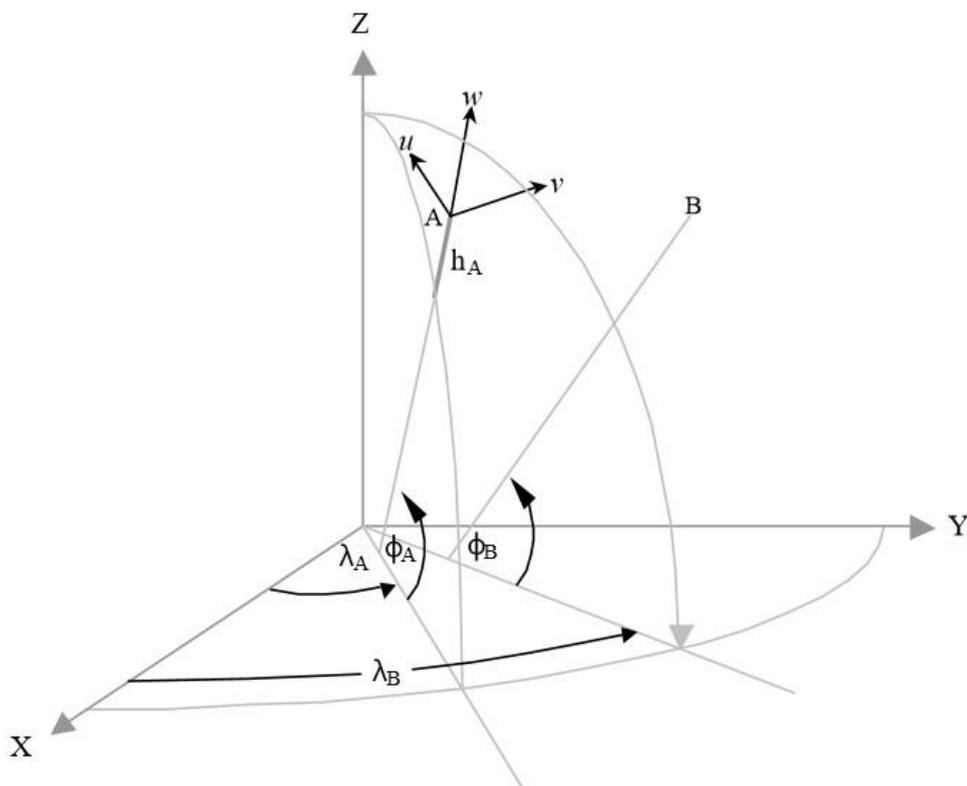


Figura 2.8: Sistema de coordenadas local y rectangular espacial. Tomada de (Rapp, 1985).

2.9.4 Transformación de coordenadas

Conociendo las coordenadas ϕ , λ y h de un punto se pueden calcular las coordenadas rectangulares espaciales como sigue (ver Figura 2.6) (Rapp, 1985)

$$\begin{aligned} X &= (N+h) \cos\phi \cos\lambda \\ Y &= (N+h) \cos\phi \sin\lambda \\ Z &= (N(1-e^2) + h) \sin\phi \end{aligned} \tag{2.84}$$

$$\text{donde } N = (a / 1 - e^2 \sin^2 \phi)^{1/2}$$

Una vez hecho la transformación de geodésicas a rectangulares, ahora sigue tratar el problema inverso, para esto hay que conocer los parámetros del elipsoide y las coordenadas espaciales X, Y, Z . La solución no es integra, puesto que N es una función de latitud. Se han presentado varias soluciones iterativas y de forma cerrada para este problema.

Se presenta la solución iterativa sugerida por Hirvonen y Moritz (1963)

$$\begin{aligned} \tan \lambda &= \frac{Y}{X} \\ \tan \phi &= \frac{1}{1-e^2} \cdot \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \\ h &= \frac{Z}{\sin \phi} - N + e^2 N \end{aligned} \tag{2.85}$$

2.9.4.1 Geodésicas – Geocéntricas

A continuación se hace la determinación de X y Z usando la latitud geocéntrica:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \psi \\ z &= r \sin \psi \end{aligned} \tag{2.86}$$

Donde r es el radio geocéntrico

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \tag{2.87}$$

Ahora sustituyendo y resolviendo para r tenemos lo siguiente

$$x = \frac{a(1 - e^2)^{1/2} \cos \psi}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \psi}} \quad (2.88)$$

$$z = \frac{a(1 - e^2)^{1/2} \sin \psi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \psi}}$$

$$\tan \psi = \frac{z}{x} \quad (2.89)$$

$$\tan \psi = (1 - e^2) \tan \phi \quad (2.90)$$

La ecuación (2.90) representa la relación entre la latitud geocéntrica y geodésica. Para mayor detalle en la derivación de las formulas anteriores consultar (Rapp, 1985).

2.9.4.2 Geodésicas – Topocéntricas

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}\phi \cos \lambda & \text{sen}\phi \text{sen}\lambda & \cos \phi \\ -\text{sen}\lambda & \cos \lambda & 0 \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \text{sen}\lambda & \text{sen}\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

CAPITULO III MATERIALES Y METODOS

3.1 Materiales

3.1.1 Equipo geodésico utilizado

Según las especificaciones técnicas del fabricante el receptor geodésico Geomax Zenith 25 tiene incorporada la tecnología Q-Lock™ que rastrea todos los satélites con la mayor potencia de la señal y realiza comprobaciones periódicas independientes para asegurarse de que puede trabajar incluso en entornos difíciles. Cuenta con 120 canales de doble frecuencia que detecta la señal L1, L2, L2C del sistema GPS y L1, L2 del sistema GLONASS. La precisión en estático horizontal es de 5 mm + 0.5 ppm y en vertical es de 10 mm + 0.5 ppm, en cinemático horizontal de 10 mm + 1 ppm y en cinemático vertical es de 20 mm + 1 ppm.



Figura 3.1: Receptor geodésico doble frecuencia Geomax Zenith 25

En la Figura 3.1 se puede apreciar el receptor que se utilizó para hacer la recolección de datos GNSS al medir las bases geodésicas. La precisión que

tiene el receptor esta asociada a la distancia que se encuentre del punto de control, por ejemplo, si se mide una base geodésica a 10 km de distancia la precisión con que será medida es de 10 mm en la componente horizontal y 15 mm en la componente vertical.

Según el fabricante de cada equipo se maneja una precisión asociada en cada receptor de acuerdo a la distancia entre los puntos medidos. A continuación, se muestran en la Tabla 4.1 las precisiones del equipo utilizado para el posicionamiento en los puntos de interés.

Tabla 3.1 Precisiones de receptores geodésicos doble frecuencia utilizados según fabricante (Carrillo, 2015). Utilizados en las mediciones de la red geodésica regular y bases.

RECEPTOR GEODÉSICO	PRECISIÓN	
	HORIZONTAL	VERTICAL
TOPCON HIPER LITE+	3 mm + 0.5 ppm	5 mm + 0.5 ppm
ASHTECH Z- XTREME	5 mm + 1 ppm	10 mm + 1 ppm
GEOMAX ZENITH 25	5 mm + 0.5 ppm	10 mm + 0.5 ppm

En la Tabla 3.1 se muestra la precisión relativa de los receptores en la componente horizontal y vertical. Por ejemplo, si se mide con el primer equipo a una distancia de diez kilómetros del punto de control, la precisión asociada que tendrá es de 3 mm + 5 mm igual a 8 mm en la componente horizontal y 10 mm en la componente vertical.

3.1.2 Programas de cómputo utilizado

Se hizo uso de dos programas de cómputo, uno para descargar los datos del receptor y convertir los archivos de observación al formato RINEX, el otro se utilizó para procesar las mediciones y obtener la solución por vectores y así exportarlo a un archivo. También se utilizó un lenguaje de programación para programar los algoritmos matemáticos.

3.1.2.1 Topcon Tools

Se utilizó el programa Topcon Tools para procesar las mediciones realizadas de cada base medida, el procesamiento se hizo utilizando las efemérides transmitidas y precisas, tomando como estación de control el vértice de la RGNA CULC, posteriormente se exportó a un archivo cada base geodésica, los parámetros considerados fueron los siguientes:

Tabla 3.2: Formato de archivo con vectores exportados de una red geodésica procesados por Topcon Tools.

i	j	Δx	Δy	Δz	σ_x^2	σ_y^2	σ_z^2	σ_{xy}	σ_{xz}	σ_{yz}
V032	V045	-2229.114	-2313.527	-6266.748	0.002197	0.004605	0.002246	0.000005	-0.000002	-0.000007
V032	V037	4852.455	-1814.864	-587.977	0.007238	0.018888	0.009748	0.000074	-0.00004	-0.00012
V037	V113	4484.258	-2453.617	-2193.402	0.007592	0.012655	0.007777	0.00006	-0.000013	-0.000065
CULC	V032	-1356.086	2301.042	3844.775	0.001645	0.003834	0.002097	0.000003	-0.000002	-0.000005
CULC	V045	-3585.229	-10.44	-2422.552	0.00874	0.016347	0.009015	0.000083	-0.000032	-0.000064
CULC	V037	3496.391	486.231	3256.795	0.002909	0.005576	0.003005	0.000011	-0.000005	-0.000009
CULC	V113	7979.968	-1968.125	1062.418	0.018652	0.028701	0.028632	0.000299	-0.000314	-0.000402
V012	V037	1564.002	2375.217	5812.945	0.0052	0.009463	0.007192	0.000035	-0.000021	-0.00004

En la Tabla 3.2 se muestra el formato que tiene el archivo de vectores procesados por Topcon Tools para después formar las matrices \mathbf{A} , \mathbf{y} , \mathbf{P} .

La matriz \mathbf{A} se forma a partir de la columna uno y dos de la Tabla 3.2. Se hace por medio de las condiciones expuestas en la sección 3.2.1.3.

3.1.2.2 Fortran90

Se utilizó el lenguaje Fortran90 para programar los algoritmos expuestos en la sección 2.3 y 2.4 para automatizar el proceso de análisis de confiabilidad interna y externa.

```
C:\RES\AERG\TESTS>AERG_GNSS
PROGRAMA AERG_GNSS.F90 -----
ANALISIS ESTADISTICO DE REDES GEODESICAS CON TECNICAS GNSS

                                MENU PRINCIPAL

1) LEER DATOS
2) ANALISIS DE PREAJUSTE
3) REALIZAR EL AJUSTE POR MINIMOS CUADRADOS
4) PRUEBA GLOBAL PARA LA VARIANZA DE REFERENCIA
5) ANALISIS DE CONFIABILIDAD INTERNA
6) ANALISIS DE CONFIABILIDAD EXTERNA
7) ESCRUTINIO DE DATOS POR EL METODO DE BAARDAS
8) ESCRUTINIO DE DATOS POR EL METODO DE POPE (TAO)
9) ELIMINACION DE MEDICIONES
10) EXPORTAR DATOS
11) SALIR DEL PROGRAMA
```

Figura 3.2: Interfaz gráfica del programa en Fortran para realizar el análisis de confiabilidad donde se puede apreciar el menú disponible.

3.2 Métodos

3.2.1 Modelo matemático para el ajuste de redes geodésicas con técnicas de medición GNSS

3.2.1.1 Modelo matemático

Una red geodésica es un conjunto de puntos ubicados en la superficie terrestre en los cuales se realizan mediciones geodésicas con el objetivo de determinar sus coordenadas (latitud, longitud y altura) con respecto a un sistema geodésico de referencia. La posición geodésica diferencial se refiere a la determinación de coordenadas a partir de puntos con coordenadas conocidas. La creación de redes geodésicas es con la idea de regular que todos los proyectos topográficos y cartográficos que se realicen, tanto en dependencias estatales, municipales y empresas descentralizadas de servicios que utilicen el área pública municipal para la dotación de dichos servicios, así como de particulares, queden ligados a un solo sistema de referencia geodésico.

A continuación, se presenta el modelo matemático de una red geodésica que se forma al realizar mediciones con GNSS en cada uno de sus puntos y se da solución por medio del modelo (2.10) de mínimos cuadrados. Cada matriz utilizada en el modelo matemático se obtiene de un archivo que contiene vectores medidos (de las tres componentes; Este, Norte y Altura) y procesados, el cual se obtuvo de sesiones de medición GNSS. Se asume que el procesamiento de las bases o vectores generados se realizó con software especializado, algunos de los software más empleados son Topcon Tools.

La formación de las matrices \mathbf{A} , \mathbf{y} y \mathbf{P} para una red geodésica GNSS se presenta a continuación de acuerdo a cada caso.

3.2.1.2 Ecuaciones de observación

Una red geodésica GNSS está conformada por lados o vectores base medidos con equipo GNSS. Por cada lado medido se forman tres ecuaciones de observación, una por cada componente vectorial Δx_{ij} , Δy_{ij} , Δz_{ij} consideradas como las mediciones \mathbf{y}_k , \mathbf{y}_{k+1} y \mathbf{y}_{k+2} respectivamente ($k=1..nv$) del modelo (2.10) designando por i y j los puntos de atrás y adelante (ver Figura 3.3), respectivamente, del vector o lado en cuestión. Para las ecuaciones de observación se presentan tres casos los cuales dependen de la posición recíproca entre los puntos conocidos y no conocidos, los cuales son:

- ✓ Caso 1. Cuando ningún punto del vector es conocido, tenemos

$$\begin{aligned}\Delta x_{ij} &= x_j - x_i + e_{\Delta x} \\ \Delta y_{ij} &= y_j - y_i + e_{\Delta y} \\ \Delta z_{ij} &= z_j - z_i + e_{\Delta z}\end{aligned}\tag{3.1}$$

- ✓ Caso 2. Cuando el punto i o de atrás es conocido y el punto j por conocer

$$\begin{aligned}\Delta x_{ij} + x_i &= x_j + e_{\Delta x} \\ \Delta y_{ij} + y_i &= y_j + e_{\Delta y} \\ \Delta z_{ij} + z_i &= z_j + e_{\Delta z}\end{aligned}\tag{3.2}$$

3.2.1.3 Matriz A

En este caso la matriz A llamada matriz de coeficientes o de diseño con dimensión de $n \times m$, contiene las derivadas parciales de primer orden de las n observaciones con respecto a cada uno de los m parámetros desconocidos (para modelos no lineales). Debido a que las ecuaciones de observación de las redes GNSS son lineales, los valores que conforman esta matriz son 1, 0, -1 y se forma a partir de los tres casos mencionados anteriormente.

- ✓ Caso 1 se le asigna un (-1) a los elementos del origen del vector y un (+1) a los elementos donde llega el vector.
- ✓ Caso 2 se le asigna un (+1) a los elementos destino que van de un punto conocido a uno por conocer.
- ✓ Caso 3 se le asigna un (-1) a los elementos origen que van hacia un punto conocido.

3.2.1.4 Vector de observaciones

El vector y que tiene dimensión $n \times 1$ es formado cada una de las observaciones realizadas durante las sesiones de medición. Se considera lo siguiente para determinar el valor final de dicho vector según el caso:

Para el vector i con $i = 1 \dots nv$

$$\begin{aligned} y_i &= x_i + \Delta x & y_{(i-1)3+1} \\ y_{i+1} &= y_i + \Delta y & y_{(i-1)3+2} \\ y_{i+2} &= z_i + \Delta z & y_{(i-1)3+3} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Donde

nv es el número de vectores medidos.

$n = 3nv$ número total de mediciones.

- ✓ Si la observación se realizó entre dos puntos desconocidos, el valor correspondiente en el vector será la proyección medida.

- ✓ Si la observación se realizó de un punto con coordenadas conocidas hacia un punto con coordenadas por determinar, el valor correspondiente será igual a la coordenada conocida más el valor de la componente medida.
- ✓ Si la observación se realizó de un punto con coordenadas desconocidas hacia uno con coordenadas conocidas, el valor del vector será igual a la proyección medida menos el valor de la coordenada de control correspondiente.

3.2.1.5 Vector de parámetros

El vector de parámetros \mathbf{X} contiene la solución al modelo (2.10) y está dado por la ecuación (2.11).

3.2.1.6 Matriz de varianza de las observaciones

Dentro del posicionamiento GNSS las observaciones están correlacionadas en sus tres componentes del vector, por lo tanto se genera una sub-matriz de 3×3 para cada vector observado. Estas sub-matrices están compuestas por covarianzas y es simétrica con seis elementos; y además tiene la siguiente forma (Romero, 2014).

$$\Sigma_y = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma_2 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & 0 & \Sigma_{nv} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

Donde nv se refiere al número de vectores medidos en la red.

$$\Sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z^2 \end{bmatrix} \quad i = 1 \dots nv \quad (3.6)$$

Σ_i corresponde a las componentes $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ medidas del vector i entre los puntos.

De aquí tenemos que la matriz de pesos \mathbf{P} es

$$\mathbf{P} = \sigma_0^2 \Sigma_y^{-1} \quad (3.7)$$

donde

σ_0^2 es la varianza de referencia que generalmente se asume como la unidad.

Por cada vector correlacionado se forma una matriz de 3×3 , es decir, tiene la siguiente forma

$$\begin{array}{ccc} & \Delta x_j & \Delta y_j & \Delta z_j \\ \Delta x_i & 1 & 0 & 0 \\ \Delta y_i & 0 & 1 & 0 \\ \Delta z_i & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad (3.8)$$

Esto significa que por cada vector medido se genera una submatriz con unos en su diagonal principal. Entonces de acuerdo con el modelo (3.8) las columnas de la matriz \mathbf{A} será de $n \times 3$ y en los renglones de $n \times 3$.

CAPITULO IV

PRUEBAS NUMÉRICAS

4.1 Descripción de pruebas

En el presente trabajo de tesis se realizó un estudio sobre la confiabilidad interna y externa de una base geodésica medida con diferentes distancias al vértice o vértices de referencia. Las principales pruebas realizadas fueron: prueba global, detección de outliers por el método de Baarda, método de Pope.

Con el propósito de probar los algoritmos generados se utilizó una red regular de ocho puntos, con distancias promedio de cinco kilómetros. Los resultados arrojados se presentan a continuación.

4.2 Prueba estadística con la varianza de referencia de una red geodésica regular

Esta red que se tomó para el análisis fue medida y posicionada con anterioridad con equipo GNSS de doble frecuencia en una sesión llevada a cabo el día 07 de diciembre del año 2012, la cual se muestra en la Figura 4.1.

Primeramente, el trabajo consistió en la determinación de las coordenadas de 8 puntos, de la red mencionada anteriormente, tomando como base el punto CULC de la Red Geodésica Nacional Activa del Instituto Nacional de Estadística, Geografía e Informática (INEGI) ubicado en Culiacán.

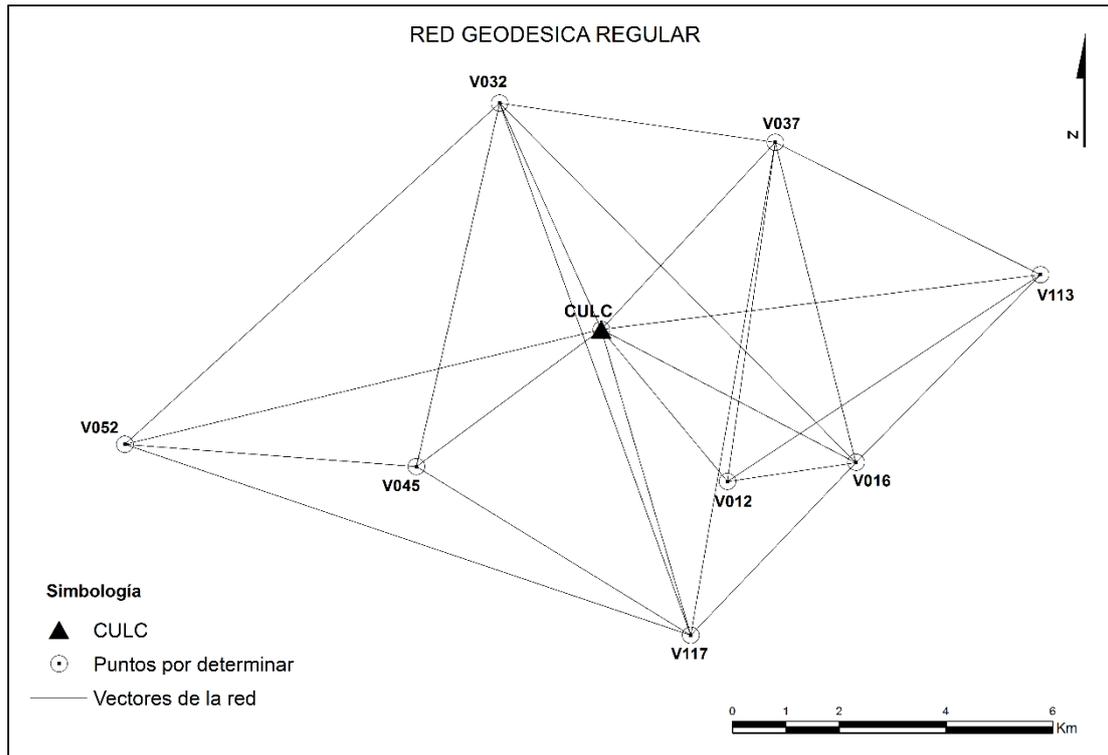


Figura 4.1: Red geodésica regular establecida con mediciones GNSS en la ciudad de Culiacán.

En la sesión de medición se generaron 24 observaciones (vectores) simultáneas entre los puntos, los cuales se procesaron con el programa Topcon Tools y se exportaron a un archivo las componentes vectoriales sin ajustar. Los tiempos de medición promedio entre vectores fueron de una hora a un intervalo de 5 segundos. Ver ejemplo de formato en la Tabla 3.1. Los puntos conocidos para este caso fueron uno, el número de puntos por determinar ocho ($m = 24$), los vectores medidos 24 ($n = 72$) y mediciones en exceso ($r = 48$).

Los resultados del procesamiento por el programa Topcon Tools en el sistema espacial se muestra en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1 Coordenadas resultantes del programa Topcon Tools de la red geodésica regular con distancias promedio de 5 km (ver Figura 4.1).

ESTACION	COORDENADAS			DESVIACION ESTANDAR			
	X (m)	Y (m)	Z (m)	E (m)	N (m)	u (m)	Hz (m)
CULC	-1733739.032	-5528108.585	2658500.526	0	0	0	0
V012	-1731806.653	-5529997.59	2655944.386	0.004	0.003	0.009	0.005
V016	-1729459.593	-5530537.59	2656297.882	0.003	0.003	0.007	0.004
V032	-1735095.116	-5525807.533	2662345.298	0.002	0.002	0.006	0.003
V037	-1730242.65	-5527622.369	2661757.328	0.003	0.003	0.008	0.004
V045	-1737324.23	-5528121.06	2656078.548	0.003	0.003	0.008	0.004
V052	-1742498.022	-5526346.868	2656369.162	0.003	0.003	0.008	0.004
V113	-1725758.394	-5530075.993	2659563.94	0.007	0.006	0.016	0.009
V117	-1732769.431	-5530944.351	2653282.556	0.003	0.003	0.008	0.004

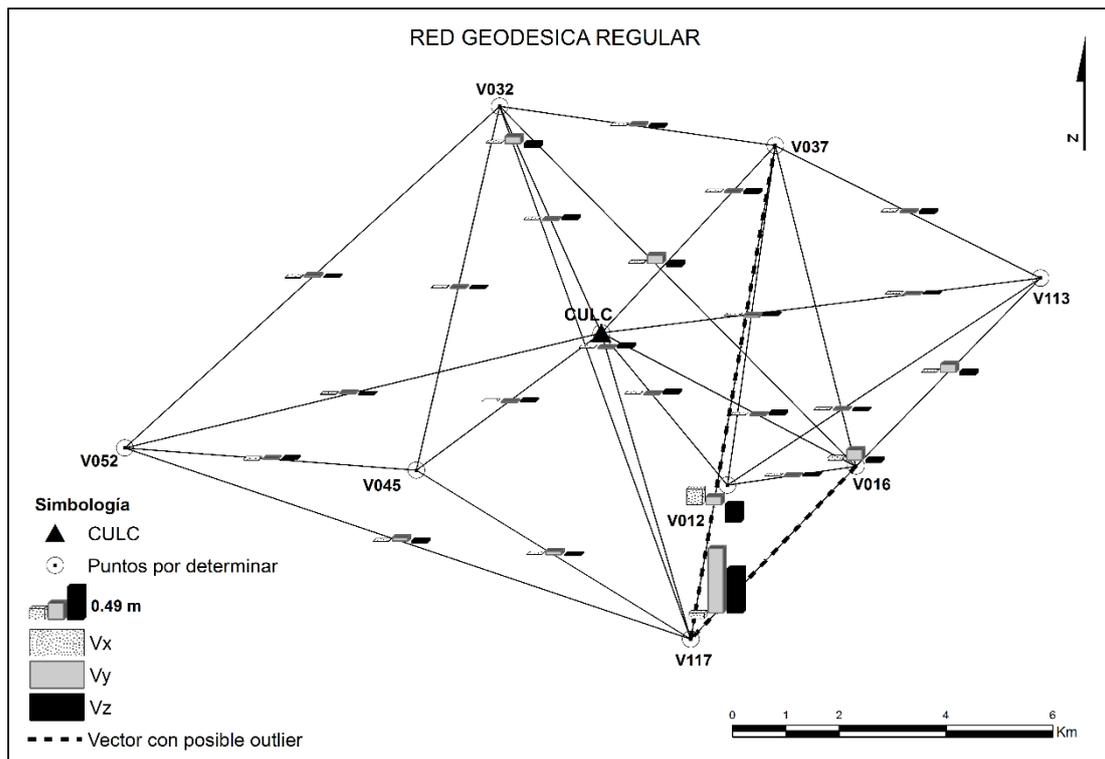


Figura 4.2: Residuos de las mediciones de la red geodésica GNSS.

Para la Figura 4.2 se tiene que $n = 72$, $m = 24$, $r = 48$ y $\hat{\sigma}_0^2 = 18.343m^2$ y se puede apreciar el comportamiento de los residuos de las mediciones, se observa que el vector numero 18 (V037-V117) presenta una alteración en la componente X y

Z y a su vez en el vector numero 20 (V016-V117) existen residuos grandes en la componente Y y Z. Esto puede verse reflejado a continuación en las pruebas estadísticas.

4.2.1 Prueba global

La estimación de la varianza de referencia originada por el ajuste es $\hat{\sigma}_0^2 = 18.343m^2$ de acuerdo a la ecuación (2.14).

Como siguiente paso se elabora la prueba global. De acuerdo a la cual la hipótesis nula es rechazada. Los resultados de la prueba son los siguientes:

$$T = 880.466$$

$$\chi_{1-\alpha/2}^2 = 69.022$$

$$\chi_{\alpha/2}^2 = 30.754$$

Por lo tanto, se modifica para llevar a cabo el escrutinio de datos de acuerdo a la teoría expuesta en la sección 2.4.5.

4.2.2 Detección de outliers

Se aplicó la detección de outliers por el método de Baarda, el resultado se muestra en la siguiente tabla.

Tabla 4.2: Resultados de detección de outliers de la red geodésica por el método de Baarda.

VECTOR	dx (m)	dy (m)	dz (m)	ω_i
1	0.27922	0.11882	-0.0941	1.95996
2	0.06171	0.11436	-0.21687	1.95996
3	0.03541	-0.03266	-0.13077	1.95996
4	-0.01198	-0.07021	0.18891	1.95996
5	-0.00201	-0.14068	0.06989	1.95996
6	-0.06107	-0.05184	0.06397	1.95996
7	-0.00247	-0.10449	0.05671	1.95996
8	-0.0493	-0.22318	0.14061	1.95996
9	0.00977	0.1778	-0.18357	1.95996
10	0.1051	0.73179	-0.60735	1.95996
11	0.12711	1.56221	-0.8286	1.95996
12	0.073	0.18888	-0.08263	1.95996
13	0.06451	0.69536	-0.49524	1.95996
14	0.34064	0.1235	-0.21499	1.95996
15	-0.1235	-0.08781	0.7594	1.95996
16	0.07262	0.38013	-0.31219	1.95996
17	0.08474	0.50209	-0.23269	1.95996
18	2.92097	0.83439	-2.06457	1.95996
19	-0.07154	0.61537	-0.24854	1.95996
20	-0.60925	-4.46655	3.81817	1.95996
21	-0.24467	0.17131	-0.01088	1.95996
22	-0.97365	0.11743	0.25802	1.95996
23	-0.21989	0.21573	-0.12856	1.95996
24	-0.04935	0.12856	-0.15444	1.95996

En la Tabla 4.2 se muestra el resultado de aplicar el test estadístico para la detección de outliers por el método de Baarda, como se observa en el vector número 18, en la componente X y Z sobrepasa el valor crítico w_i y en el vector número 20 en la componente Y y Z también sobrepasa el valor crítico, cabe señalar que estas observaciones fueron eliminadas. Se puede encontrar una relación entre los residuos de las mediciones (ver Figura 4.2) y los posibles outliers detectados en la Tabla 4.3 por el método de Baarda.

También se aplicó la prueba de Pope y los resultados fueron consistentes con la prueba de Baarda, los cuales se pueden observar en la Tabla 4.3.

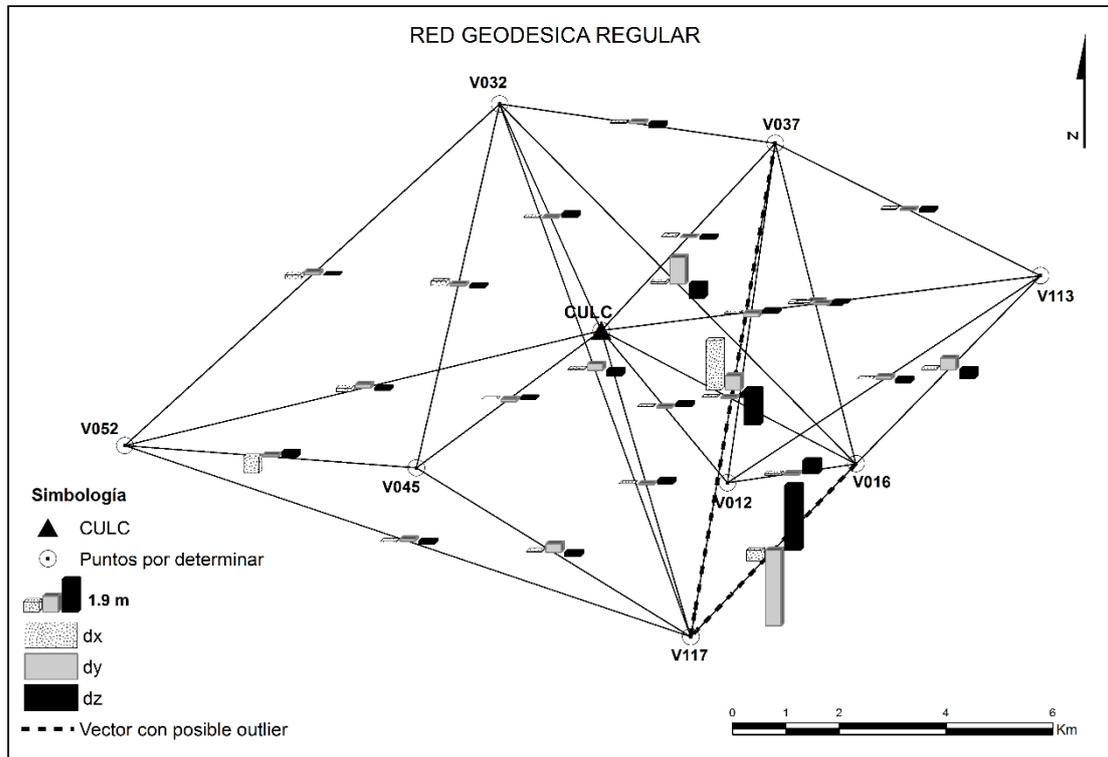


Figura 4.3: Representación gráfica de la detección de outliers de la red geodésica GNSS regular.

Se puede observar en la Figura 4.3 que el vector número 18 y 20 superan el valor crítico w_i (ver Tabla 4.3) y por lo tanto se consideran que contienen outliers en sus componentes.

4.2.3 Confiabilidad interna

Como se mencionó en la sección 2.6.3 la confiabilidad interna se refiere a la capacidad de la red para detectar outliers, es decir, los límites inferiores para su detección.

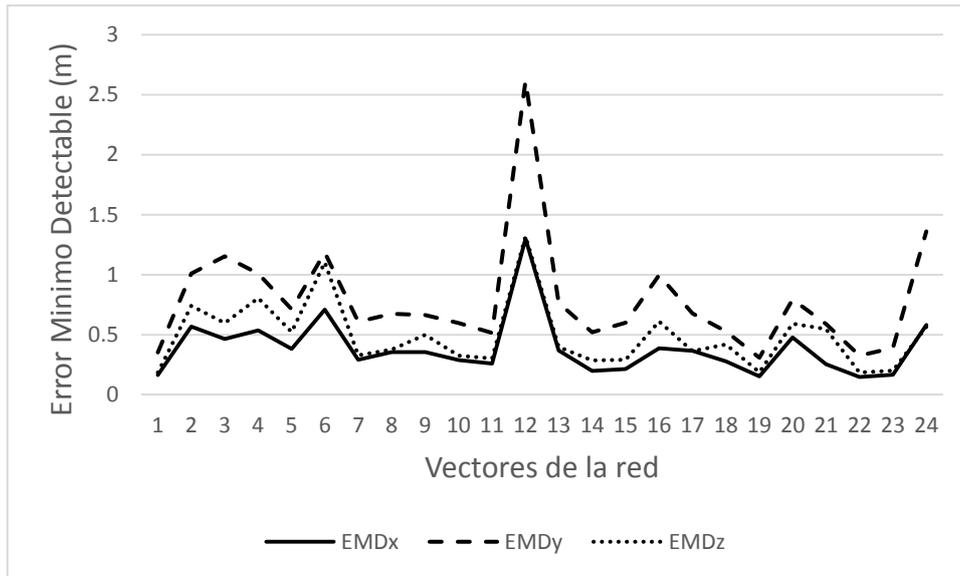


Figura 4.4: Errores Mínimos Detectables de la red geodésica regular.

En la Figura 4.4 se aprecian los Errores Mínimos Detectables (EMD) de cada vector en las componentes x, y, z . En el vector numero 12 existe un error mínimo detectable grande. La media para los EMD fue $\mu_{EMD_x} = 0.386m$, $\mu_{EMD_y} = 0.790m$ y $\mu_{EMD_z} = 0.490m$. La desviación estándar resulto $\sigma_{EMD_x} = 0.246m$, $\sigma_{EMD_y} = 0.480m$ y $\sigma_{EMD_z} = 0.284m$. Los valores máximos y mínimos fueron los siguientes $MAX_{EMD_x} = 1.299m$, $MAX_{EMD_y} = 2.616m$, $MAX_{EMD_z} = 1.320m$, $MIN_{EMD_x} = 0.147m$, $MIN_{EMD_y} = 0.308m$ y $MIN_{EMD_z} = 0.184m$ respectivamente. Se puede observar que los valores más pequeños se presentan en la componente x , mientras que los más grandes se dieron para la componente y .

4.2.4 Confiabilidad externa

Como se mencionó en la sección 2.6.4, la confiabilidad externa hace referencia al efecto que los EMD tienen en la estimación de los parámetros finales, en este caso a las coordenadas de los puntos por determinar.

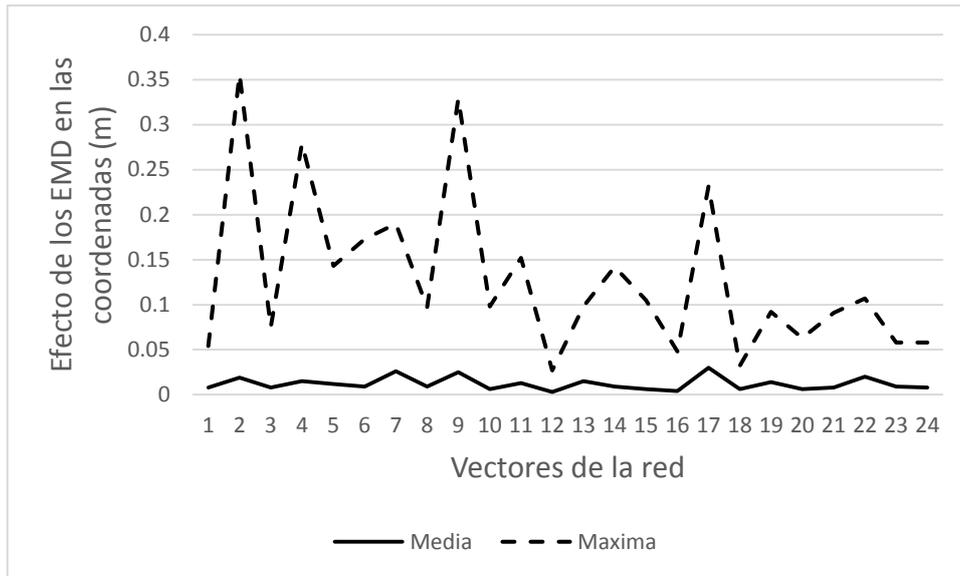


Figura 4.5: Efectos de los Errores Mínim Detectables en las coordenadas de los puntos de la red geodésica. Con $\mu = 0.012m$ y $\sigma = 0.007m$.

En la Figura 4.5 se muestran los efectos en las coordenadas causados por los EMD, se observa que la media se comporta de manera uniforme, mientras que la máxima es variable y se presenta una relación entre los EMD (ver Figura 4.4) y los efectos en las coordenadas, se observa que los efectos máximos en las coordenadas causados por los EMD tienen los valores más pequeños donde existen los mayores EMD.

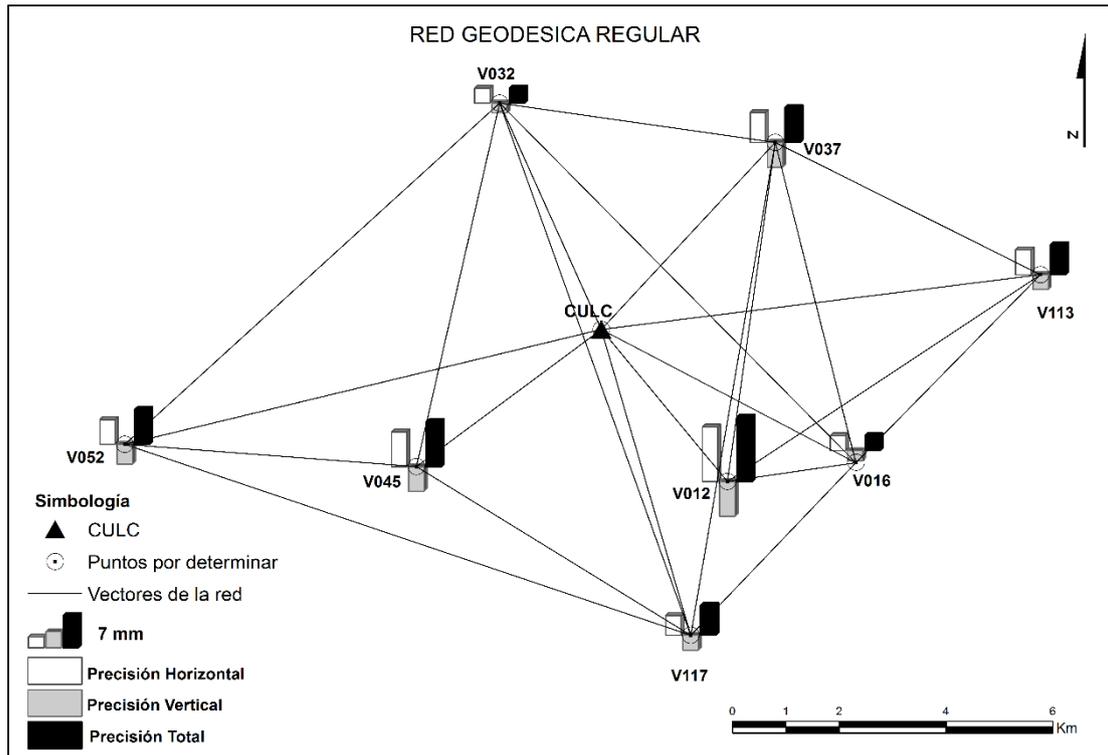


Figura 4.6: Precisión horizontal, vertical y total de los puntos por determinar de la red geodésica regular antes de eliminar los outliers. Con $\mu_H = 0.006m$, $\mu_T = 0.007m$, $\sigma_H = 0.003m$ y $\sigma_T = 0.003m$.

En la Figura 4.6 se aprecia la similitud entre la precisión horizontal y total de la red geodésica, también se observa que son valores menores que diez milímetros, excepto en el punto número uno, que resultó ser de 11 mm.

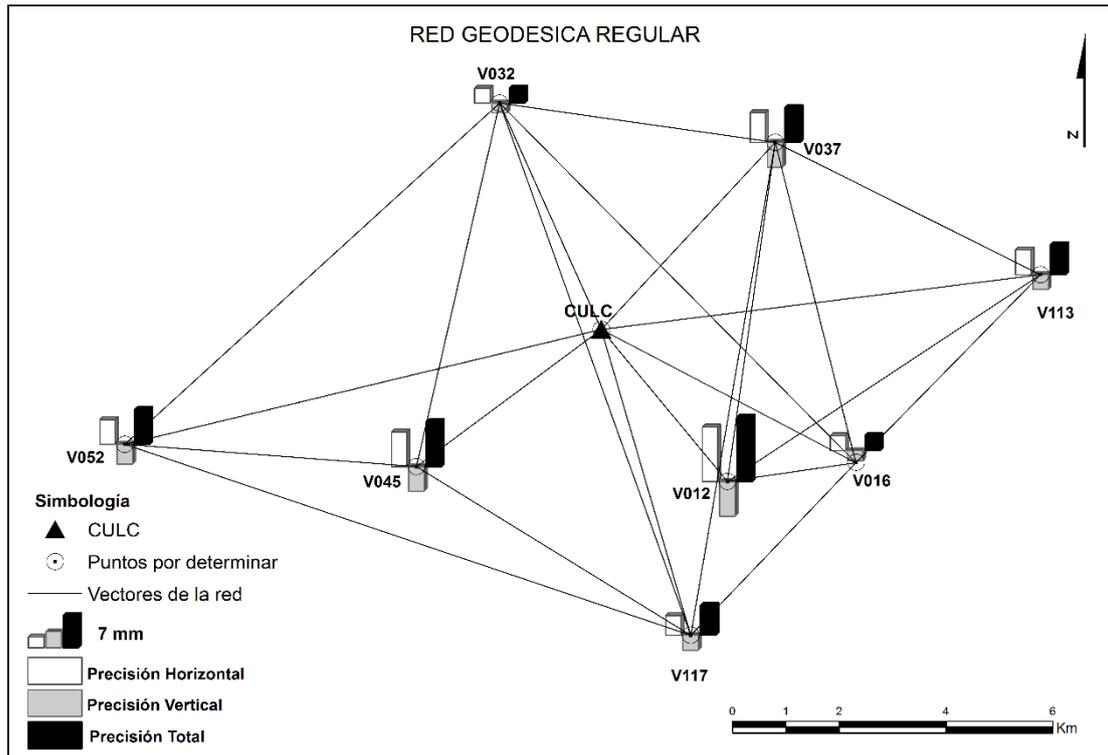


Figura 4.7: Precisión horizontal, vertical y total de los puntos por determinar de la red geodésica regular después de eliminar los outliers detectados. Con $\sigma_H = 0.048m$, $\sigma_V = 0.029m$ y desviación estándar promedio $\sigma = 0.038m$.

En la Figura 4.7 se representa la precisión horizontal, vertical y total de los puntos de la red geodésica por determinar, después de haber realizado el escrutinio de datos y realizar el análisis de detección de outliers por el método de Baarda y eliminar los posibles outliers se observa que la precisión aumenta a decímetros.

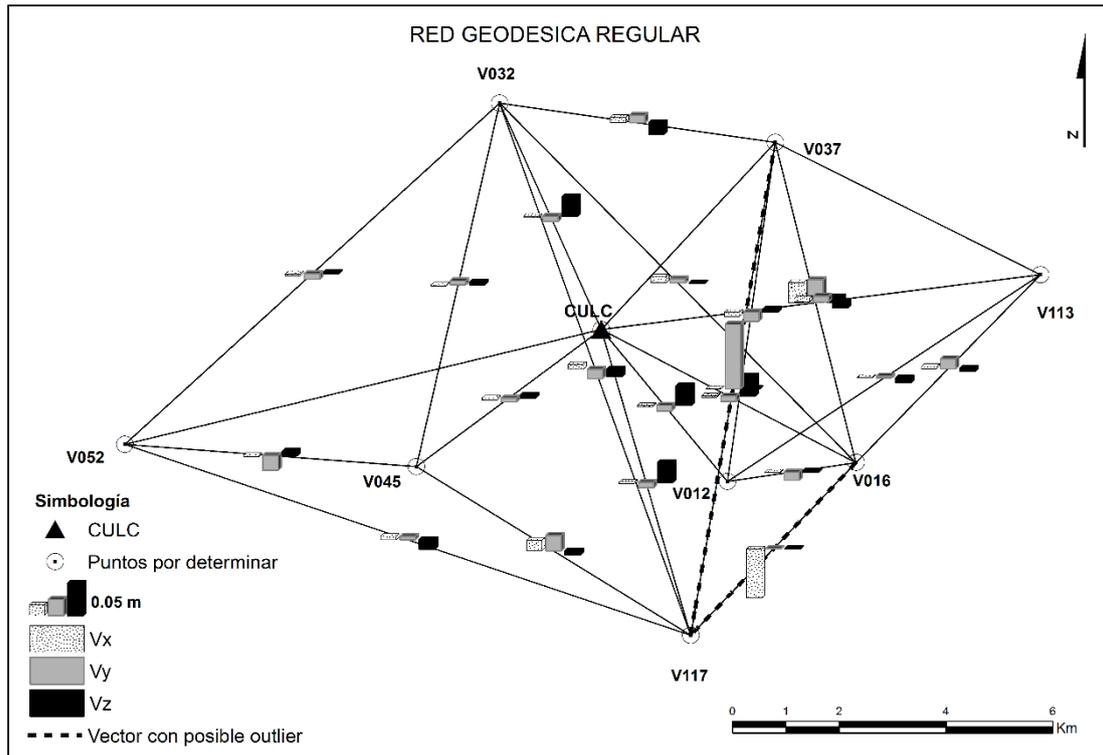


Figura 4.8: Residuos de las mediciones después de eliminar los posibles outliers detectados en la red geodésica regular. Con $\hat{\sigma}_0^2 =$, $n = 68$, $m = 24$ y $r = 44$.

En la Figura 4.8 se puede apreciar el comportamiento de los residuos de las mediciones después de haber eliminado los outliers detectados por el método de Baarda, se observa que el vector número 18 presenta un valor máximo en la componente Y de diez centímetros y a su vez en el vector número 20 el residuo más grande es en la componente X con un valor de siete centímetros.

4.3 Análisis de confiabilidad de una base geodésica

Se midieron ocho bases geodésicas GNSS de aproximadamente 500 m de longitud orientadas a diferentes distancias del punto de referencia, de manera que quedaran perpendiculares al punto de control CULC de la Red Geodésica Nacional Activa para procesar los datos y obtener los vectores medidos. A continuación, se muestra una tabla con los puntos medidos y el tiempo de cada sesión.

4.3.1 Análisis de estabilidad

Tabla 4.3 Distancias al punto de referencia y tiempo de medición de las bases geodésicas GNSS medidas.

PUNTOS		DISTANCIA (Km)	TIEMPO (Hrs)
CULC	V25383	0.5	1
	V25386		
CULC	V25387	1	1
	V25387A		
CULC	V25398	5	1
	V25398A		
CULC	V25927	10	1
	V25927A		
CULC	V25957	30	2
	V25957A		
CULC	V251004	55	4
	V25104A		
TNTB	V251004	150	4
	V25104A		
IDGO	V25927	300	4
	V25927A		
IDGO	V251004	345	4
	V25104A		

En la Tabla 4.3 se aprecia la relación de los puntos medidos. En la primera columna se indica el punto de control, en la segunda se encuentran los puntos por determinar medidos, en la tercera aparece la distancia a la que se encuentra la base geodésica GNSS del punto de control y en la última columna el tiempo de observación de las bases GNSS.

En las siguientes graficas se muestra el análisis hecho las bases GNSS medidas.

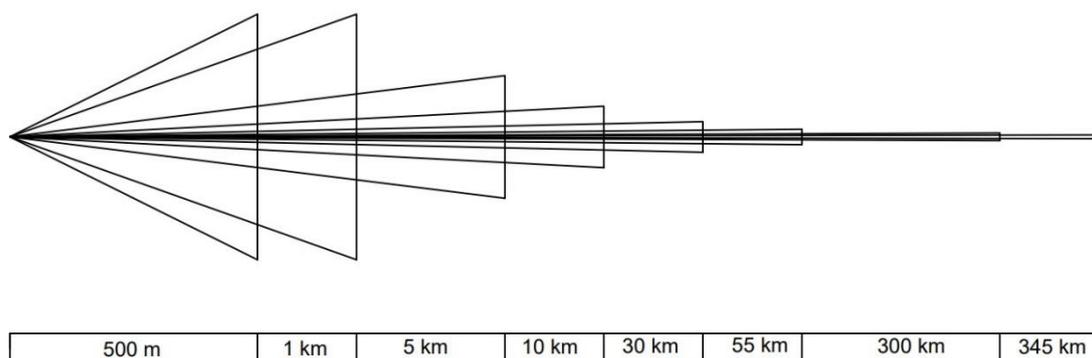


Figura 4.9: Esquema representativo de las bases geodésicas GNSS medidas. Numero de mediciones $n=9$, numero de incógnitas $m=6$ y mediciones en exceso $r=3$.

En la Figura 4.9 se puede apreciar la geometría que forma cada base geodésica GNSS de acuerdo a la distancia que se encuentra del punto de referencia. En este caso, es la estación CULC de la RGNA. Se observa que en el caso de la base de 500 m tiene una geometría regular, así mismo se puede considerar que la base de 30 km también la tiene, pero en la base de 300 km y 345 km existe una geometría irregular y los dos vectores que se forman con el punto CULC están casi paralelos entre sí.

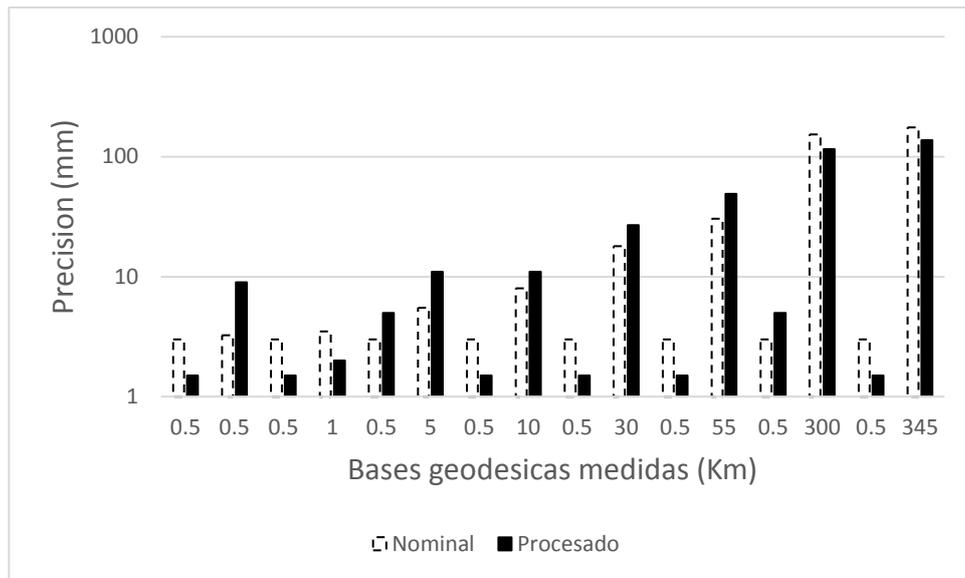


Figura 4.10: Comparación de precisión nominal y procesado de las bases geodésicas GNSS.

La precisión nominal se obtuvo de acuerdo a las especificaciones técnicas del fabricante del equipo con el que se midieron las bases la cual fue $3 \text{ mm} + 0.5 \text{ ppm}$ y la precisión de procesado se obtuvo de acuerdo a los vectores medidos.

En la Figura 4.10 se observa que la precisión nominal es relativamente mayor que la precisión de procesado para la base de 500 m, 5 km, 10 km, 30 km y 55 km. Para las bases de 300 km y 345 km la precisión de procesado es mayor que la precisión nominal. Por ejemplo, para la base geodésica de 1 km su precisión nominal es igual a 3.5 mm y la precisión de procesado es igual a 2 mm. Para la base geodésica de 30 km la precisión nominal resultó 10 mm mayor que la de procesado, y para las bases de 300 km y 345 km la precisión de procesado aumentó, resultando 37 mm mayor que la precisión nominal.

La diferencia mínima en las precisiones fue de 1.5 mm y se dio en la base geodésica de 500 m y 1 km, y la máxima diferencia fue en la base de 345 km de 38.5 mm, respectivamente.

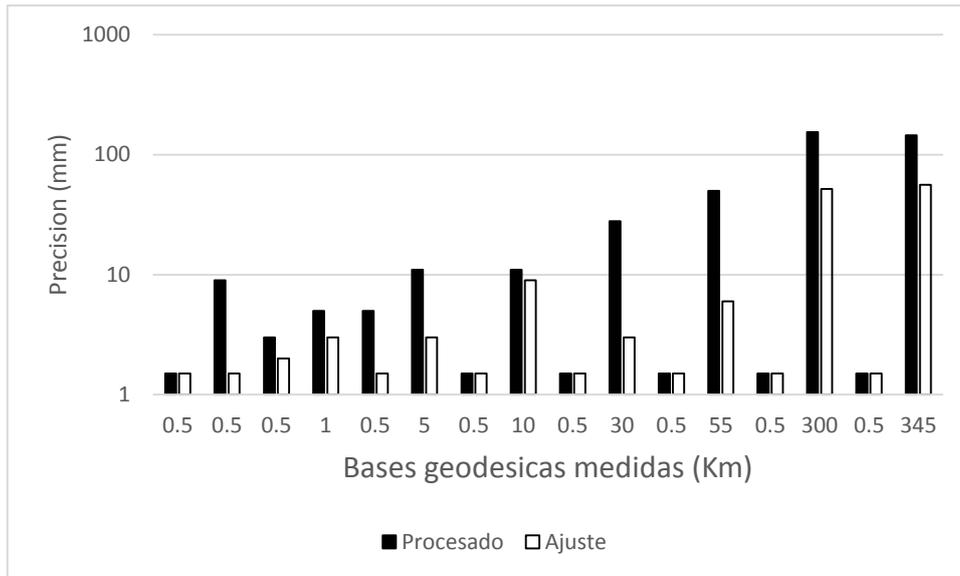


Figura 4.11: Comparación de precisión de procesado y ajuste de las bases geodésicas GNSS.

En la Figura 4.11 se aprecia que la precisión de ajuste es mayor para todas las bases geodésicas medidas. La diferencia mínima de la precisión fue de 2 mm y se presentó en la base geodésica de 1 km y 10 km respectivamente, la diferencia máxima fue en la base de 300 km con 102 mm siendo la precisión de ajuste mayor. El porcentaje de las diferencias de la precisión de la base geodésica de 55 km, 300 km y 345 km fueron 113%, 150% y 162% a favor de la precisión de ajuste, respectivamente.

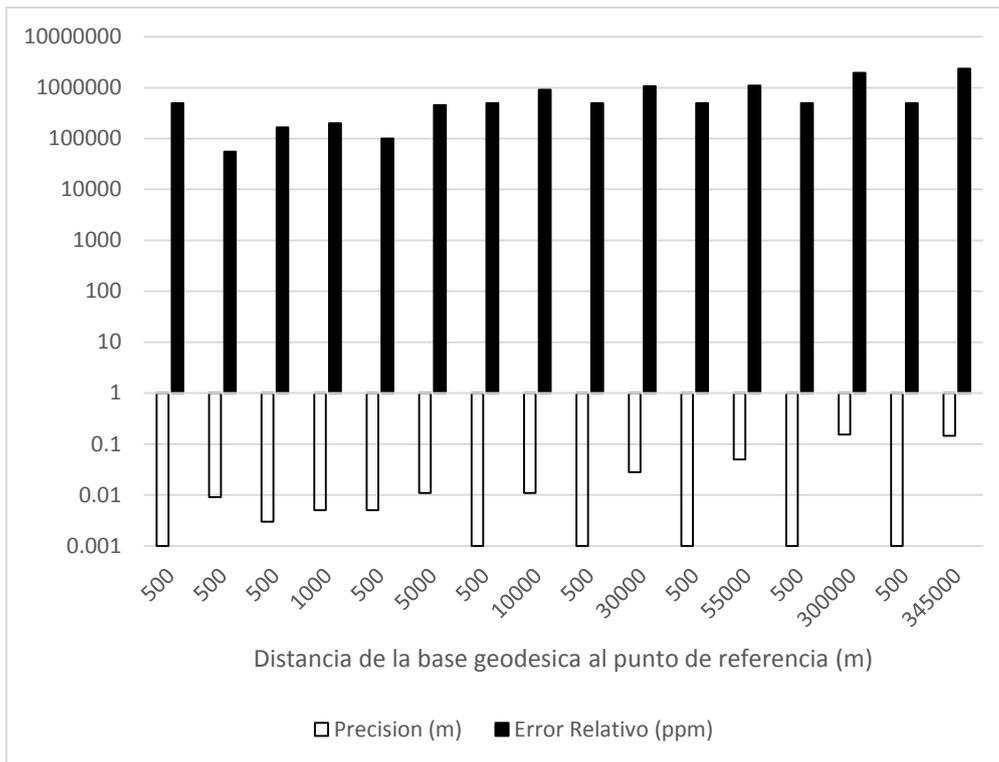


Figura 4.12: Precisión y Error Relativo de las bases geodésicas GNSS.

En la Figura 4.12 se puede apreciar la precisión de cada base geodésica GNSS y también el error relativo asociado a cada vector medido. Por ejemplo, en la base geodésica que está a 10 km de distancia del punto de referencia, se compone por tres vectores, uno con longitud de 500 m aproximadamente (distancia entre receptores) y dos más que se forman desde el punto de referencia hasta donde se colocó la base, por lo tanto, se consideraron de igual precisión. El error relativo asociado al vector de 500 m es de 1:500000 ppm y para el vector de 10 km es de 1:900000 ppm. Para la base geodésica que se encuentra a 55 km del punto de referencia, se observa que la precisión asociada al vector de 500 m es de 1 mm con un error relativo de 1:500000 ppm y para el vector de 55 km la precisión es de 5 mm y con un error relativo de 1:110000 ppm. Para la base de 300 km se tiene una precisión de 15 mm y un error relativo de 1:195000 ppm.

4.3.2 Confiabilidad interna

Cabe mencionar que también se aplicó la prueba global para todas las bases geodésicas GNSS y todas pasaron la prueba.

A continuación, se muestra un análisis de confiabilidad interna de las bases geodésicas GNSS.

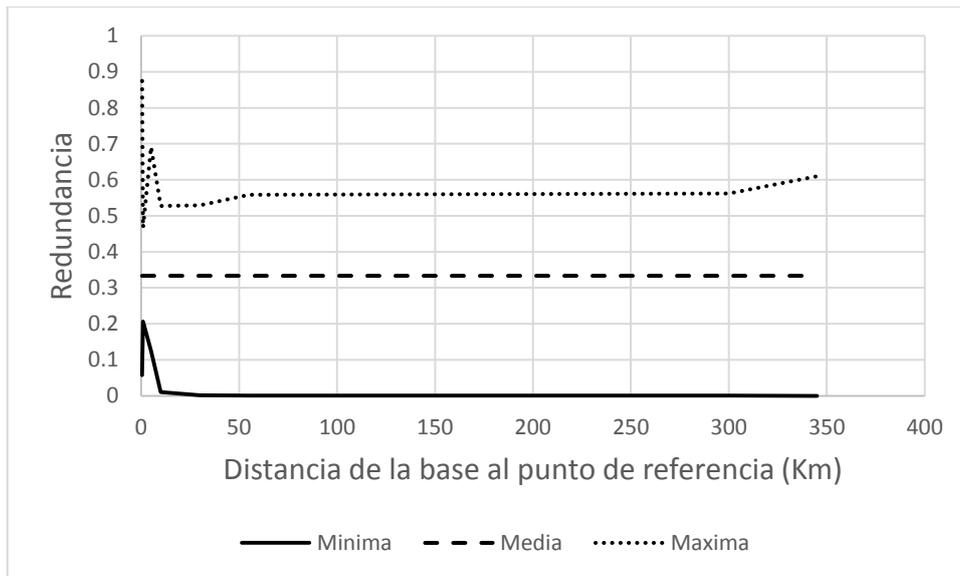


Figura 4.13: Redundancia de las bases geodésicas GNSS.

En la Figura 4.13 se presenta el número de redundancia (ecuación 2.54) mínimo, medio y máximo de las bases geodésicas GNSS con un punto de control y una hora de tiempo de medición. Se puede apreciar que en la base geodésica de 500 m resultó un valor muy cercano para la redundancia, mientras que para las bases geodésicas de 300 km y 345 km disminuyó el valor de la redundancia a 0.6.

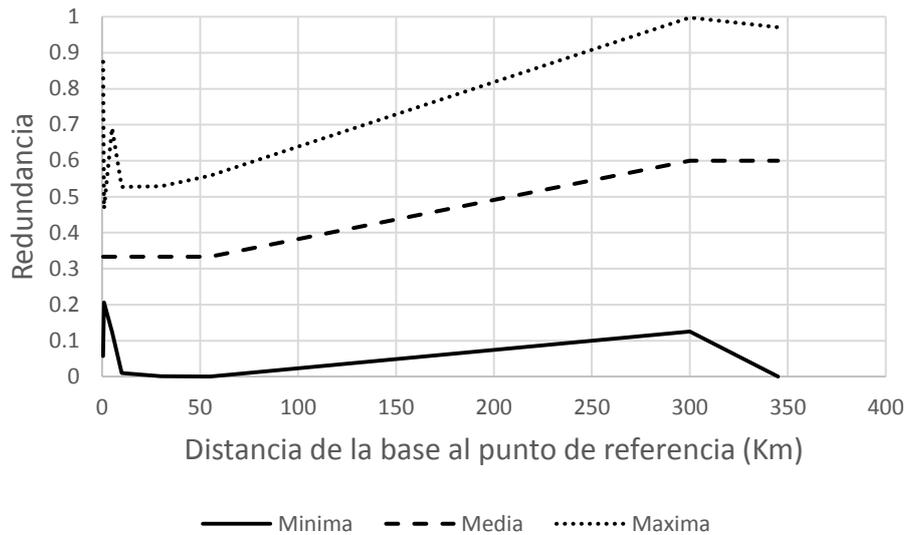


Figura 4.14: Redundancia de las bases geodésicas GNSS con dos puntos de control.

En la Figura 4.14 se muestra la redundancia de las bases geodésicas GNSS utilizando dos puntos de control y una hora de medición. Se encuentra que hay una similitud en la redundancia utilizando uno y dos puntos de control, solo en la base de 300 km y 345 km se presenta un incremento de un valor de 0.56 y 0.61 a 0.99 y 0.97, respectivamente.

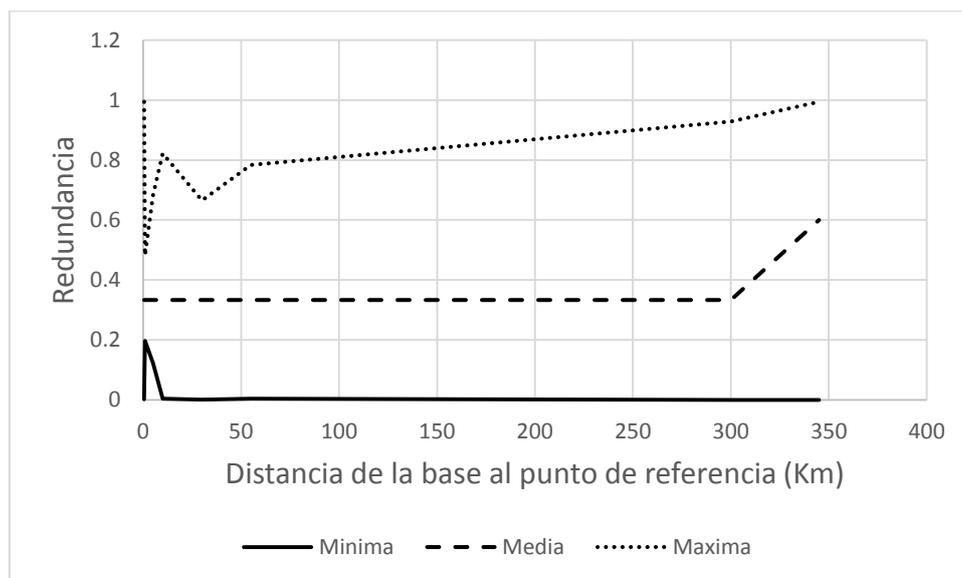


Figura 4.15: Redundancia de las bases geodésicas GNSS con un punto de control.

En la Figura 4.15 se puede apreciar la redundancia de las bases geodésicas GNSS utilizando un punto de control y media hora de medición. En la base geodésica GNSS de 345 km aumento la redundancia a 0.99 y en la de 300 km disminuyo a 0.92.

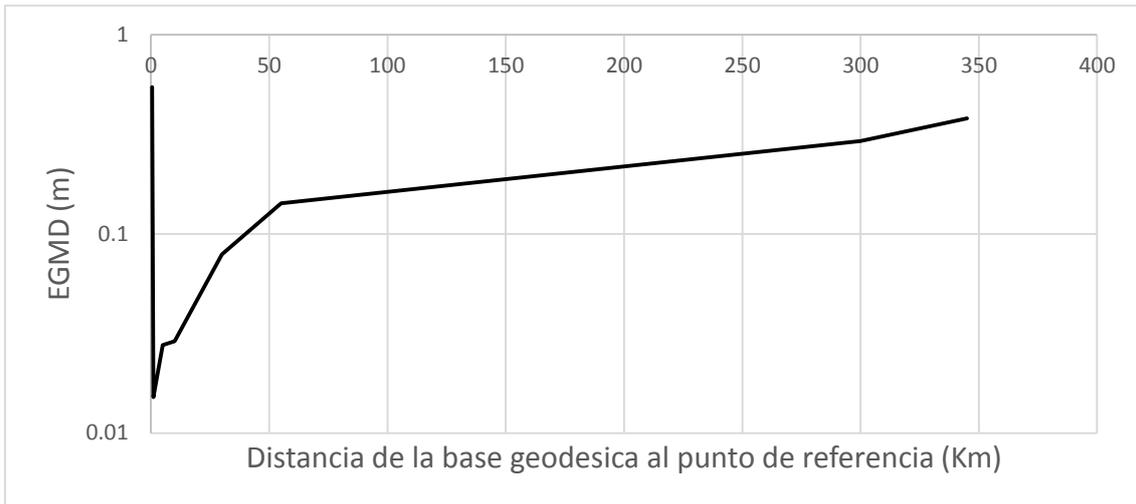


Figura 4.16: Error Global Mínimo Detectable de las bases geodésicas GNSS.

En la Figura 4.16 se puede apreciar el EGMD de cada base geodésica GNSS, en donde se observa que el valor va aumentando de acuerdo a la distancia de la base al punto de referencia, solo en la base de 0.5 km se presenta el EGMD más grande. La media de los EGMD fue $\mu = 0.188m$, desviación estándar $\sigma = 0.196m$, máximo error $MAX = 0.544m$ para la base de 500 m y error mínimo $MIN = 0.015m$ para la base de 1 km.

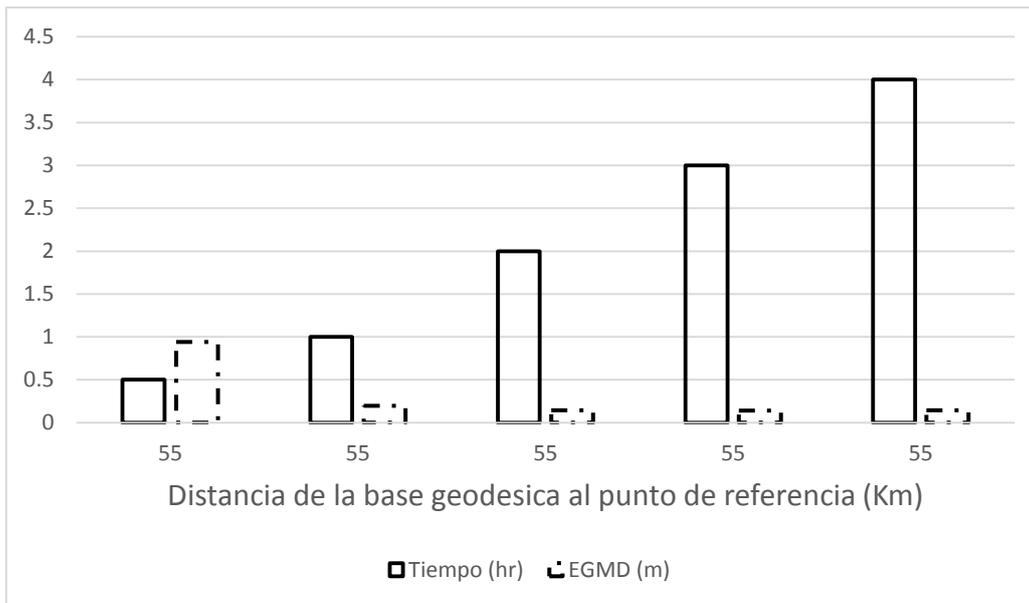


Figura 4.17: Error global mínimo detectable de la base de 55 km en función del tiempo de medición.

Se puede apreciar en la Figura 4.17 que el EGMD se mantiene igual a partir de 2 horas en adelante a excepción del tiempo de 30 minutos donde se presenta el valor más grande, con 0.94 metros.

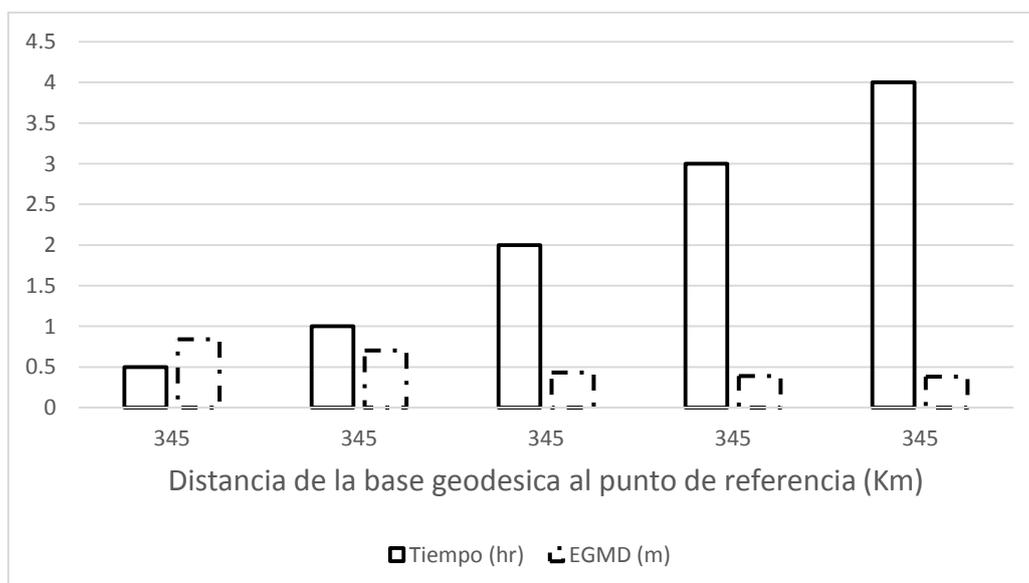


Figura 4.18: Error global mínimo detectable de la base de 345 km en función del tiempo de medición.

En la Figura 4.18 se puede observar que el EGMD disminuye en la base de 345 km a medida que aumenta en tiempo de medición y se mantiene similar a partir de las 2 horas de medición, y también se puede apreciar que en los primeros 30 minutos el EGMD es el doble de grande que para 2,3 y 4 horas de medición.

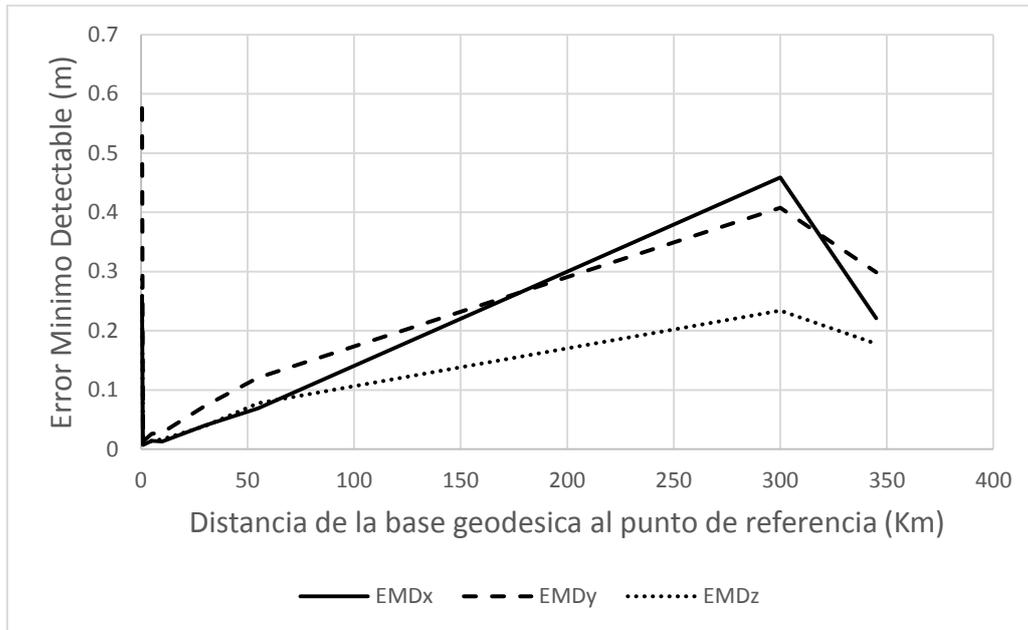


Figura 4.19: Error Mínimo Detectable por cada observación de las bases geodésicas GNSS procesadas con efemérides transmitidas.

En la Figura 4.19 se aprecian los EMD de cada base geodésica GNSS, donde el mayor valor se presenta para la componente y , mientras que para la componente z los EMD son menores. Con $\mu_{EMD_x} = 0.135m$, $\mu_{EMD_y} = 0.193m$, $\mu_{EMD_z} = 0.107m$, $\sigma_{EMD_x} = 0.157m$, $\sigma_{EMD_y} = 0.203m$, $\sigma_{EMD_z} = 0.106m$, $MIN_{EMD_x} = 0.007m$, $MIN_{EMD_y} = 0.013m$, $MIN_{EMD_z} = 0.009m$, $MAX_{EMD_x} = 0.459m$, $MAX_{EMD_y} = 0.576m$ y $MAX_{EMD_z} = 0.287m$.

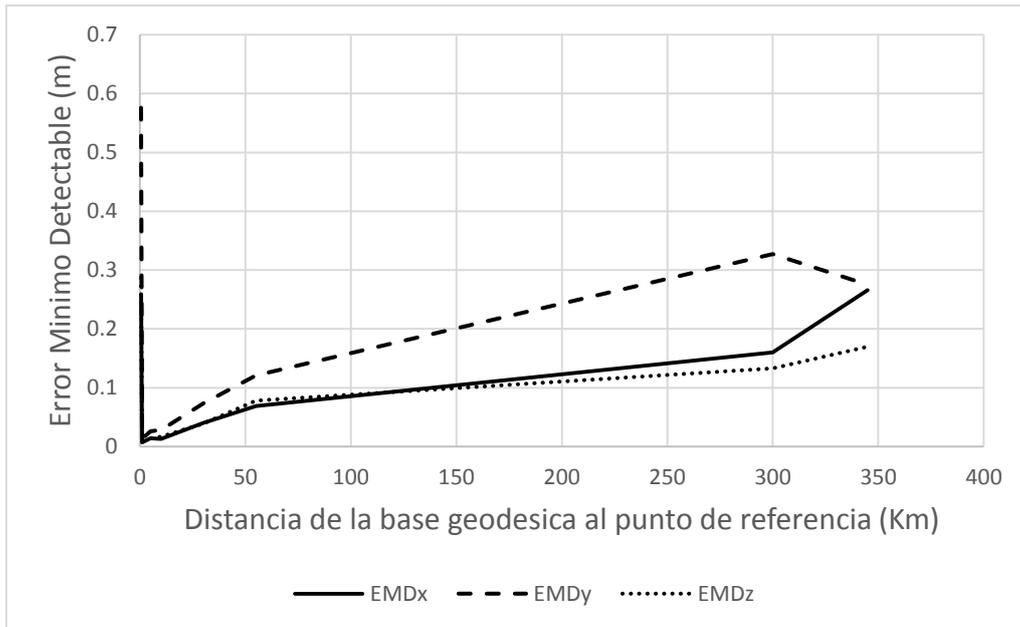


Figura 4.20: Error Mínimo Detectable por cada observación de las bases geodésicas GNSS procesadas con efemérides precisas.

En la Figura 4.20 se puede observar que el EMD es menor para la base de 300 km al procesar con efemérides precisas que los obtenidos con efemérides transmitidas (ver Figura 4.19). En la base geodésica de 300 km se presenta un aumento en el EMD para las tres componentes al procesar con efemérides transmitidas y precisas, mientras que para la base de 345 km solo aumento en la componente y y z .

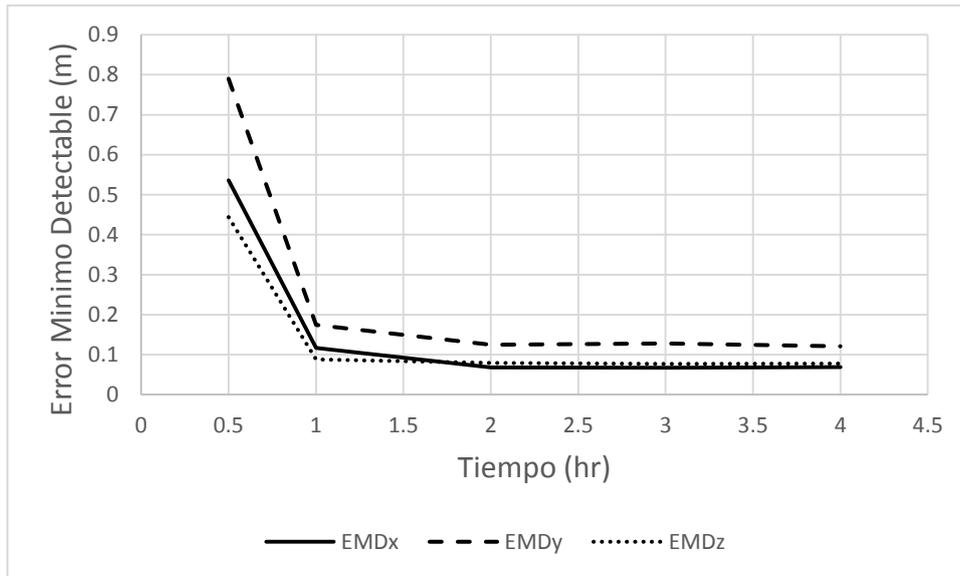


Figura 4.21 Error mínimo detectable por cada observación para la base geodésica GNSS de 55 km en función del tiempo.

En este caso, Figura 4.21 los errores mínimos detectables para una base geodésica GNSS de 55 km que está en función del tiempo, donde se presenta el mayor valor para la componente y y los mínimos para la componente z . Además, se puede apreciar que el EMD disminuye a medida que aumenta el tiempo de medición. Con $\mu_{EMD_x} = 0.171m$, $\mu_{EMD_y} = 0.267m$, $\mu_{EMD_z} = 0.153m$, $\sigma_{EMD_x} = 0.193m$, $\sigma_{EMD_y} = 0.276m$, $\sigma_{EMD_z} = 0.153m$, $MIN_{EMD_x} = 0.067m$, $MIN_{EMD_y} = 0.121m$, $MIN_{EMD_z} = 0.077m$, $MAX_{EMD_x} = 0.536m$, $MAX_{EMD_y} = 0.790m$ y $MAX_{EMD_z} = 0.444m$.

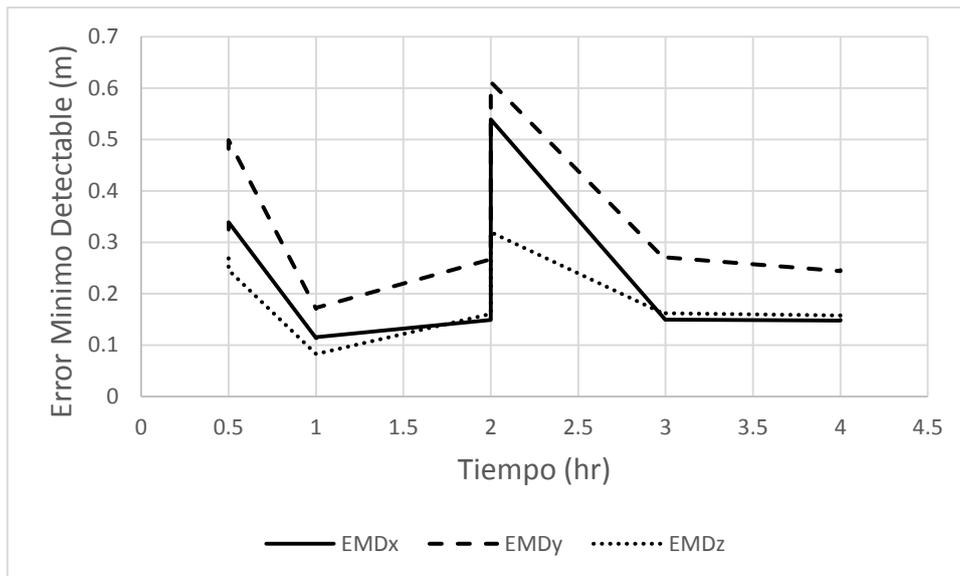


Figura 4.22: Error mínimo detectable por cada observación para la base geodésica GNSS de 55 km en función del tiempo con dos puntos de control.

En la Figura 4.22 se puede apreciar que el EMD es mayor para la componente y , sin embargo se presenta un aumento en el tiempo de 2 horas de medición para las tres componentes y después disminuye cuando se miden 3 y 4 horas.

4.3.3 Confiabilidad externa

A continuación, se presenta un análisis de confiabilidad externa, los efectos en las coordenadas causados por los EMD.

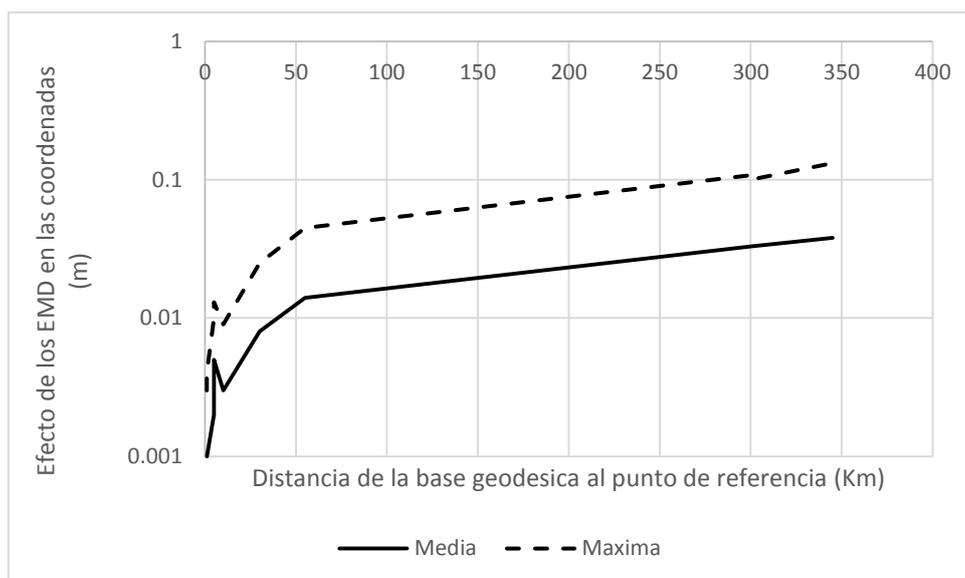


Figura 4.23: Efecto en las coordenadas causados por los Errores Mínimos Detectables en las bases geodésicas GNSS.

En la Figura 4.23 se muestran los efectos causados por los EMD en las coordenadas en las bases geodésicas GNSS, se observa que el efecto medio se mantiene uniforme, mientras que los efectos máximos presentan un pequeño incremento de acuerdo a la distancia de las bases al punto de referencia. Con $\mu = 0.014m$, $\sigma = 0.014m$, $MIN = 0.001m$ y $MAX = 0.038m$.

4.4 Análisis de precisión de georeferenciación de la base geodésica GNSS

Para obtener la precisión de cada base se hizo el pos-procesamiento de los datos GNSS con el programa Topcon Tools y se obtuvo la precisión de cada base geodésica haciendo el procesamiento con las efemérides precisas y transmitidas. La georeferenciación de bases geodésicas para levantamientos topográficos es necesario para ligar la base medida al punto de referencia con coordenadas conocidas y obtener una solución a los puntos medidos, a su vez poder tener alta precisión en los puntos de la base geodésica.

Existen dos tipos de efemérides en las mediciones con los sistemas GNSS, una son las efemérides transmitidas, las cuales se obtienen al momento de realizar una sesión de medición con receptores geodésicos de dos bandas L1 y L2. Por otra parte, están las efemérides precisas las cuales están disponibles en una página web y se pueden descargar para así obtener una precisión mayor en la obtención de las coordenadas de los puntos medidos de la base geodésica.

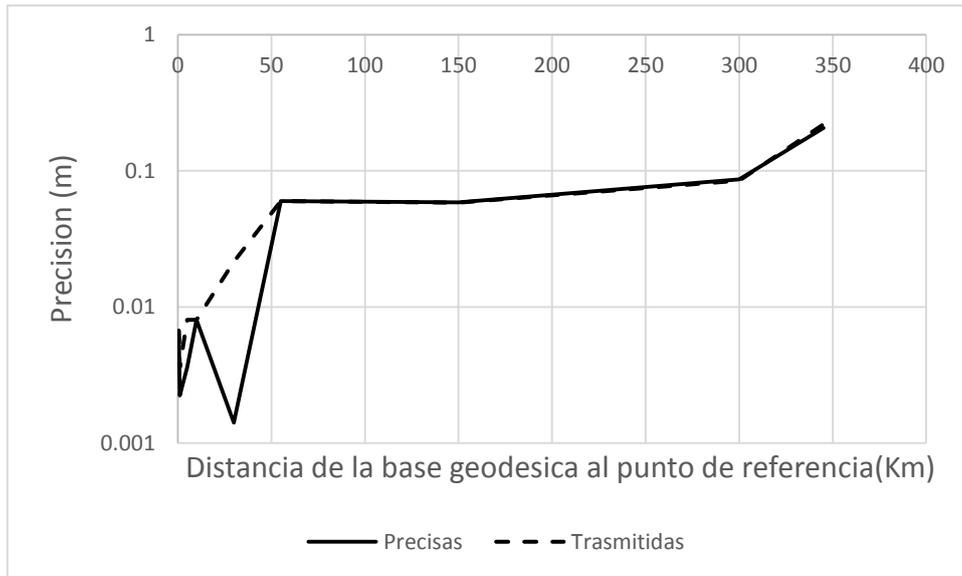


Figura 4.24: Sesión 1 hora: Comparación de precisión (total) de bases GNSS con efemérides precisas y trasmitadas.

En la Figura 4.24 se muestra una comparación entre la precisión obtenida con efemérides precisas y trasmitadas. Se puede observar que la precisión es similar para cada base geodésica, al nivel del milímetro hasta la base de 30 kilómetros con un valor $MIN = 0.001m$ para efemérides precisas y para efemérides trasmitadas el valor mínimo se presentó en la base de 1 km con $MIN = 0.003m$, para la base de 300 kilómetros con $\sigma_p = 0.086m$ al nivel del centímetro y con decímetros para la base de 345 kilómetros donde resulto $MAX = 0.206m$ con efemérides precisas y $MAX = 0.220m$ con efemérides trasmitadas.

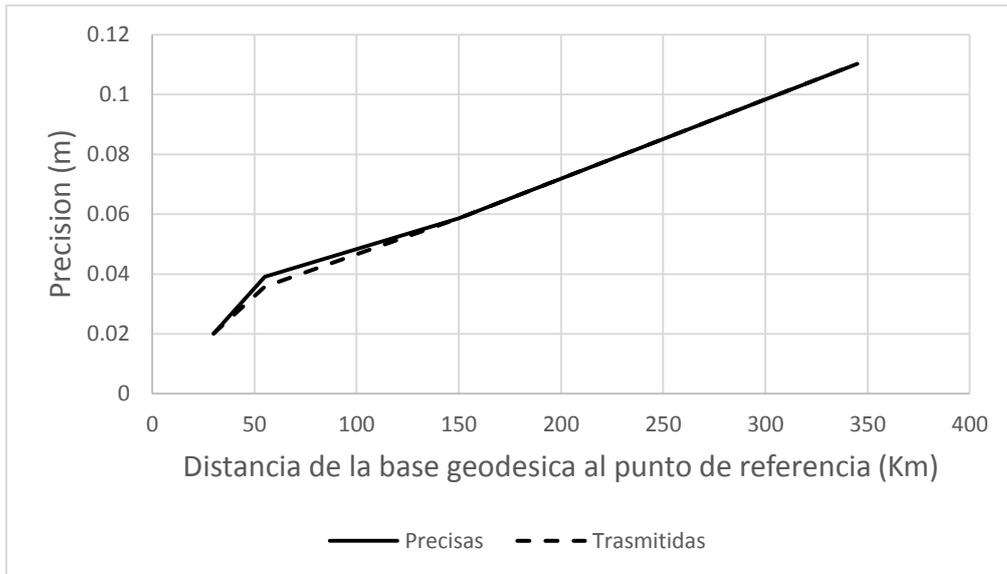


Figura 4.25: Sesión 2 horas: Comparación de precisión total de bases geodésicas GNSS con efemérides precisas y trasmitadas.

En la Figura 4.25 se muestra la relación de precisión entre efemérides precisas y trasmitadas obtenidas en las bases geodésicas GNSS medidas en la sesión de dos horas.

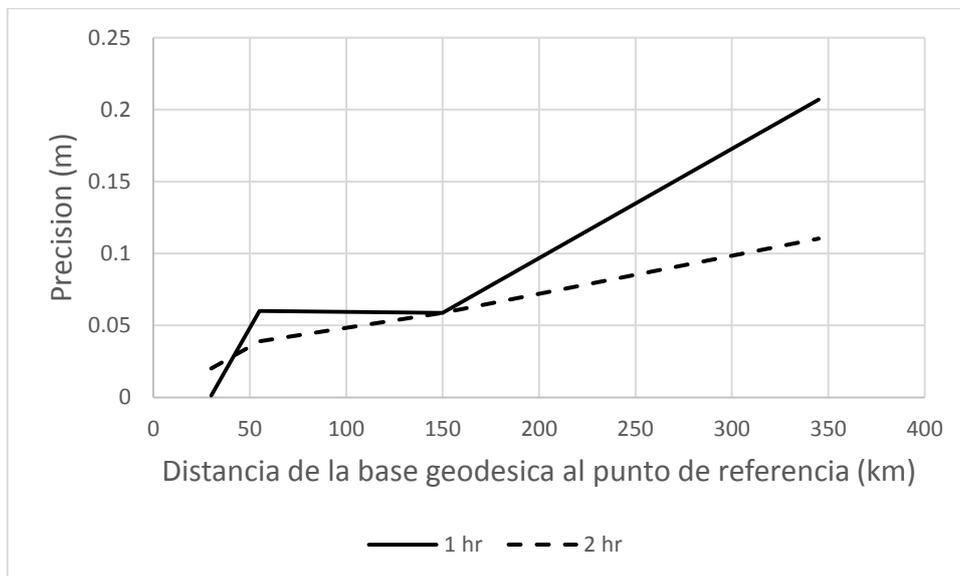


Figura 4.26: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides precisas.

En la Figura 4.26 se aprecia la relación de precisión de las bases GNSS procesadas con efemérides precisas. Se puede observar que la precisión de las bases medidas 1 hora es menor que para las sesiones de 2 horas.

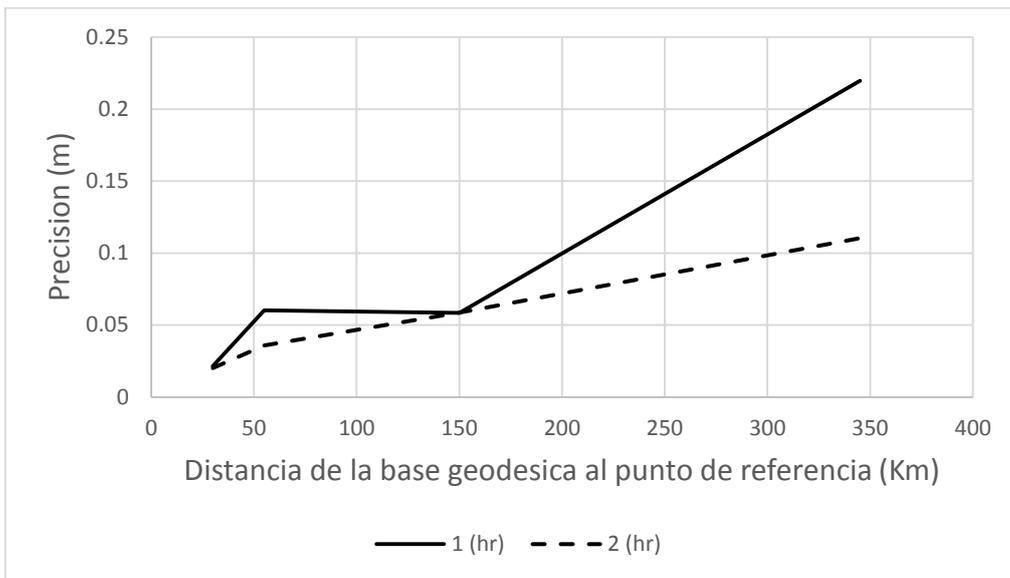


Figura 4.27: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides transmitidas.

Se puede apreciar que la precisión se comporta de manera similar tanto en la Figura 4.26 (efemérides precisas) y la Figura 4.27 (efemérides transmitidas).

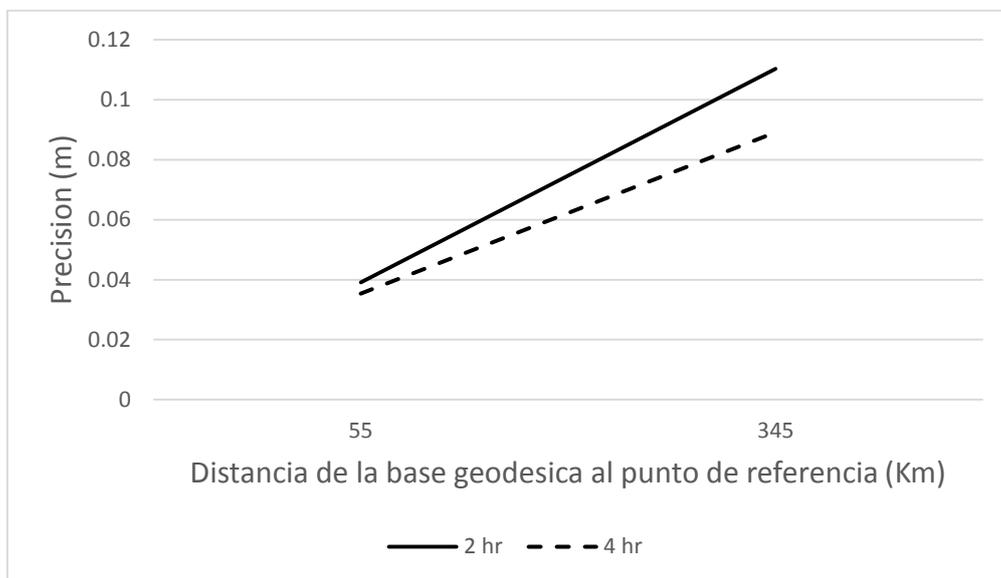


Figura 4.28: Comparación de precisión total de bases GNSS con efemérides precisas en sesión de 4 horas y 2 horas.

Se puede observar en la Figura 4.28 que la precisión de la sesión de dos horas es menor que la sesión de cuatro horas.

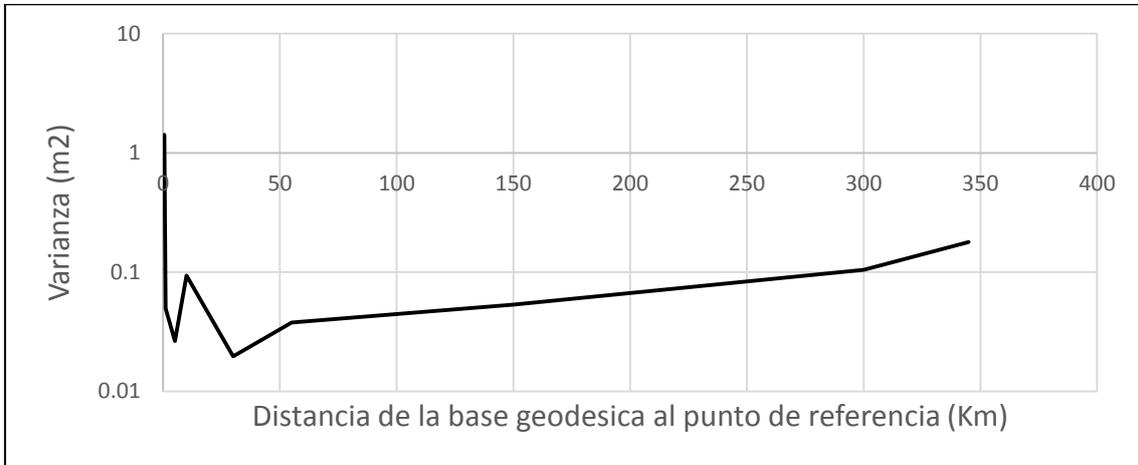


Figura 4.29: Varianza de referencia de las bases GNSS medidas

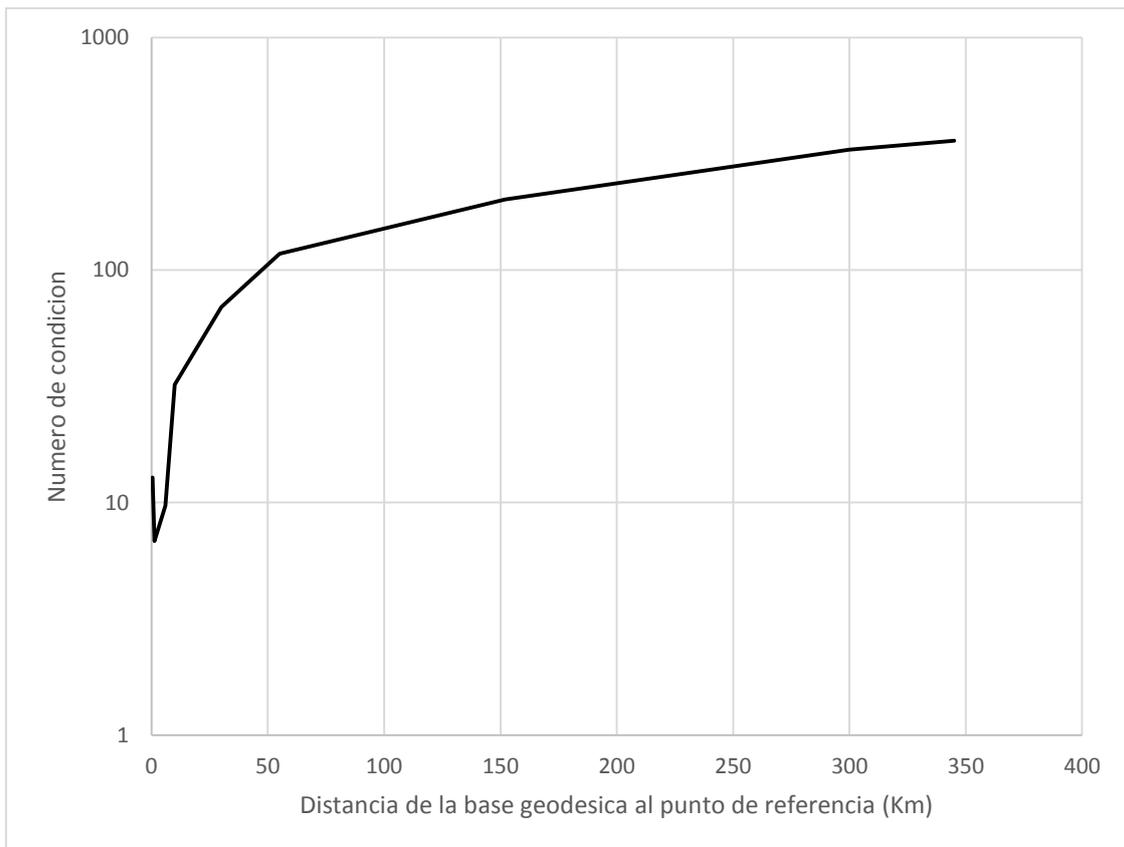


Figura 4.30 Numero de condición de la matriz N en función de la distancia.

Se puede apreciar en la Figura 4.30 el número de condición de la matriz N de la ecuación (2.12) resultante para cada base GNSS medida y se puede observar que como es de esperarse a mayor distancia del punto de control es mayor el valor de N . De acuerdo a la teoría expuesta en la sección 2.5 no existe problema de inestabilidad en la inversión de la matriz.

CAPITULO V CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1 Conclusiones

En la presente tesis se concentró principalmente en realizar un estudio de confiabilidad en la medición de una base geodésica GNSS regular (500 m) para levantamientos topográficos, cuando se cuenta con uno o dos vértices de referencia los cuales se encuentran a diferentes distancias con respecto a la base medida. En las pruebas realizadas se emplearon receptores geodésicos de dos bandas L1 y L2.

Cuando se aplicó el análisis estadístico a una red geodésica regular con lados promedio de 5 km, el método de Baarda Ec. (2.36) para la prueba global, encontró que la varianza de referencia no era representativa de la precisión del levantamiento por lo que se procedió a ajustar su valor. En la detección de outliers de la misma red, los métodos de Baarda (2.36) y Pope (2.30) fueron consistentes, detectando mediciones anormales con residuos mayores a 2 m. Con ello la varianza de referencia a posteriori se redujo de $18.343m^2$ a m^2 .

Los Errores Mínimos Detectables, estimados con el análisis de confiabilidad interna de la red tuvieron un promedio de $0.555m$ con una desviación estándar de $\sigma = 0.336m$.

Con respecto al análisis de confiabilidad externa, los resultados fueron aceptables, siendo los efectos de los errores de medición en las coordenadas de los puntos por determinar, relativamente pequeños $< 5cm$, considerando errores de medición de cm .

También se encontró una relación entre los Errores Mínimos Detectables y los efectos en las coordenadas, donde los efectos máximos en las coordenadas causados por los Errores Mínimos Detectables tuvieron los valores más pequeños en donde existen los mayores EMD.

Con base al estudio realizado en el presente trabajo se concluye que el análisis de confiabilidad interna y externa en una red geodésica regular se pueden detectar los outliers existentes en la red y una vez eliminados se genera una disminución considerable en el valor de los residuos de las mediciones.

En el análisis estadístico de las bases geodésicas con aplicación a levantamientos topográficos medidas, todas las bases pasaron el test de la prueba global de Baarda.

El parámetro de estabilidad Ec. (2.12) de la matriz $A^T PA$ asociada a cada base, a pesar de variar significativamente de 500 m a 345 km de distancia del punto de referencia no se presentó problema de inestabilidad o de contar con un sistema mal condicionado.

En el análisis de confiabilidad interna de las bases geodésicas con aplicación a levantamientos topográficos los EMD tuvieron un promedio de $\mu = 0.145m$, $\sigma = 0.156m$, $MIN = 0.010m$ y $MAX = 0.441m$. Los máximos EMD se presentaron para la componente y con $EMD_y = 0.576m$ para la base de 500 m y el mínimo para la base de 1 km en la componente x con $EMD_x = 0.007m$. La media de los Errores Globales Mínimos Detectables fue $\mu = 0.188m$, $\sigma = 0.196m$, $MAX = 0.544m$ para la base de 500 m y error mínimo $MIN = 0.015m$ para la base de 1 km.

Se encontró que el Error Global Mínimo Detectable se minimizó conforme se aumentó el tiempo de medición en cada base geodésica medida.

Con respecto al análisis de confiabilidad externa de las bases geodésicas los efectos causados por los EMD en las coordenadas de los puntos, se observó que el efecto medio se mantiene uniforme, mientras que los efectos máximos presentan un pequeño incremento de acuerdo a la distancia de las bases al punto de referencia con $\mu = 0.014m$, $\sigma = 0.014m$, $MIN = 0.001m$ y $MAX = 0.038m$.

Además, se concluye que el efecto en las coordenadas causado por los Errores Mínimos Detectable disminuye a medida que aumenta el tiempo de medición.

Las precisiones estimadas que se obtuvieron de las bases GNSS fueron consistentes con las especificaciones técnicas (ver Tabla 4.1) del fabricante de 3.5 mm para la base de 500 m a 175 mm para la base de 345 km del equipo utilizado. Los errores relativos tuvieron un comportamiento estable, a mayor distancia de la base geodésica del punto de referencia, mayor precisión absoluta.

En cuanto al empleo de efemérides precisas se observó que la precisión aumento para todas las bases y los Errores Mínimos Detectables disminuyeron para la base geodésica de 300 km y 345 km.

5.2 Recomendaciones

Se recomienda que en la medición de una base geodésica, con el propósito de obtener soluciones de coordenadas con precisiones confiables, se recomienda aplicar el análisis estadístico que incluya:

- Prueba global de la varianza de referencia
- Test de detección de outliers
- Análisis de confiabilidad interna y externa

Para futuros estudios se propone analizar la aplicación de confiabilidad a bases geodésicas medidas con receptores de una banda.

BIBLIOGRAFIA

- Baarda, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission, Publications on Geodesy, New Series 2, No. 5, Delft, The Netherlands.
- Cabaña, E. M. (2011). F Distribution. In M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science* (pp. 499-501). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Charles, G., & Wolf, P. R. (2006). Introduction *Adjustment Computations* (pp. 1-11): John Wiley & Sons, Inc.
- Dodge. (2008). Student Distribution *The Concise Encyclopedia of Statistics* (pp. 526-527). New York, NY: Springer New York.
- Ghilani. (2011). *Adjustment Computations: Spatial Data Analysis*: Wiley.
- Hoffmann-Wellenhof, B., Lichtenegger, H. & Wasle, E. 2008. GNSS - Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, GALLILEO and more, Dordrecht, Springer.
- Hoffmann-Wellenhof, B., Lichtenegger H.C. and Collins, J. 2001. Global Positioning System: Theory and practice, New York , Estados Unidos, Springer-Verlag.
- Huzak, M. (2011). Chi-Square Distribution. In M. Lovric (Ed.), *International Encyclopedia of Statistical Science* (pp. 245-246). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Knight, N. L., Wang, J., & Rizos, C. (2010). Generalised measures of reliability for multiple outliers. *Journal of Geodesy*, 84(10), 625-635. doi:10.1007/s00190-010-0392-4
- Koch, K.-R. (2015). Minimal detectable outliers as measures of reliability. *Journal of Geodesy*, 89(5), 483-490. doi:10.1007/s00190-015-0793-5
- Kuang, S. (1996). GEODETIC NETWORK ANALYSIS AND OPTIMAL DESIGN. SAMS PUBLICATIONS. STERLING, ILLINOIS.
- Lehmann, R. (2013). On the formulation of the alternative hypothesis for geodetic outlier detection. *Journal of Geodesy*, 87(4), 373-386. doi:10.1007/s00190-012-0607-y
- Leick, A., Rapoport, L., & Tatarnikov, D. (2015). *GPS satellite surveying*: John Wiley & Sons.
- Medina, J. A. (2007). ANÁLISIS DE LA CONFIABILIDAD INTERNA Y EXTERNA DE UNA RED GPS GEODÉSICA LOCAL. (TESIS MAESTRIA). UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA.
- Prószyński, W. (2015). Revisiting Baarda's concept of minimal detectable bias with regard to outlier identifiability. *Journal of Geodesy*, 89(9), 993-1003. doi:10.1007/s00190-015-0828-y
- Rapp, R. H. (1985) *Geodesia Geometrica*, Departamento de Ciencias Geodesicas. Universidad Estatal de Ohio, Columbus, Ohio 43210.
- Romero, R. (2014). ESTABLECIMIENTO DE UN SISTEMA GEOESPACIAL UTILIZANDO METODOS GEODESICOS SATELITALES EN EL ESTUDIO DE CAMPOS DE DEFORMACIONES SUPERFICIALES SISMOGENICAS. (MAESTRIA), UNIVERSIDAD AUTONOMA DE SINALOA, CULIACAN, SINALOA.
- Snow, K. (2002). Applications of parameter estimation and hypothesis testing to GPS network adjustment. Geodetic and Geoinformation Science. The Ohio State University, Columbus, Ohio 43210-1275.

- Vaníček, P., Craymer, M. R., & Krakiwsky, E. J. (2001). Robustness analysis of geodetic horizontal networks. *Journal of Geodesy*, 75(4), 199-209. doi:10.1007/s001900100162
- Wang, J., Wu, Y., & Alqurashi, M. (2013). Separability Analysis for Multiple Faults in GNSS/INS Integration. *IGNSS Symposium*.
- Wilson, E., & Morales-Luna, G. (2007). La precisión en los cálculos científicos por computadora. *Revista Ciencia*.
- Zhu, J. (1996). Robustness and the robust estimate. *Journal of Geodesy*, 70, 586-590.