

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

FACULTAD DE INFORMÁTICA Y FACULTAD DE CIENCIAS DE LA
TIERRA Y EL ESPACIO

MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN



OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS EN CONDICIONES DE INCERTIDUMBRE
SOBRE EL IMPACTO DE LOS PROYECTOS

TESIS

Que como requisito parcial para obtener el grado de
Maestro en Ciencias de la Información
presenta

EFRAÍN SOLARES LACHICA

DIRECTORES DE TESIS:
DR. EDUARDO RENÉ FERNÁNDEZ GONZÁLEZ
DR. JORGE ADALBERTO NAVARRO CASTILLO

Culiacán, Sinaloa a 2015

*Si he logrado ver un poco más lejos fue porque
estuve de pie en los hombros de gigantes.*

- Bernardo de Chartres

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer muy sinceramente a mis profesores y directores de tesis, el Doctor Jorge Adalberto Navarro Castillo y el Doctor Eduardo René Fernández González por su entrega, profesionalismo, paciencia, apoyo y guía. Porque me han permitido entender un camino lleno de laberintos y enigmas de manera simple y agradable. Por esas charlas llenas de inspiración que han inquietado mi mente, abierto mis horizontes, encendido mi intelecto, y enseñado a pensar correctamente... si eso es posible.

Un agradecimiento al Doctor Inés Fernando Vega López porque, gracias a su esfuerzo pionero en la fundación de este programa de posgrado, tenemos, mis compañeros y yo, la oportunidad de alcanzar nuevas metas en nuestra carrera profesional.

Agradezco a todos y cada uno de los profesores de la Maestría en Ciencias de la Información de la Facultad de Informática de Culiacán y la Facultad de Ciencias de la Tierra y del Espacio que compartieron conmigo una porción de sus conocimientos. A las personas que se dieron a la tarea de revisar este documento, proporcionando sus opiniones y comentarios más que acertados. Agradezco a mis compañeros: Jesús Duarte, Omar Gutiérrez, Sergio Aréchiga, Sergio Monjardín, Vilma Sánchez y Yunibia López, por esas horas interminables de debates, siempre divertidos y edificantes.

Agradezco también a las instituciones que me mostraron su apoyo de distintas maneras: la Facultad de Informática de Culiacán, la Facultad de Ciencias de la Tierra y del Espacio de la Universidad Autónoma de Sinaloa y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por la beca otorgada bajo el número 483803.

DEDICATORIA

A mi esposa

Porque eres mi ayuda idónea.
Por hacer de mis sueños tus sueños.
Por estar ahí cada vez que te he necesitado.

A mi madre

Porque, honestamente lo digo,
este logro es más suyo que mío.

A mi padre

Esperando que pueda ver en
mí sus propios sueños cumplidos.

A mi hermano

Que me ha enseñado más
que la misma escuela de la vida.

Contenido

INTRODUCCIÓN	1
Capítulo 1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	4
1. 1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	4
1. 2 HIPÓTESIS.....	10
1. 3 OBJETIVOS	11
1. 3. 1 OBJETIVOS GENERALES	11
1. 3. 2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	12
Capítulo 2 MARCO TEÓRICO REFERENCIAL.....	13
2. 1 APOYO A LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO.....	13
2. 2 PRINCIPALES ESCUELAS DE LA DECISIÓN.....	15
2. 2. 1 ENFOQUE FUNCIONAL	15
2. 2. 2 ENFOQUE RELACIONAL.....	17
2. 2. 3 INTELIGENCIA ARTIFICIAL	20
2. 2. 4 ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LA DECISIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO.....	22
2. 3 EL PROBLEMA DE LA CARTERA DE PROYECTOS	34
2. 4 MODELADO DE PREFERENCIAS.....	36
2. 5 ALGORITMOS EVOLUTIVOS	39
2. 5. 1 NOSGA-II	42
2. 6 SIMULACIÓN DE MONTECARLO.....	46
Capítulo 3 METODOLOGÍA.....	50
3. 1 CREACIÓN DE UN SIMULADOR DE MONTECARLO	50
3. 2 IMPLEMENTACIÓN DE UN ENFOQUE EVOLUTIVO.....	53
3. 2. 1 GENERACIÓN ALEATORIA DE UNA POBLACIÓN.....	55
3. 2. 2 EVALUACIÓN DEL IMPACTO EN LOS OBJETIVOS	55
3. 2. 3 CREACIÓN DE FRENTES.....	56
3. 2. 4 SELECCIÓN POR TORNEO BINARIO	57
3. 2. 5 OPERACIÓN DE CRUCE	58
3. 2. 6 OPERACIÓN DE MUTACIÓN	59
3. 2. 7 GENERACIÓN DE UMBRALES	59
3. 3 ESTRUCTURA Y EVALUACIÓN DE EXPERIMENTOS	60

3. 3. 1 COMPARACIÓN DE SOLUCIONES.....	60
3. 3. 2 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM LIGERAMENTE INCLINADO AL RIESGO.	61
3. 3. 3 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM NEUTRAL ANTE EL RIESGO.....	62
3. 3. 4 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM AVERSO AL RIESGO. ...	63
3. 3. 5 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM MUY AVERSO AL RIESGO.....	64
3. 3. 6 EQUIPOS Y MATERIALES.....	65
Capítulo 4 RESULTADOS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES.....	65
4. 1 RESULTADOS.....	65
4. 1. 1 COMPARACIÓN DE SOLUCIONES.....	65
4. 2 DISCUSIÓN.....	68
4. 2. 1 Estableciendo si existe diferencia entre los comportamientos modelados	69
4. 3 CONCLUSIONES.....	72
4. 4 TRABAJO FUTURO.....	73
4. 4. 1 LIMITACIONES ACTUALES.....	73
4. 4. 2 POSIBLES MEJORAS	73
BIBLIOGRAFÍA	75
ANEXOS.....	81
Anexo A. Conjuntos de datos.	81
Anexo B. Soluciones generadas.....	83
Anexo C. Sumario.....	95
C.1 Media aritmética.	95
C.2 Varianza.	95
C.3 Diferencia de medias.....	95

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Conjunto de datos empleado en Fernández et al (2013).....	82
Tabla 2. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.....	62
Tabla 3. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.....	62
Tabla 4. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo.....	63
Tabla 5. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo.....	63
Tabla 6. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM averso al riesgo.....	64
Tabla 7. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM averso al riesgo.....	64
Tabla 8. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM muy averso al riesgo.....	65
Tabla 9. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM muy averso al riesgo.....	65
Tabla 10. Soluciones generadas por Fernández et al. (2013).....	84
Tabla 11. Soluciones generadas por nuestro enfoque.....	85
Tabla 12. Soluciones no superadas del pool de soluciones.....	88
Tabla 13. Resultados al modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.....	91
Tabla 14. Resultados al modelar el comportamiento de un DM Neutral ante el riesgo.....	92
Tabla 15. Resultados al modelar el comportamiento de un Averso al riesgo	95

INTRODUCCIÓN

La distribución de recursos de una organización entre sus proyectos juega un papel crucial en su desarrollo (Salo et al., 2011). Ejemplo de ello es el Gasto en Investigación Científica y Desarrollo Experimental en el 2012 de CONACyT, que fue de 66,720 millones de pesos (ver CONACyT, 2014); mientras que la Oficina de Estadística de las Comunidades Europeas (EUROSTAT, por sus siglas en inglés) en el documento “R&D expenditure”, publica la siguiente tabla donde se identifican los porcentajes del Producto Interno Bruto (PIB) invertidos (la suma de las erogaciones efectuadas por las administraciones públicas) en los proyectos R&D de algunos países y organizaciones europeas, y donde resalta la inversión realizada por la unión europea (EU-27) en 2010 que consistió en 2%, equivalente a 245, 673 millones de euros (cf. SOEC, 2010):

Porcentaje del gasto interno bruto en proyectos I&D 2000-2010											
	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Suecia	..	4.13	..	3.8	3.58	3.56	3.68	3.4	3.7	3.61	3.42
Alemania	2.47	2.47	2.5	2.54	2.5	2.51	2.54	2.53	2.69	2.82	2.82
Japón	3.04	3.12	3.17	3.2	3.17	3.32	3.4	3.44	3.45	..	..
EUA	2.69	2.71	2.6	2.6	2.53	2.56	2.6	2.66	2.79	..	..
EU-27	1.86	1.87	1.88	1.87	1.83	1.83	1.85	1.85	1.92	2.01	2

Encontrar la distribución de recursos entre proyectos que maximiza el impacto social en los objetivos de una organización pública es de gran relevancia por razones obvias. Y, en general, encontrar la distribución de recursos que maximiza el impacto en los objetivos estratégicos de una organización resulta de gran importancia.

Sin embargo, encontrar la distribución óptima no es una tarea trivial. Además, es un problema que se ha atacado desde principios del siglo XX, sin dejar de ser relevante en la actualidad.

Para ilustrar la importancia que tiene la formación de una cartera óptima dentro de las organizaciones, se propone el siguiente ejemplo:

Consideremos el caso del gerente de una empresa y la tarea a su cargo de elegir proyectos para formar una cartera que beneficie al máximo a dicha empresa. Para llevar a cabo la elección, se dispone de un conjunto de proyectos previamente evaluados, indivisibles y con aportación benéfica a la empresa indudable. La situación ideal para llevar a cabo esta elección es elegir todos los proyectos que conformen dicho conjunto; de no ser esto posible, el gerente necesitará evaluar las carteras formadas por el conjunto

potencia (espacio de búsqueda) del conjunto original. Esto genera una solución óptima al problema de maximizar el beneficio aportado por la cartera. Lamentablemente, existen repercusiones de tipo “espacio-temporales” en la obtención de esa solución ya que la complejidad del problema es combinatoria (el tamaño del espacio de búsqueda es de 2^n , donde n es el número de proyectos que compiten por recursos); así, incluso para una cantidad relativamente pequeña de proyectos (30, por ejemplo), la cantidad total de carteras a considerar es posiblemente intratable por un método exhaustivo de búsqueda (más de 1, 000, 000, 000 de carteras).

Como se puede apreciar en el ejemplo, buscar la solución óptima al problema de distribuir recursos, supone una tarea impráctica en la vida real (donde la cantidad de proyectos admisibles puede ascender a los cientos o miles), por lo que, dadas las características de este problema, la mejor opción sería utilizar una técnica que nos asegure encontrar una “buena” solución, aunque esta no sea la mejor. Lamentablemente, el no garantizar una solución óptima puede traer otros inconvenientes. Nassif et al. (2013) menciona los siguientes problemas cuando se realiza una errónea selección de proyectos para conformar una cartera:

- 1) Proyectos desconectados de los objetivos estratégicos, y
- 2) Una cartera desequilibrada.

La solución al problema de distribuir recursos puede ser implementada en muchas áreas, tales como selección de proyectos de investigación y desarrollo (*cf.* Fernández & Navarro, 2000; Fernandez *et al.*, 2009), selección de fondos de inversión, selección de fondos de pensiones, y asignación de fondos públicos a proyectos y programas que mejoran el servicio social y educativo (*e. g.*, CONACyT distribuye los recursos en base a un ranking y hasta que han sido agotados).

Como resultado de todo lo anterior, han surgido diversos enfoques que intentan encontrar una distribución que maximice el impacto en los objetivos; sin embargo, muchos de estos enfoques no son lo suficientemente amplios como para considerar algunos aspectos relevantes del problema (*cf.* Eiselta & Marianov, 2014; Rabbani et al., 2010). Uno de estos aspectos relevantes es el riesgo (Golmohammadi & Pajoutan, 2011), que es definido como el grado de daño que causaría en el DM no obtener los impactos esperados en los objetivos. Aunque el riesgo ha sido considerado por diversos investigadores en modelos

para seleccionar carteras de proyectos (ver Artzner et al., 1999; Rabbani et al., 2010; Badri et al., 2001; Gabriel, 2006; Markowitz, 1953; Medaglia, 2007), todos están afectados por algunas de las siguientes limitaciones:

- i) Baja dimensión del espacio objetivo sujeto a análisis;
- ii) Pobre modelo de actitud ante el riesgo;
- iii) Severas condiciones sobre la naturaleza de funciones y restricciones (por ejemplo, la exigencia de restricciones lineales).

Para superar estos problemas, en el presente trabajo proponemos un enfoque que permite considerar múltiples objetivos (por lo menos cuatro), no se imponen condiciones a la forma matemática de las restricciones, y hace una consideración explícita de la actitud del DM ante el riesgo (modelando diferentes comportamientos por parte del DM, tales como: ligera inclinación al riesgo, neutralidad ante el riesgo, aversión al riesgo y una alta aversión al riesgo) para crear soluciones justificables. Llamamos solución justificable a una solución para la cual es posible argumentar el nivel de impacto obtenido en función del comportamiento modelado. El resto del documento se encuentra estructurado de la siguiente manera:

En el capítulo 1 se da un planteamiento del problema en el que se hace una definición de lo que intentamos resolver en este trabajo; abordamos una breve motivación y justificación que permiten establecer el origen del problema y la importancia de resolverlo; se plantea una hipótesis y se establecen los objetivos del trabajo. En el capítulo 2 se describe el marco teórico referencial en el que se esbozan algunos antecedentes y las diferentes escuelas de pensamiento relacionadas con el apoyo a la toma de decisiones. En el capítulo 3 se puntualiza la metodología planteada y el proceso de experimentación diseñado para validar el modelo. Por último, en el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos, se realiza una breve discusión sobre estos y se abordan las conclusiones.

Capítulo 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1. 1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

El problema de la cartera de proyectos consiste en seleccionar y apoyar (con los recursos disponibles) un conjunto de proyectos que maximicen el impacto en los objetivos de una organización. Realizar esta tarea requiere que se consideren varios aspectos, tales como: asignación de recursos, modelado de la incertidumbre, gestión de múltiples objetivos, manejo de restricciones. Como resultado, resolver el problema de la cartera de proyectos es una labor complicada y puede exigir un gran trabajo.

Una cartera de proyectos es un conjunto de proyectos que serán apoyados por la organización. Estos son seleccionados de un conjunto de proyectos admisibles; un proyecto admisible es un conjunto de actividades y recursos lógicamente relacionados (orientados a resolver un problema), que cumplen una serie de restricciones impuestas por la organización y que con certeza aportan un beneficio para ella. De este punto en adelante nos referiremos a un proyecto admisible como simplemente proyecto.

La situación ideal del problema de la cartera de proyectos se da cuando la suma total de los requerimientos del conjunto de proyectos es igual o menor a los recursos que se tienen disponibles para la inversión en la cartera. Lo anterior no presenta dificultad ya que la solución es una asignación directa de los recursos solicitados por los proyectos. En el presente trabajo se considera el caso en el que los recursos disponibles son menores que la suma de requerimientos del conjunto de proyectos (*i.e.*, no hay recursos disponibles para apoyar a todos los proyectos).

Un proyecto puede aportar, con cierto grado de incertidumbre, un nivel de impacto en los objetivos. Esta incertidumbre es considerada como la variabilidad en el impacto en los objetivos para un proyecto en particular (*i. e.*, la probabilidad que existe de que el impacto de un proyecto no sea el previsto). El riesgo es definido como la medida de dispersión, conocida en términos probabilísticos, de los impactos esperados.

En algunos casos, tratar este riesgo resulta una tarea difícil (Greco *et al.*, 2013). El riesgo ha sido considerado por diversos investigadores (ver Markowitz, 1952; Huang, 2008;

Abbasianjahromi *et al.*, 2012; Rabbani *et al.*, 2010; Golmohammadi & Pajoutan, 2011). La inclusión del riesgo como característica a considerar dentro de un modelo de selección de carteras de proyectos, puede incrementar la adaptación de dicho modelo al mundo real (Golmohammadi & Pajoutan, 2011).

Este es un problema que se ha atacado desde principios del siglo XX (ver Knight, 1921) y que sigue siendo relevante en la actualidad (Detemple, 2014). Por otra parte, la solución de este problema es relevante en muchas áreas, tales como selección de tecnología, selección de carteras industriales, selección de proyectos de investigación y desarrollo, selección de fondos de inversión, fondos de pensiones, fondos de cobertura, asignación de fondos públicos a proyectos y programas que mejoran el servicio social y educativo. Esta amplia gama de aplicaciones ha traído como consecuencia un gran número de enfoques que tratan el problema de selección de proyectos incorporando el factor riesgo.

Artzner *et al.*, (1999) introducen el método “valor en riesgo” (VaR, por sus siglas en inglés) que mide la máxima pérdida sufrida durante un horizonte de tiempo específico dentro de un nivel de confianza dado. (Rabbani *et al.*, 2010) toman en cuenta la suma de los riesgos de cada proyecto dentro de una función de preferencia difusa para reducir el riesgo final de la cartera. (Badri *et al.*, 2001) modelan el riesgo como el producto de la Probabilidad de falla de un proyecto por su Beneficio. Estos trabajos son criticados principalmente por considerar solo un objetivo a optimizar. En el caso del método valor en riesgo, se señala un enfoque basado en una situación poco común, ya que una alta pérdida máxima puede estar aislada (*i.e.*, puede ser atípica). En el trabajo realizado por Rabbani *et al.*, se hace la suposición de que los riesgos obtenidos en los proyectos pueden ser sumados para calcular el riesgo final de la cartera, situación poco realista. Una desventaja relevante que tienen estos enfoques, es que no hay consideraciones explícitas de la actitud ante el riesgo por parte del DM.

Quizá uno de los trabajos más relevantes que han atacado el problema de la cartera con incorporación de riesgo es el realizado por Markowitz en el área financiera. Markowitz (1952) propuso que el riesgo podría ser considerado bajo la representación de una medida de dispersión (varianza) mientras que el impacto en los objetivos podría ser representado como una medida de tendencia central (media). Si bien el trabajo de Markowitz se dirige a la cartera de inversión financiera, varias de sus ideas más importantes pueden extrapolarse al marco del problema de cartera de proyectos. Una

prueba de que su trabajo ha sido relevante, es que a pesar de tener más de medio siglo de ser publicado, aún diversos investigadores siguen tomándolo como un punto de partida para realizar investigaciones recientes (e.g., Deng *et al.*, 2012; Elton *et al.*, 2010; Soleimani *et al.*, 2009; Deng *et al.*, 2005; Yoshimoto, 1996). Sin embargo, el modelo propuesto por Markowitz sufre de varias desventajas. Por ejemplo, análisis rigurosos del problema llevados a cabo por diversos investigadores (originalmente Merton (1969, 1971)) han revelado que a dicho modelo le faltan algunos ingredientes y muestran que las carteras óptimas deberían incluir, además de términos de dispersión y medida central, componentes de cobertura dinámica diseñados para asegurarse en contra de fluctuaciones que generan incertidumbre en el conjunto de impactos (*cf.* Detemple, 2014). Estos análisis subrayan que la naturaleza restrictiva del enfoque propuesto por Markowitz genera soluciones óptimas solamente bajo circunstancias extremas; es decir, cuando la actitud del DM ante el riesgo puede ser representada por una función logarítmica o cuando las medias y varianzas no varían estocásticamente (ver Detemple, 2014).

Para resolver este problema, algunos autores realizan una caracterización alternativa de carteras óptimas al utilizar conceptos y métodos probabilísticos. Más específicamente, ellos utilizan un simulador de Montecarlo que, a través de una cantidad significativa de puntos estadísticos, ayudan a representar las fluctuaciones estocásticas en el impacto de los proyectos. (Medaglia, 2007) produce un estimador del vector de valores esperados y de percentiles por medio de un simulador de Montecarlo a través de una cantidad significativa de puntos estadísticos (1000), implementa NSGA-II (ver Deb *et al.*, 2002) como método de optimización e impone restricciones lineales. El enfoque propuesto por Medaglia *et al.* (2007) presenta la desventaja de solo admitir una dimensión muy baja del espacio objetivo, pues se ha comprobado que NSGA-II se degrada ya en presencia de solo 4 criterios (Hughes, 2005; Coello, 2006). Las restricciones lineales pueden ser consideradas como desigualdades de primer grado. El uso de restricciones lineales es extendido entre diversos enfoques de optimización multiobjetivo debido a la simplicidad con la que declarativamente modelan el problema (*cf.* Ruggieri & Mesnard, 2010); a pesar de esto, establecer un modelo que imponga este tipo de restricciones, es una limitante significativa puesto que existen múltiples dominios de importancia práctica en los que surgen restricciones de tipo no lineales (Grosan & Abraham, 2008).

Si bien todos estos trabajos consideran el riesgo en problemas de selección de proyectos, muchas de las herramientas actuales de ayuda a la decisión son demasiado simplistas para incorporar las características importantes con las que tienden a lidiar los problemas de decisión en un nivel estratégico (Eiselta & Marianov, 2014; Rabbani *et al.*, 2010). La característica más relevante en la que estos enfoques tienden a ser demasiado simplistas es que solo representan parcialmente la actitud del DM ante el riesgo o contemplan un marco de trabajo de dimensiones limitadas (pueden considerar sólo una pequeña cantidad de objetivos, máximo tres, o establecen limitaciones a las restricciones) que no puede ser apreciado en representación del mundo real (cf. Krink & Paterlini, 2011).

Desde luego que al construir un modelo solo podemos hacer referencia a realidades abstractas. En este contexto, consideramos que un enfoque que hace una representación realista del mundo para resolver el problema de la cartera de proyectos no debe imponer restricciones lineales (cf. Krink & Paterlini, 2011), y debe considerar más de tres objetivos. Siguiendo a Steuer & Hirschberger (2007), esto último es debido a que en la teoría estándar del problema de la cartera, típicamente se considera solo un objetivo estocástico para maximizar el impacto de la cartera. Sin embargo, para construir un modelo en términos más generales, una "cartera adecuada" debe tomar en cuenta algunas consideraciones adicionales. El DM tendría objetivos estocásticos y deterministas adicionales que podrían incluir liquidez, dividendos, número de proyectos en la cartera o responsabilidad social, y así sucesivamente.

En el presente trabajo, se considera el riesgo en el problema de la selección de la mejor (o las mejores) cartera(s) para crear un modelo que refleje la actitud del DM y que, además, proporcione un marco lo suficientemente amplio como para generar una representación aceptable de la realidad. La solución que representa el mejor compromiso entre los objetivos planteados desde el punto de vista del DM es buscada en un ambiente estacionario respecto a la cantidad de recursos a distribuir, el periodo de tiempo en el que estos recursos son distribuidos y la cantidad de alternativas (proyectos). Un problema que es definido en un ambiente estacionario se caracteriza por presentar rasgos que no cambian durante un periodo de tiempo dado y puede ser encontrado de manera natural en el mundo real; instituciones gubernamentales, sin fines de lucro y otras entidades de carácter público trabajan en un ambiente estacionario debido a sus propias capacidades y restricciones. En este trabajo, consideramos que el apoyo a los proyectos (aporte de

recursos) proviene de un monto financiero fijo (T) que es determinado desde el inicio del proceso de toma de decisiones y distribuido totalmente (para aumentar la posibilidad de maximizar las consecuencias) entre una cantidad definida de proyectos al final de este proceso.

Una vez seleccionado el proyecto j para formar parte de una cartera, se le asigna una cantidad de recursos igual a su monto operativo (m_j). Esto proviene de la necesidad de asegurar la factibilidad operativa, es decir, se respeta el rasgo inherente de cada proyecto en el que se aprecia una cantidad de recursos que, al no ser satisfecha, se incurre en altas probabilidades de que las consecuencias esperadas de ese proyecto no puedan ser alcanzadas.

Asumamos que el problema de decisión contiene proyectos relacionados a un conjunto de *tipos de proyecto* (educacional, salud, etc.), donde a cada tipo de proyecto se asocia una lista de restricciones. Entonces, la factibilidad de una cartera está en función del cumplimiento de estas restricciones.

Cada proyecto está formado por la descripción del nivel de impacto en el conjunto de objetivos. Consideramos que es posible definir estos niveles de impacto por medio de distribuciones de probabilidad que pueden ser diferentes entre proyectos y objetivos. La distribución de probabilidad asignada a un objetivo en un proyecto representa la variabilidad en el nivel de impacto esperado en ese objetivo para ese proyecto. En otras palabras, la distribución de probabilidad asignada a un objetivo en particular define la probabilidad de obtener un nivel de impacto dado en dicho objetivo.

Consideramos que los proyectos se originan de situaciones no relacionadas entre sí, lo que hace que seleccionar un proyecto para pertenecer a la cartera no implica que el nivel de impacto o monto requerido por algún otro proyecto varía. En otras palabras, asumimos que el comportamiento estadístico de un proyecto no se ve afectado al apoyar a algún otro proyecto.

En este trabajo buscamos una solución al problema de la cartera de proyectos con las siguientes consideraciones:

- Existe una cantidad fija de recursos a distribuir en un único periodo de tiempo.
- Los recursos a distribuir son de carácter monetario.

- Hay un número fijo de proyectos.
- Cada proyecto tiene asociado un monto operativo.
- Existe un conjunto no vacío de tipos de proyectos.
- Cada proyecto se relaciona con al menos un tipo de proyecto.
- Cada tipo de proyecto es caracterizado con una lista de restricciones,
- Los proyectos son caracterizados por múltiples objetivos (la misma cantidad para todos los proyectos).
- A cada proyecto se asocia un impacto (evaluación) en cada uno de los objetivos.
- Existe incertidumbre probabilista en el nivel de impacto de los objetivos.
- Los proyectos son considerados independientes con respecto al nivel de impacto en los objetivos y al monto requerido.

1. 2 HIPÓTESIS

Con respecto al problema definido y, habiendo mostrado la necesidad de un modelo que proporcione las características necesarias para representar el mundo real al considerar el problema de la cartera, se plantean las siguientes hipótesis:

H1. Es posible generar soluciones al problema de la cartera con las siguientes características: no se imponen restricciones lineales, se consideran muchos objetivos (más de tres), se incorporan múltiples comportamientos ante el riesgo por parte del DM.

H2. Las soluciones al problema de la cartera dependen de la actitud ante el riesgo por parte del DM.

H3. Las soluciones generadas al considerar neutralidad ante el riesgo por parte del DM son equivalentes a las soluciones generadas por enfoques reportados en la literatura especializada.

1. 3 OBJETIVOS

1. 3. 1 OBJETIVOS GENERALES

Desarrollar un modelo que genere soluciones justificables, permita incorporar múltiples actitudes ante el riesgo por parte del DM, admita muchos objetivos (por lo menos cuatro), y no imponga requisitos a las funciones que expresan restricciones.

Desarrollar una herramienta computacional que explote el modelo y genere soluciones de calidad en un tiempo razonable.

1. 3. 2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Entender el dominio involucrado. (En este caso, es necesario desarrollar un estudio de la teoría relacionada con el apoyo a la toma de decisiones.)

Realizar una investigación rigurosa de técnicas de computación evolutiva (en particular, algoritmos genéticos).

Crear un simulador para analizar estadísticamente las variaciones en el impacto de los proyectos, permitiendo al DM obtener información de carteras conocidas.

Establecer el proceso que permitirá representar el riesgo relacionado con una cartera.

Implementar un enfoque evolutivo que use el simulador, permita la selección de la cartera óptima y evite la imposición de restricciones lineales.

Permitir que la herramienta computacional creada sea lo suficientemente intuitiva como para que pueda ser usada con facilidad por el DM.

La herramienta deberá admitir la introducción de un conjunto de parámetros que brindan al DM la opción de atacar problemas con características distintas en los problemas (*i. e.* se busca ofrecer generalidad).

Establecer un proceso de evaluación en el que se defina cómo pueden ser comparadas las soluciones generadas por este modelo con las soluciones generadas por otros métodos.

Capítulo 2

MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

2.1 APOYO A LA TOMA DE DECISIONES MULTICRITERIO

Tomar una decisión se basa en comparar diferentes puntos de vista (unos a favor y otros en contra) relacionados con la aceptación o rechazo de una o más alternativas. Es común que estas decisiones deban alcanzarse en ambientes que obliguen al ente encargado de hacerlas a analizar múltiples características de las alternativas. Estas características pueden ser llamadas también criterios. Desde hace décadas, el hombre ha intentado desarrollar técnicas y mecanismos que le sirvan de soporte para tomar decisiones, pero sobre todo hay una gran tendencia al apoyo a la decisión multicriterio. De acuerdo con Roy (1990), el objetivo del apoyo a la decisión multicriterio es “sobre todo, que nos permita mejorar el grado de conformidad y la coherencia entre la evolución de un proceso de toma de decisiones y los sistemas de valores y objetivos de aquellos que participan en este proceso”. Por lo que decimos que la ayuda a la decisión multicriterio busca modelar la subjetividad del ente principal encargado del proceso de decisión (*decision maker*, DM).

A pesar de esta tendencia al uso de técnicas multicriterio como apoyo a la decisión, es posible encontrar enfoques que realizan una simplificación del problema y tratan de representarlo al considerar solamente un criterio. Sin embargo, la simplificación de múltiples criterios en uno solo, puede generar los siguientes problemas (Figueira *et al.*, 2005):

- ignorar ciertos aspectos de la realidad;
- facilitar el establecimiento de equivalencias, lo que parece implicar una naturaleza ficticia;
- presentar características solamente de un sistema de valores en particular como objetivo.

Por el contrario, un enfoque multicriterio contribuye a evitar estos peligros al:

- considerar un amplio espectro de puntos de vista, lo que implica una alta probabilidad de estructurar el proceso de decisión con respecto a los actores involucrados;

- construir una familia de criterios que preserve, por cada uno de ellos, sin ninguna conversión ficticia, el significado concreto original de las evaluaciones correspondientes;
- facilitar el debate sobre el rol respectivo (peso, veto, nivel de aspiración, nivel de rechazo,...) que cada criterio pudiera desempeñar durante el proceso de ayuda a la decisión.

A continuación se muestran algunos enfoques comunes mediante los que se ha intentado dar solución a diversos problemas relacionados a la toma de decisiones (incluidos los problemas multicriterio).

2. 2 PRINCIPALES ESCUELAS DE LA DECISIÓN

Palay y Slowinski (1994) proponen una clasificación de los métodos de apoyo a la decisión en tres principales enfoques: i) el enfoque funcional, que toma como premisa fundamental la racionalidad y consistencia del DM y que tiene por objetivo primordial construir funciones de utilidad; ii) el enfoque relacional, que, a partir de cierta información preferencial, formula una resolución entre dos alternativas potenciales; iii) la inteligencia artificial, que intenta “extraer” conocimiento a partir de muestras de ejemplos en los que el DM ha establecido sus preferencias.

2. 2. 1 ENFOQUE FUNCIONAL

El enfoque funcional o normativo busca la formalidad de una teoría basada en axiomas. Esto lo hace mediante la suposición de una consistencia (*i.e.*, comportamiento ideal) por parte del DM, misma que se establece como: a) ilimitada, confiriéndole capacidades para percibir y evaluar diferencias entre las alternativas potenciales que, descriptivamente, serían imperceptibles; b) irrestricta, en el sentido que no puede rechazar su tarea de establecer juicios de preferencia entre dos alternativas potenciales (pudiendo establecer, como caso particular, una relación de indiferencia entre ellas).

Es posible considerar tres fundamentos en la descripción del marco general de este enfoque (cf. Roy, 1990):

- Un conjunto A bien definido de alternativas factibles a .

La definición de este conjunto puede tomar dos formas: i) en la forma analítica, la alternativa a es un vector $a = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ y se considera un conjunto bien definido de restricciones que conduce al conjunto A a formar parte de $\mathbb{R}^m$; ii) en la forma enumerativa, A es descrito por una lista de alternativas a y no se considera algún tipo de relación con un conjunto de restricciones.

- Un modelo de preferencias, bien formado en la mente del DM, racionalmente estructurado a partir de un conjunto de atributos

Considerando $a, b \in A$, el DM es capaz de seleccionar (sin ambigüedades) una y solo una de las siguientes posibilidades:

- $a > b$: 'a' es estrictamente preferida a 'b'. Implica que el DM prefiere la alternativa 'a' a la alternativa 'b'; en otras palabras, existen razones claras y positivas de que el DM estaría decepcionado si fuese obligado a tomar la alternativa 'b' en lugar de la alternativa 'a'.
- $a \sim b$: 'a' es indiferente a 'b'. Significa que el DM es indiferente entre las alternativas 'a' y 'b'; en otras palabras, existen razones claras y positivas de que el DM no estaría decepcionado si fuese obligado a tomar una u otra alternativa.
- $a \succeq b$: 'a' es preferida débilmente a 'b'. Representa que el DM sostiene que 'a' es al menos tan buena como 'b'; en otras palabras, existen razones claras y positivas de que el DM no estaría decepcionado si fuese obligado a tomar la alternativa 'a'. Al hacer esta afirmación, en realidad el DM está sosteniendo que prefiere estrictamente a 'a' sobre 'b' o que es indiferente entre las dos alternativas.

La relaciones mencionadas deben cumplir con las siguientes propiedades:

Transitividad. Sean $a, b, c \in A$, si el DM afirma que $a > b$ y $b > c$, entonces también debe afirmar que $a > c$.

Asimetría. Sean $a, b \in A$, si el DM afirma que $a > b$, entonces no debe afirmar que $b > a$.

Transitividad. Sean $a, b, c \in A$, si el DM afirma que $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces también debe afirmar que $a \sim c$.

Reflexividad. Para toda opción $a \in A$ sucede que $a \sim a$.

Simetría. Sean $a, b \in A$, si el DM afirma que $a \sim b$, entonces también debe afirmar que $b \sim a$.

Transitividad en conjunto. Sean $a, b, c \in A$, si el DM afirma que $a \sim b$ y $b > c$, entonces también debe afirmar que $a > c$; y si afirma que $a > b$ y $b \sim c$, entonces también debe afirmar que $a > c$.

- Un problema matemático bien formulado

Supóngase el caso de una función de utilidad (o función de valor) de valores reales U definida en A tal que

$a \succ b$ si y solo si $U(a) > U(b)$

$a \sim b$ si y solo si $U(a) = U(b)$

$a \succeq b$ si y solo si $U(a) \geq U(b)$

Entonces, el enfoque funcional busca “el descubrimiento de una alternativa óptima $a^* \in A$ ”. Donde a^* debe justificar:

$$U(a^*) \geq U(a) \quad \forall a \in A$$

2. 2. 2 ENFOQUE RELACIONAL

El enfoque funcional ha logrado con éxito la formalidad de una teoría basada en axiomas, concentrándose en la creación de bases formales para modelar la preferencia del DM., sin embargo, presenta desventajas e imprecisiones debido a la rigidez que el formalismo matemático agrega a los fenómenos reales del comportamiento humano, modelando únicamente situaciones ideales con un concepto propio de racionalidad.

El enfoque relacional intenta evitar las limitaciones que sufre el enfoque funcional a través de un modelo flexible que no exige al DM comportamientos rígidos y, en ocasiones, alejados de la realidad. Este enfoque implementa una metodología llamada *Multicriteria Decision Aid* (MCDA) que puede ser definida como (Roy, 1996): la actividad de la persona que, a través del uso de modelos explícitos pero no necesariamente formalizados de manera completa, ayuda a obtener elementos de respuestas a las preguntas de aquellos interesados en un proceso de decisión. Estos elementos trabajan para aclarar la decisión y usualmente recomendar, o simplemente favorecer un comportamiento que incremente la consistencia entre la evolución del proceso y los objetivos y el sistema de valores de estos interesados.

Según Roy (2010), bajo la concepción de MCDA, el analista no necesita aceptar ninguno de los siguientes postulados:

Postulado del óptimo del DM. En el contexto de decisión estudiado, existe al menos una decisión óptima, o, en otras palabras, existe una decisión para la cual es posible (si se dispone del suficiente tiempo y medios) establecer objetivamente que

no hay decisiones estrictamente mejores con respecto al sistema de preferencias del DM.

Postulado de la realidad del contexto de la decisión. Los principales aspectos de la realidad sobre los que se basa la ayuda a la decisión (particularmente las preferencias del DM) están relacionadas a los objetos de conocimiento que pueden ser vistos como datos (i. e., existen fuera de la forma en la que se modelan); estos objetos también pueden ser vistos como suficientemente estables durante el tiempo en el que las preguntas son realizadas, de modo que es posible consultar el estado exacto o valor exacto (determinista o estocástico) de unas características dadas que son juzgadas para retratar con precisión un aspecto de la realidad.

Según Roy (1996), hay varias razones para eludir el dilema de tener obligatoriamente que escoger entre preferencia estricta e indiferencia:

- a) A veces no se puede discriminar entre $>$ y $\sim$. La información disponible puede estar incompleta o ser demasiado subjetiva. Implicar indiferencia de la falta de información equivale a tomar riesgos arbitrarios (Roy, 1990).
- b) Puede que las preferencias del DM no estén bien definidas. Por ejemplo, eso siempre ocurre (aunque no únicamente) cuando el DM es una entidad grupal.
- c) En ocasiones no es posible determinar las preferencias del DM, pues él puede ser inaccesible para el analista, o ser una entidad mal definida.
- d) A veces el DM no quiere discriminar entre preferencia e indiferencia, a causa de inseguridad, falta de información, imprecisión o contradicciones importantes entre los atributos de la decisión (Roy, 1990, 1996).

El objetivo de esta metodología es proporcionar al DM un conjunto de bases científicas que le sirvan como herramienta para llevar a cabo un procedimiento de juicio que tenga como desenlace una solución que lo satisfaga. De acuerdo con la situación, esta metodología puede contribuir a (Figueira *et al.*, 2005):

- analizar el contexto de toma de decisión al identificar los actores, las posibilidades de acción, sus consecuencias, ...;

- organizar y/o estructurar cómo el proceso de toma de decisión se desarrolla para incrementar la coherencia entre, por un lado, los valores subyacentes a los objetivos y metas y, por el otro, la decisión tomada;
- lograr la cooperación de los actores al proponer claves para un mejor entendimiento mutuo y un marco de trabajo favorable para debatir;
- elaborar recomendaciones usando los resultados tomados de modelos y procedimientos computacionales concebidos dentro del marco de un hipótesis de trabajo;
- participar en la legitimación de la decisión final.

A pesar de la relevancia de estas aportaciones, es necesario que se consideren algunas limitaciones en la objetividad durante el proceso de toma de decisión. Según Roy (1990), estas limitaciones son:

- i) La frontera del conjunto de alternativas potenciales suele ser borrosa. A causa de esto, el límite entre lo que es factible y lo que no lo es tiene, de manera inevitable, una cierta cantidad de arbitrariedad. Una limitación más importante en la objetividad viene del hecho de que este límite se modifica frecuentemente a la luz de lo que se encuentra durante el proceso de decisión en sí mismo.
- ii) En muchos problemas del mundo real, el DM, como una persona verdaderamente capaz de tomar la decisión, en realidad no existe: por lo general, varias personas toman parte en el proceso de decisión y tendemos a confundir al que ratifica la decisión con el que es llamado “entidad tomadora de decisiones”.
- iii) Incluso cuando el DM no es una persona mítica, las preferencias del DM muy rara vez están bien definidas: dentro y entre áreas de convicciones firmes se encuentran zonas brumosas de riesgo, creencias no sostenidas completamente o, de hecho, conflictos y contradicciones. Tenemos que admitir, por lo tanto, que el propio estudio contribuye a responder preguntas, resolver conflictos, transformar contradicciones y desestabilizar ciertas convicciones.
- iv) Datos como los valores numéricos de los desempeños en los criterios considerados para la toma de decisión son, en muchos casos, imprecisos y/o definidos en una manera arbitraria.

- v) En general, es imposible decir que una decisión es buena o mala solo refiriéndonos a un modelo matemático: aspectos organizacionales, pedagógicos, y culturales del proceso de decisión completo que llevan a tomar una decisión dada también contribuyen a la calidad y éxito de esta decisión.

Es necesario que la ayuda a la decisión desempeñe un papel objetivo en la resolución de estas subjetividades (resultantes de las limitaciones descritas anteriormente) con la finalidad de conseguir que la toma de la decisión se realice con fundamentos puramente científicos.

2. 2. 3 INTELIGENCIA ARTIFICIAL

De acuerdo con Phillips-Wren & Jain (2006), una clase refinada de técnicas de Inteligencia Artificial está revolucionando el apoyo a la toma de decisiones, especialmente bajo condiciones de riesgo por medios tales como la coordinación de la entrega de datos, el análisis de tendencias de los datos, proporcionando pronósticos, desarrollando la consistencia de los datos, la cuantificación del riesgo, la previsión de las necesidades de los datos del usuario, proporcionando información al usuario en las formas más apropiadas, y sugiriendo cursos de acción. Esta sección se centra en técnicas y aplicaciones de la Inteligencia Artificial que pueden apoyar la toma de decisiones.

De acuerdo con Figueira *et al.* (2005), un enfoque relacionado con la inteligencia artificial puede presentar las siguientes ventajas:

- El DM proporciona información en forma de ejemplos de decisiones, que requiere esfuerzo cognitivo relativamente bajo y que es bastante natural.
- El modelo de decisión también se expresa de una manera muy natural por reglas de decisión. Esto permite una absoluta transparencia de la metodología para el DM.
- Otra característica interesante de este enfoque es su flexibilidad, ya que cualquier modelo de decisión se puede expresar en términos de reglas de decisión y, mejor aún, este modelo puede ser mucho más general que el resto de modelos de decisión existentes utilizadas en MCDA.

La Inteligencia Artificial puede ser definida como “[la automatización de] actividades que asociamos con el pensamiento humano, actividades como la toma de decisión, la resolución de problemas, el aprendizaje...” (Bellman, 1978). Siguiendo a Russell (2009), la Inteligencia Artificial es el estudio de los cálculos para hacer posible percibir, razonar, y actuar; en otras palabras, intenta no solamente entender sino construir entidades inteligentes.

En el contexto de la Inteligencia Artificial, estas entidades son llamadas agentes. Un agente es algo que opera autónomamente, que percibe su ambiente, persiste sobre un tiempo prolongado de tiempo, se adapta a los cambios, y crea y persigue metas. Un agente racional es aquel que actúa para conseguir el mejor resultado o, cuando existe riesgo, el mejor resultado esperado. Para cada posible secuencia de percepciones, un agente racional debe seleccionar una acción que, se espera, maximice su medida de rendimiento, teniendo en cuenta las pruebas aportadas por la secuencia de percepciones y el conocimiento que tiene incorporado en el agente. La inteligencia se ocupa principalmente de la acción racional. Idealmente, un agente inteligente toma la mejor acción posible en una situación dada (Russell, 2009).

Los agentes inteligentes generalmente trabajan mediante la implementación de dos módulos (ver Bohanec & Rajkovič, 1990):

- i) una base de conocimiento, conteniendo el conocimiento acerca del dominio de un problema en particular. El conocimiento puede ser representado en diversas formas. Las más comunes son reglas de producción (si-entonces), redes semánticas y marcos (Goodall, 1985). Además, estos formalismos son capaces normalmente de lidiar con la imprecisión, incertidumbre y la naturaleza cualitativa del conocimiento experto; y
- ii) un motor de inferencia, que resuelve los problemas establecidos por el usuario, a través de un procedimiento de razonamiento sobre la base de conocimiento y genera explicaciones de las soluciones orientadas al usuario.

2. 2. 4 ELEMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LA DECISIÓN EN CONDICIONES DE RIESGO

Lo descrito hasta ahora no especifica la situación de existencia de riesgo en el nivel de impacto de las alternativas. En otras palabras, solamente se ha abordado el caso en el que las consecuencias de elegir una alternativa son conocidas y no se ha planteado cuál es el comportamiento de los enfoques descritos ante la falta de este conocimiento. A continuación se puntualiza el procedimiento que sigue cada uno de estos enfoques para lograr el tratamiento del riesgo.

2. 2. 4. 1 Tratamiento del riesgo en el enfoque funcional

La extensión del enfoque funcional más mencionada por la literatura para el tratamiento del riesgo es la consideración de ciertas estructuras llamadas loterías que describen posibles consecuencias y las probabilidades de esas consecuencias. El aporte más sobresaliente en este tema fue la formalización de la teoría de la utilidad esperada de von Neumann y Morgenstern (1947) pero diversos investigadores han seguido realizando contribuciones y refinamientos a su trabajo.

La representación popular de una cartera es:

$$I = \langle p_1, x_1; p_2, x_2, \dots, p_r, x_r \rangle$$

donde $p_i \geq 0$ representa la probabilidad de ganar el premio x_i , $i = 1, 2, \dots, r$ y $\sum p_i = 1$.

También es común ver loterías compuestas, cuyos premios son ganar la entrada a otra lotería:

$$I = \langle q_1, I_1; q_2, I_2, \dots, q_s, I_s \rangle$$

donde $q_i \geq 0$ representa la probabilidad de ganar la entrada a la lotería I_i , $i = 1, 2, \dots, s$ y $\sum q_i = 1$.

Sea X el conjunto de premios directos (no loterías) que se pueden obtener de una lotería; sea L el conjunto de loterías (simples o compuestas) sobre las que el DM realiza la selección; sea R_L el conjunto de posibles resultados que se pueden obtener de las loterías. Y, por conveniencia y sin pérdida de generalidad, establezcamos los premios de tal manera que $x_1 \succeq x_2 \succeq \dots \succeq x_r$. Definamos también las loterías descritas como “loterías de referencia” de la siguiente manera:

$$\langle p, x_1; 0, x_2, \dots, 0, x_{r-1}; (1-p), x_r \rangle$$

Donde se obtiene el mejor premio (x_1) con una probabilidad p y el peor premio (x_r) con una probabilidad $p-1$. Representemos a este tipo de loterías como $x_i p x_r$. Supongamos la existencia de una función de utilidad $u: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ definida sobre $X = \{x_1, x_2, \dots, x_r\}$, tal que:

$$x_j \succeq x_k \Leftrightarrow u(x_j) \geq u(x_k) \quad \forall x_j, x_k \in X$$

y

$$\langle p_1, x_1; p_2, x_2, \dots, p_r, x_r \rangle \succeq \langle p'_1, x_1; p'_2, x_2, \dots, p'_r, x_r \rangle \Leftrightarrow \sum p_i u(x_i) \geq \sum p'_i u(x_i)$$

Sea $w_1, w_2 \in R_L$. Se dice que hay comparabilidad en R_L ya que al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$w_1 \succeq w_2$$

$$w_2 \succeq w_1$$

Von Neumann y Morgenstern formalizaron un paradigma de decisión racional bajo riesgo definido por el siguiente conjunto de axiomas:

Axioma 1 (orden débil): Para cada par de loterías, $\succeq$ es un orden débil (relación comparable y transitiva).

Axioma 2 (no trivialidad): $x_1 \succ x_r$

Axioma 3 (reducción de loterías compuestas a una lotería simple): Sea $I = \langle q_1, I_1; q_2, I_2, \dots, q_s, I_s \rangle$, donde $I_j = \langle p_{j1}, x_1; p_{j2}, x_2, \dots, p_{jr}, x_r \rangle; j = 1, 2, \dots, s$. Si $I' = \langle p_1, x_1; p_2, x_2, \dots, p_r, x_r \rangle$, donde $p_i = q_1 p_{1i} + q_2 p_{2i} + \dots + q_s p_{si}; i = 1, 2, \dots, r$, entonces el DM debe afirmar que $I \sim I'$

Axioma 4 (sustitucionalidad): Sean $a_i, b, I, I' \in R_L$. Sea $I = \langle q_1, a_1; q_2, a_2, \dots, q_r, a_r, \dots, q_r, I_r \rangle$ y sea $I' = \langle q_1, a_1; q_2, a_2, \dots, q_r, b, \dots, q_r, I_r \rangle$. Si $a_i \sim b$, entonces el DM debe afirmar que $I \sim I'$.

Axioma 5 (el experimento de referencia): El DM puede expresar preferencias sobre loterías de la forma $x_i p x_r \in L \quad \forall p, 0 \leq p \leq 1$.

Axioma 6 (monotonía): $x_i p x_r \succeq x_i p' x_r \Leftrightarrow p \geq p'$.

Axioma 7 (continuidad): $\forall x_i \in X \exists u_i, 0 \leq u_i \leq 1$, tal que $x_i \sim x_i u_i x_r$.

Un concepto relevante en la teoría de la decisión en condiciones de riesgo considerada por el enfoque funcional es el concepto de Equivalente de Certeza que corresponde al

premio que el DM consideraría indiferente a entrar en la lotería. Esto es: si se le presenta al DM la opción de entrar a la lotería o recibir el equivalente de certeza, aquél se vería indiferente a una u otra opción. Más formalmente, si I es una lotería y u una función de utilidad, el equivalente de certeza de I es x_c tal que $u(x_c) = E[u(I)]$.

$E[u(I)]$ puede ser obtenida solamente cuando el DM juega I una cantidad suficiente de veces. Sin embargo, dicha situación es difícil de ocurrir por lo que es necesario tomar en cuenta la actitud ante el riesgo del DM. Esta actitud es subjetiva y se puede clasificar como:

- aversa al riesgo cuando $E[u(I)] < u[E(I)]$ y $x_c < E(I)$.
- propensa al riesgo cuando $E[u(I)] > u[E(I)]$ y $x_c > E(I)$.
- neutral al riesgo cuando $E[u(I)] = u[E(I)]$ y $x_c = E(I)$.

Donde $E(I)$ es el promedio de ganancias que resulta de I .

Para realizar una correcta tarea de apoyo a la toma de decisiones en condiciones de riesgo, es necesario realizar un procedimiento acorde con la actitud del DM.

2. 2. 4. 2 Tratamiento del riesgo en el enfoque relacional

La metodología MCDA siempre ha trabajado bajo la premisa de tres conceptos fundamentales, según Roy (1990), estos conceptos son:

- Un conjunto no necesariamente estable A de acciones potenciales a .

Estas acciones pueden ser vistas como los bloques esenciales del proceso de toma de decisión, *i. e.*, son los objetos fundamentales que el proceso toma en cuenta para llegar a una conclusión. Aunque estas acciones están identificadas dentro del proceso, sus consecuencias (cuantitativas o cualitativas) no necesariamente son conocidas.

Según Figuera *et al.* (2005), el concepto de acción no incorpora ninguna noción de factibilidad o posible implementación *a priori*. En este sentido, una acción es calificada como potencial cuando se considere posible ponerla en práctica, o simplemente cuando merece un poco de interés en el proceso de ayuda. El concepto de alternativa corresponde al caso particular en el que el modelado es tal que dos acciones potenciales

distintas no pueden en ninguna manera ser puestas en funcionamiento conjuntamente. Esta exclusión mutua viene de una forma de modelación que de manera integral aborda aquello que es el objeto de la decisión, o aquello hacia lo que está dirigida la ayuda a la decisión. Muchos autores suponen implícitamente que las acciones potenciales son, por definición, mutuamente excluyentes. Sin embargo, una hipótesis de este tipo no es de ninguna manera obligatoria. En muchos contextos de ayuda a la decisión en el mundo real, puede ser más apropiado adoptar otra forma de modelar de tal manera que varias acciones potenciales puedan ser implementadas conjuntamente. En todos los casos, A denotará el conjunto de acciones potenciales consideradas en una etapa determinada del proceso de ayuda a la decisión. Este conjunto no es necesariamente estable, *i. e.*, puede evolucionar a lo largo de dicho proceso. Esta evolución puede provenir del entorno del estudio, pero también desde el estudio en sí mismo. El estudio puede arrojar luz sobre algunos aspectos del problema, lo que podría dar lugar a la revisión de algunos datos y luego, posiblemente, a la modificación de la línea divisoria entre lo que es factible y lo que no lo es.

A es definido formalmente como:

$$A = \{a_i / i = 1, \dots, m\}$$

Donde $m = |A|$.

- Comparaciones basadas en n criterios (o pseudocriterios) g_k

Existe una familia consistente F de n criterios g_k (Bouyssou, 1990), mediante los cuales se caracteriza cada una de las acciones potenciales y pueden analizarse sus consecuencias.

Siguiendo a Roy (1990), los criterios g_k son introducidos para reflejar, eventualmente con una cierta falta de claridad, las preferencias de uno o varios actores. Los actores en cuestión son o bien los que intervienen en el proceso de decisión o bien los que actúan en favor de aquellos por los que la ayuda a la decisión es proporcionada. Es esencial concebir F de tal forma que exista un consenso tan amplio como sea posible sobre el siguiente punto: la comparación entre dos acciones potenciales x y y puede ser basada y discutida a través de la comparación de los dos vectores de desempeño:

$$g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x)),$$

$$g(y) = (g_1(y), \dots, g_n(y)).$$

En lo adelante y sin perder generalidad, consideraremos que el sentido de la preferencia es el de incremento numérico de la imagen de las funciones criterio.

Criterios verdaderos: Es la forma más simple de los criterios, donde no existen umbrales, y las diferencias entre los valores de los criterios son utilizadas para determinar cuál opción se prefiere.

Se dice que la opción x es preferida a la opción y con respecto al i -ésimo criterio si su valor es superior, es decir:

$$g_i(x) > g_i(y)$$

Se dice que la opción x es indiferente a la opción y con respecto al i -ésimo criterio si sus valores son iguales, es decir:

$$g_i(x) = g_i(y)$$

Pseudocriterios: Un pseudocriterio reconoce dos tipos de umbrales de discriminación para las diferencias de sus valores. La utilización del valor de un criterio verdadero para modelar las preferencias es con frecuencia poco realista. La realidad nos demuestra que existe una zona intermedia dentro de la cual la información preferencial es contradictoria o indeterminada. Esto le da fundamento a la utilización de dos umbrales (q, p) para modelar los diferentes niveles de preferencias, en cada criterio. Primero, un umbral de indiferencia q , dentro del cual el DM muestra indiferencia, y, segundo, un umbral de preferencia p , encima del cual el DM expresa una preferencia estricta (sin lugar a duda).

- Un problema matemático mal definido

Contrariamente a lo propuesto por el enfoque funcional, MCDA no conduce a un problema bien indicado. Sobre la base de:

- la familia F ,
- información adicional inter-criterios (peso, umbrales de veto, tasas de sustitución....),

el problema es ahora elaborar:

- ya sea un modelo matemático que nos permita comparar las acciones potenciales de una manera integral, *i. e.*, a diferencia de las comparaciones parciales para las que sólo un criterio entra en juego (los $n - 1$ otros tienen el mismo valor),

- o un procedimiento que ayude a reflexionar y realizar avances en la formulación de las comparaciones exhaustivas entre acciones potenciales.

Por último, la ayuda puede ser proporcionada por referencia a tres puntos de vista diferentes que corresponden a los tres enunciados de los problemas:

(P_α) La selección de una mejor acción, óptima.

(P_β) La asignación de cada acción a una categoría predefinida apropiada de acuerdo a lo que queremos que se convierta posteriormente (por ejemplo, la aceptación, rechazo o demora para obtener información adicional).

(P_γ) El ordenamiento de las acciones que parezcan ser las más satisfactorias de acuerdo con un pre-orden total o parcial.

ELECTRE

Dentro de los métodos que utilizan el enfoque MCDA, quizá los más importantes son los métodos ELECTRE (I, II, III, IV, TRI, TRI-B, TRI-C, TRI-NC e IS). ELECTRE es un acrónimo proveniente de *ELimination Et Choix Traduisant la REalité* (eliminación y elección expresando la realidad) (cf. Giard & Roy, 1985). Los métodos ELECTRE son relevantes cuando el DM quiere incluir en el modelo, al menos, tres criterios. Sin embargo, los procedimientos de agregación están más adaptados a situaciones en las que los modelos de decisión incluyen más de cinco criterios (hasta doce o trece) (ver Roy, 1991; Figueira *et al.*, 2005).

Y al menos una de las siguientes situaciones debe ser verificada:

- Las acciones se evalúan (en al menos un criterio) en una escala ordinal o en una escala débil de intervalos. Estas escalas no son adecuadas para la comparación de diferencias. Por lo tanto, es difícil y/o artificial definir una codificación que tenga sentido en términos de diferencias sobre las preferencias de los ratios $\frac{g_j(a) - g_j(b)}{g_j(c) - g_j(d)}$ donde $g_j(x)$ es la evaluación de la acción x en el criterio g_j .

- Existe una fuerte heterogeneidad relacionada con la naturaleza de las evaluaciones de los criterios (e. g., duración, distancia, ruido, seguridad, lugares de interés cultural, monumentos,...). Esto hace que sea difícil agregar todos los criterios en una escala única y común.
- El DM puede no aceptar la compensación en la pérdida de un criterio dado por la ganancia en otro. Por lo tanto, este tipo de situaciones requieren el uso de procedimientos de agregación no compensatorios.
- Se sostiene lo siguiente en al menos un criterio: pequeñas diferencias de las evaluaciones no son significativas en términos de preferencias, mientras que la acumulación de varias diferencias pequeñas puede llegar a ser significativa. Esto requiere la introducción de umbrales de discriminación (de indiferencia y preferencia) que conduce a una estructura de preferencias con una relación binaria de indiferencia intransitiva y completa.

Los métodos ELECTRE implementan el concepto de relación de sobreclasificación o *outranking* (S) (ver Zopounidis y Pardalos, 2010). Para dos acciones potenciales x , y ($x, y \in A$), afirmamos que si xSy entonces existen argumentos suficientemente fuertes para creer que la afirmación “ x es al menos tan buena como y ” es verdadera y no existen argumentos lo suficientemente fuertes que la contradigan. Roy (1996) describe diversas relaciones binarias mediante las que se puede definir S (cf. Fernández *et al.*, 2013):

Indiferencia: Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que justifican la equivalencia entre x , y . Notación: xIy . I es simétrica.

Preferencia estricta: Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que justifican la preferencia significativa a favor de uno (identificado) de los dos objetos. La declaración “ x se prefiere estrictamente a y ” se denota por xPy . P es una relación asimétrica.

Preferencia débil: Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que favorecen x sobre y , pero que no son suficientes para justificar la preferencia estricta. Cuando la preferencia débil se sostiene para las dos alternativas, indiferencia y preferencia estricta son indistinguibles. Esto se denota por xQy . Q es una relación asimétrica.

Incomparabilidad: En este caso ninguna de las situaciones anteriores se sostiene; *i. e.*, no hay razones claras y positivas que justifiquen alguna de las relaciones anteriores. Notación: xRy . R es simétrica.

K -preferencia: Corresponde a la existencia de razones claras y positivas que justifican la preferencia estricta a favor de uno (identificado) de dos objetos x, y ; o incomparabilidad entre ellos, pero no hay una división significativa entre las situaciones de preferencia estricta e incomparabilidad. Notación: xKy . K es una relación asimétrica.

No preferencia: Corresponde a situaciones en las que indiferencia e incomparabilidad son a la vez posibles, pero estas situaciones no pueden diferenciarse. Esto se denota por $x \sim y$. $\sim$ es una relación simétrica.

Entonces, se puede establecer que $xSy \Leftrightarrow xPy \square xQy \square xIy$. Nótese que $xSy \square ySx \Leftrightarrow xIy$, $xSy \square y \neg Sx \Leftrightarrow xPy \square xQy$, $x \neg Sy \square y \neg Sx \Leftrightarrow xRy$.

Donde $x \neg Sy$ indica una negación de la afirmación “ x es al menos tan buena como y ” (*i. e.*, $\neg$ es el operador de negación para la relación S).

Relación de sobreclasificación “borrosa”

Una relación de sobreclasificación borrosa asocia un nivel o grado de credibilidad de la sobreclasificación a cada par de acciones (x, y) . Ese nivel es identificado mediante la notación $\sigma(x, y)$ y cumple que

$0 \leq \sigma(x, y) \leq 1$. $\sigma(x, y)$ puede ser expresado por la siguiente equivalencia lógica (ver Perny, 1998):

$$xSy \Leftrightarrow C(x, y) \square \neg D(x, y)$$

donde $C(x, y)$ es el predicado que representa el grado de mayoría entre los criterios a favor de la aserción “ x es al menos tan buena como y ”, $D(x, y)$ es el predicado acerca de la fuerza de la coalición de discordancia, $\square$ y $\neg$ son conectores lógicos para la conjunción y negación, respectivamente.

$\neg D(x, y)$ denota el grado de verdad del predicado de no-discordancia y se calcula como sigue:

$$\neg D(x, y) = \min_{j \in C(yPx)} [1 - d_j(x, y)]$$

Índice de Concordancia:

Para cada par de acciones (x, y) , se puede definir un grado de credibilidad parcial $\sigma_j(x, y)$, asociado a la sobreclasificación de x sobre y con respecto al j -ésimo atributo, de la siguiente forma:

$$\sigma_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(x) - g_j(y) \geq 0 \quad \text{o} \quad g_j(y) - g_j(x) \leq q_j(g_j(x)) \\ 0 & \text{si } g_j(y) - g_j(x) \geq p_j(g_j(x)) \\ [p_j(g_j(x)) - (g_j(y) - g_j(x))] / [p_j(g_j(x)) - q_j(g_j(x))] & \text{si } q_j(g_j(x)) \leq g_j(y) - g_j(x) \leq p_j(g_j(x)) \end{cases}$$

donde p_j y q_j denotan los umbrales de preferencia estricta e indiferencia del j -ésimo atributo, respectivamente.

Utilizando la información contenida en σ_j , el índice de concordancia se define como:

$$C(x, y) = \sum w_j \sigma_j(x, y) / \sum w_j$$

Índice de Discordancia:

Para cada par de acciones (x, y) , se puede definir un índice de discordancia parcial, $d_j(x, y)$, asociado al j -ésimo atributo de la siguiente forma:

$$d_j(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } \Delta_j \geq v_j \\ (\Delta_j - u_j) / (v_j - u_j) & \text{si } u_j < \Delta_j < v_j \\ 0 & \text{si } \Delta_j \leq u_j \end{cases}$$

Donde u_j y v_j son los umbrales de pre-veto y veto, respectivamente; y $\Delta_j = g_j(y) - g_j(x)$, se calcula para todo criterio que pertenezca a la coalición de concordancia $C(yPx)$.

2. 2. 4. 3 Tratamiento del riesgo en la inteligencia artificial

Una forma de incorporar información imprecisa dentro del marco de trabajo de la toma de decisiones es la teoría de los conjuntos difusos. Esta teoría fue introducida por Zadeh (1965) y trata problemas en los que una fuente de vaguedad está envuelta:

Sea X un espacio de puntos (objetos), con un elemento genérico de X denotado por x , *i.e.*, $X = \{x\}$.

Un conjunto difuso (clase) A en X está caracterizado por una función de pertenencia $f_A(x)$ que asocia a cada punto en X un número real en el intervalo $[0, 1]$, donde el valor de $f_A(x)$ en x representa el “grado de pertenencia” de x en A . Así, mientras más cerca esté el valor de $f_A(x)$ a la unidad, más alto será el grado de pertenencia de x en A . Cuando A es un conjunto en el sentido ordinario del término, su función de pertenencia puede tomar solamente uno de dos valores (0 o 1), con $f_A(x) = 1$ o 0 si x pertenece o no a A . De esta manera, diremos que un conjunto ordinario es aquél que permite solamente dos opciones para sus elementos: estar en el conjunto o no estarlo.

Siguiendo a Russell (2009), la teoría de conjuntos difusos es un medio para especificar qué tan bien un objeto satisface una descripción vaga. Por ejemplo, considere la proposición “Nate es alto.” ¿Es esto cierto si Nate mide 1.8 metros? La mayoría de la gente dudaría en responder “Verdadero” o “falso”, prefiriendo decir, “más o menos”. Nótese que esto no es una cuestión de incertidumbre sobre el mundo externo, estamos seguros de la altura de Nate. La cuestión es que el término lingüístico “altura” no se refiere a una demarcación nítida de objetos en dos clases: hay grados de altura. Por esta razón, la teoría de conjuntos difusos no es un método para el razonamiento incierto en absoluto. Por el contrario, la teoría de conjuntos difusos trata “Alto” como un predicado difuso y dice que el valor verdadero de *Alto (Nate)* es un número entre 0 y 1, en lugar de ser simplemente verdadero o falso. El nombre de “conjuntos difusos” se deriva de un conjunto que no tiene límites claros.

La lógica difusa es un método para razonar con expresiones lógicas que describen la pertenencia a los conjuntos borrosos. Por ejemplo, la oración compleja *Alto (Nate) □ Pesado (Nate)* tiene un valor de verdad difusa que es una función de los valores de verdad de sus componentes. Las disposiciones de referencia para la evaluación de la verdad difusa, T , de una oración compleja son

$$T(A \sqcap B) = \min(T(A), T(B))$$

$$T(A \sqcup B) = \max(T(A), T(B))$$

$$T(\neg A) = 1 - T(A).$$

2.2.4.4 Comportamiento del DM ante el riesgo

El nivel de aversión/inclinación al riesgo por parte del DM al seleccionar alternativas se puede caracterizar mediante la definición de una curva de indiferencia del mismo DM. Esta curva se compone de los pares riesgo/rendimiento que definen el equilibrio entre las consecuencias esperadas en los objetivos y el riesgo de obtenerlas, y establece el incremento que debe haber en las consecuencias para que el DM pueda considerar que el aumento en el riesgo vale la pena (o viceversa: la reducción de riesgo que debe existir para considerar que una reducción en las consecuencias valen la pena). En otras palabras, esta curva define la función que presenta el comportamiento del DM al verse forzado a hacer compensaciones entre riesgo y consecuencias esperadas en los objetivos. La curva de indiferencia del DM puede ser cóncava o convexa, en función del comportamiento del DM ante el riesgo que puede dividirse en Averso, Neutral o Inclinado al riesgo.

En este sentido, la función u es s - convexa para algún $s \in \mathbb{N}$, si su derivada de orden s , u^s , es no negativa; u es incrementalmente s - convexa si $u^{(k)} \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, s$. u es s - cóncava para algún $s \in \mathbb{N}$, si su derivada de orden s , u^s , es no positiva; u es incrementalmente s - cóncava si $(-1)^{k+1} u^{(k)} \geq 0$ para todo $k = 1, 2, \dots, s$ (cf. Denuit & Utev, 1999).

Decimos que un DM es averso al riesgo cuando este se muestra renuente a apoyar una alternativa que presenta consecuencias esperadas inciertas en lugar de apoyar a otra con menor riesgo pero con posibles consecuencias esperadas menores (considerando una maximización en los objetivos). Un DM presenta un comportamiento inclinado al riesgo cuando sus preferencias tienden a mejores consecuencias esperadas más bien que a la certeza; en otras palabras, un DM es inclinado al riesgo si prefiere apoyar una alternativa que presenta ciertas consecuencias esperadas en lugar de apoyar otra cartera con unas consecuencias esperadas menores aunque con una posible mayor certeza (otra vez, considerando una maximización en los objetivos).

Es posible también definir una función lineal que representa un comportamiento neutral del DM ante el riesgo. Decimos que un DM presenta este tipo de comportamiento cuando su actitud no es aversa ni inclinada al riesgo (*i. e.*, el DM es indiferente entre elegir carteras con las mismas consecuencias esperadas incluso si una de ellas representa más riesgo).

Asumimos que un modelo que intente resolver el problema de la cartera debería considerar este tipo de comportamientos por parte del DM con la finalidad de realizar una representación realista del mundo.

2.3 EL PROBLEMA DE LA CARTERA DE PROYECTOS

El problema de la cartera es un problema de optimización multiobjetivo con n variables decisión, m restricciones de desigualdad y p restricciones de igualdad. Un problema de optimización multiobjetivo puede ser definido como “encontrar los valores para todas las variables decisión contenidas en un vector solución de tal manera que satisfagan una lista de restricciones y optimicen un vector función de k funciones objetivo desde el punto de vista del DM”. Estas funciones objetivo expresan los criterios para evaluar qué tan “buena” es una solución y suelen estar en conflicto entre sí.

El problema de la cartera exige que se obtenga un “buen” compromiso (desde el punto de vista del DM) entre k funciones objetivo, lo que indica generalmente la maximización, minimización o una combinación entre maximización y minimización en estas k funciones objetivo. Esto no es una tarea trivial ya que, debido a los múltiples objetivos (normalmente en conflicto), es posible la existencia de más de una solución óptima. En el caso ideal (muy poco común y que no se trata en este trabajo), se tiene un vector en el que la i -ésima solución componente del vector solución optimiza el i -ésimo objetivo. El vector solución que cumple con lo anterior se conoce como vector ideal.

Un vector solución está compuesto por n variables decisión:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Las variables decisión representan los valores numéricos que caracterizan la cantidad de recursos asignados por una solución y que deberán ser encontrados para satisfacer el problema de optimización. Estos valores numéricos son conocidos como atributos y son asignados a las variables decisión de tal manera que se satisfaga una lista de restricciones (de igualdad y desigualdad):

$$g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$h_j(x) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, p$$

Donde $p \leq n$ para que existan grados de libertad que permitan una optimización (ver Coello *et al.*, 2002).

Las soluciones que cumplen con esta lista de restricciones son consideradas factibles y forman el espacio factible de soluciones (X).

En este sentido, es posible considerar dos espacios (euclidianos) l -dimensionales: el espacio de soluciones y el espacio objetivo. El espacio de soluciones está formado de n dimensiones y contiene los vectores solución de n variables decisión. El espacio objetivo contiene k dimensiones y especifica la superficie en la que son graficados los vectores solución del espacio de soluciones. Cada eje del espacio objetivo corresponde a un componente del vector objetivo f , compuesto por k funciones objetivo:

$$f = [f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$$

Sin pérdida de generalidad, decimos que un vector objetivo u domina a otro vector objetivo v (denotado como $u \succ v$) si y sólo si $u_i \geq v_i \forall i$ y $\exists j: u_j > v_j; i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Donde u_i es la i -ésima función objetivo del vector u y v_i es la i -ésima función objetivo del vector v .

Un vector solución factible x ($x \in X$) es Pareto-eficiente si y sólo si no hay otro vector solución factible y tal que $y \succ x$.

La frontera de Pareto (FP) es la proyección del conjunto de soluciones Pareto-eficientes en el espacio objetivo, es decir:

$$FP = \{f(x): x \in P\}$$

Donde P es el conjunto de soluciones Pareto-eficiente (vectores solución no dominados).

Normalmente, encontrar la FP no es una tarea fácil y, en ocasiones, es imposible. Debido a esto, es común ver en la literatura referente a los problemas multiobjetivo el uso de técnicas evolutivas que permiten la aproximación a FP desde la primera iteración del algoritmo.

2. 4 MODELADO DE PREFERENCIAS

Referente al problema de la cartera de proyectos, el DM es una persona o grupo de personas capaces y con la obligación de expresar sus preferencias acerca de los proyectos, así como la cantidad de recursos que cada uno de estos debería recibir. Esas decisiones son tomadas con base en los conocimientos y creencias pertenecientes al mismo DM. Entonces, se dice que la solución al problema de la cartera se da mediante la búsqueda de los parámetros más convenientes desde el punto de vista del DM.

Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que mayores valores en las consecuencias de los objetivos son preferidos sobre otros valores menores. Por lo tanto, un algoritmo propuesto para resolver este problema buscará encontrar aquella cartera que maximice los valores en las consecuencias de los objetivos; más formalmente:

$$\max \{obj_1, obj_2, \dots, obj_k\}$$

Lo que asume una búsqueda de la solución a un problema multiobjetivo. Es plausible pensar que los objetivos en un problema de estas características pueden ser conflictivos; esto es, “mejorar” el valor de un objetivo significará “empeorar” el valor de otro objetivo. Esto a su vez hace que, a diferencia de los problemas con un único objetivo, los problemas multiobjetivo no tengan una definición puramente matemática y que una solución “buena” para ellos pueda ser hallada únicamente mediante el descubrimiento del mejor compromiso entre los valores de los objetivos.

Si bien las meta-heurísticas dan una aproximación a la frontera de Pareto, no son capaces de elegir la solución que ofrezca este mejor compromiso entre los objetivos, para ello es necesario irremediablemente la incorporación de preferencias por parte del DM. Sin embargo, el DM solo puede expresar sus preferencias sobre una cantidad relativamente pequeña de soluciones y objetivos.

Los métodos para encontrar soluciones a problemas multiobjetivo pueden ser clasificados de acuerdo a la manera en la que el DM expresa sus preferencias. Según Bechikh (2013), las formas más comúnmente utilizadas por el DM para expresar sus preferencias son:

- Aquellas en las que el DM asigna factores de importancia (pesos) a cada función objetivo.

- Aquellas en las que el DM hace comparaciones por pares de soluciones en un subconjunto de la población actual, con la finalidad de hacer un ranking de las soluciones de la muestra.
- Aquellas en las que las comparaciones son realizadas entre pares de funciones objetivo, con la finalidad de obtener un ranking del conjunto de funciones objetivo.
- Aquellas basadas en metas o niveles de aspiración que cada uno de los objetivos debería alcanzar.
- Aquellas en las que el DM identifica compensaciones aceptables entre las funciones objetivo.
- Aquellas en las que el DM proporciona los parámetros del modelo para construir una relación de sobreclasificación difusa.
- La construcción de una función de deseabilidad que esté basada en la asignación de algunos umbrales de deseabilidad.

También es posible clasificar los métodos para encontrar soluciones a problemas multiobjetivo en base a cuándo son incorporadas las preferencias del DM en el proceso de toma de decisiones.

Es muy común ver en la literatura referente a la toma de decisiones los enfoques de incorporación de preferencias a priori, de manera progresiva y a posteriori (ver Cohon *et al.*, 1975). En el enfoque a priori, las preferencias del DM son incorporadas al proceso antes de realizar una aproximación a (búsqueda de) la frontera de Pareto, es decir, al inicio del proceso; esto permite un desempeño del algoritmo basado en lo que el DM expresa desde el inicio del proceso y una relativa “comodidad” para el DM. Las técnicas que incorporan las preferencias del DM de manera progresiva se caracterizan por operar en tres etapas (ver Cohon *et al.*, 1975): (1) encontrar una solución no-dominada, (2) obtener la reacción del DM en relación con esta solución no-dominada y modificar las preferencias de los objetivos en consecuencia, y (3) repetir las dos etapas previas hasta que el DM esté satisfecho o ya no sea posible ninguna mejora. Lo anterior exige una participación considerable en el proceso de la toma de decisiones por parte del DM, lo que a su vez es considerado como una desventaja sobresaliente por algunos autores. Los algoritmos a posteriori buscan el conjunto de soluciones no-dominadas y relegan la toma de decisiones al DM. Estos algoritmos no requieren de ningún tipo de información respecto a las preferencias del DM al inicio de la búsqueda del conjunto de soluciones no-

dominadas. Debido a que la incorporación de preferencias de manera progresiva y a posteriori requieren un análisis directo por parte del DM para obtener un “buen” compromiso, estos enfoques presentan la seria desventaja de no poder trabajar con una cantidad relativamente grande de objetivos, es decir, están condenados a trabajar con la cantidad máxima de objetivos que el DM puede analizar en un momento dado.

2. 5 ALGORITMOS EVOLUTIVOS

Los algoritmos evolutivos (AE) son utilizados para resolver problemas caracterizados por tener múltiples objetivos, problemas con espacios de búsqueda considerablemente grandes y cuyas soluciones requieren de una gestión del riesgo o incertidumbre. Una optimización multiobjetivo requiere de soluciones que cumplan (tanto como sea posible) un conjunto de objetivos que, en la mayoría de los casos, son conflictivos entre sí (aumentar la probabilidad de cumplir un objetivo reducirá la probabilidad de cumplir otro). Los AE se caracterizan por trabajar con varias soluciones al mismo tiempo, donde cada una de estas soluciones satisface en cierta medida cada uno de los objetivos, lo que les permite trabajar intentando satisfacer varios objetivos a la vez.

Los AE pertenecen a una clase de algoritmos de optimización meta-heurística basada en una población; normalmente utilizan mecanismos inspirados en la evolución biológica: reproducción, mutación, recombinación, selección natural y supervivencia de los más aptos, para resolver problemas de optimización. Las soluciones candidatas al problema de optimización juegan el rol de individuos en una población, y la función objetivo determina el ambiente dentro del que las soluciones “viven”. Normalmente, los AE incluyen cuatro tipos de algoritmos: algoritmos genéticos (AG), programación genética (PG), programación evolutiva (PE) y estrategia evolutiva (EE). De los cuatro tipos, los AG son los AE más populares. En los AG, se busca la solución a un problema en la forma de cadenas de caracteres (tradicionalmente son cadenas binarias, aunque las mejores representaciones suelen ser aquellas que reflejan algo acerca del problema que está siendo resuelto), virtualmente siempre aplicando operadores de recombinación tales como operadores de cruzamiento, selección y mutación. Por esta razón, los AG se utilizan regularmente en problemas de optimización. Comparados con la búsqueda tabú, los AG son menos dependientes del problema y proveen una alta probabilidad de alcanzar el óptimo global. En comparación con la programación dinámica, los AG permiten al usuario obtener una solución sub-óptima, mientras que la programación dinámica no lo permite, lo que resulta muy importante para algunos problemas de optimización de decisiones empresariales (Yu *et al.*, 2012).

Siguiendo a Sastry *et al.* (2005), los AG codifican las posibles soluciones en cadenas de caracteres de longitud finita y de cierta cardinalidad llamadas cromosomas; los caracteres son llamados genes y los valores de los genes alelos. Para alcanzar buenas soluciones e

implementar la selección natural a través de la evolución, es necesaria la implementación de una medida para distinguir la calidad entre cadenas de posibles soluciones. Esta medida podría ser una función objetivo donde las personas elijan las mejores soluciones sobre las peores. En esencia, la medida de calidad o aptitud (*fitness*) debe determinar la aptitud relativa de una posible solución que, subsecuentemente será usada en el AG para guiar la evolución de buenas soluciones.

Otro concepto importante de los AG es la noción de población. A diferencia de los métodos de búsqueda tradicionales, los algoritmos genéticos se basan en una población de soluciones candidatas. El tamaño de la población, que regularmente es especificado por el usuario, es un factor importante que afecta la escalabilidad y desempeño de los algoritmos genéticos. Por ejemplo, tamaños pequeños de la población pueden llevar a una convergencia prematura y un rendimiento deficiente de las soluciones. Por otro lado, tamaños grandes de la población llevan a gastos innecesarios de tiempo valioso de cálculo.

Una vez que el problema ha sido codificado en cromosomas y la medida de aptitud para discriminar las buenas soluciones de las malas ha sido elegida, es posible iniciar con la evolución de las soluciones al problema de búsqueda usando los siguientes pasos (ver Yu *et al.*, 2012):

- Reproducir población inicial al azar. Por lo general, una población comprende un conjunto de cromosomas a menudo representados en una matriz de cromosomas, mientras que un cromosoma se compone de muchos genes. En el problema de optimización matemática, un gen corresponde a una variable x_i , y un cromosoma corresponde a una solución representada en un conjunto de genes $x = ([x_1], [x_2], \dots, [x_m])$ si existen m variables. En el problema de programación no lineal 0-1, un gen puede ser fácilmente representado por dos códigos binarios genéricos, 0 o 1. En el problema de selección de cartera de proyectos ($[x_i] = 0$) significa que el proyecto (variable) no está incluido en la cartera y ($[x_i] = 1$) significa que el proyecto se incluirá en la cartera. La población inicial de soluciones candidatas normalmente se genera al azar en todo el espacio de búsqueda. Sin embargo, el conocimiento específico de dominio o cualquier otra información se pueden incorporar fácilmente. La descendencia creada por la operación de cruce no será idéntica a ningún padre.

en particular, y en su lugar se combinarán rasgos parentales de una manera novedosa (Goldberg, 2002).

- Aplicar la operación de cruce a los cromosomas iniciales. El objetivo principal de la operación de cruce es generar una descendencia diversa de cromosomas para obtener una solución mejor que sus padres. Hay muchas maneras de lograr esto, y un rendimiento competente depende de un mecanismo de cruce correctamente diseñado, sin embargo existen algunas técnicas comunes para crear la descendencia de cromosomas: de un punto, de dos puntos y de múltiples puntos. La técnica de cruce llamada “de un punto” selecciona aleatoriamente un punto de cruce dentro del cromosoma, luego los cromosomas padres se intercambian en este punto para producir nuevos cromosomas hijos.
- Realizar la operación de mutación en los cromosomas. Mientras que la operación de cruce parte de dos o más soluciones padres para crear una nueva, la mutación modifica local pero aleatoriamente una solución. Una operación de mutación es un método para crear un nuevo cromosoma a partir de otro cromosoma de la población. El objetivo principal de la operación de mutación es evitar que el AG converja demasiado rápido en una pequeña zona del espacio de búsqueda. Por lo general, la operación de mutación se da en un punto aleatorio de los cromosomas. En el caso de cromosomas binarios, el nuevo cromosoma se puede generar en base a cambiar aleatoriamente un gen de "0" a "1" o viceversa.
- Usar la operación de selección para crear la población con mayor aptitud. Después de realizar las operaciones de cruce y mutación (operaciones que crean una nueva población), la próxima operación será seleccionar los cromosomas con el valor de aptitud más alto. La operación de selección asigna más copias de aquellas soluciones con valores de aptitud más altos imponiendo un mecanismo de sobrevivencia del más apto dentro de las soluciones candidatas. Existen varios procedimientos de selección aunque dicha selección generalmente se realiza por medio del enfoque de ruleta, en el que los cromosomas se asignan al espacio de búsqueda en una rueda de ruleta proporcional a su aptitud. El objetivo de esto es que el cromosoma más apto tenga más probabilidades de ser seleccionado.
- Reemplazar las soluciones originales. La población de hijos creados por la selección, cruce, y mutación reemplaza la población de padres original. Muchas

técnicas de reemplazo tales como el reemplazo elitista, el reemplazo inteligente de generación y métodos de reemplazo de estado estable son usadas en los AG.

2. 5. 1 NOSGA-II

El auge que han tenido los AG en las últimas décadas se debe en gran medida a su tratamiento de las soluciones candidatas. Este tratamiento permite obtener múltiples soluciones óptimas de Pareto en una sola corrida. Entre ellos, el algoritmo genético de clasificación no dominado (*Fast Elitist Non-Dominated Sorting Genetic Algorithm for Multi-Objective Optimization, NSGA-II* (ver Deb, 2002)) es uno de los algoritmos evolutivos multiobjetivo más exitosos y ampliamente usados (Deb, 2008).

NOSGA-II es un algoritmo basado en NSGA-II que ha demostrado dar resultados que superan claramente a los de NSGA-II y a los de otros enfoques evolutivos (ver Fernández *et al.*, 2011). NOSGA-II Es un algoritmo evolutivo elitista que tiene como una de sus principales características la reducción de objetivos “originales” en un problema de optimización al siguiente problema de optimización con tres objetivos:

$$\text{Minimizar}(Card(So)x, Card(WNS)x, Card(FNS)x)$$

Donde:

$Card(So)x$ representa la cantidad de soluciones que superan estrictamente a x

$Card(WNS)x$ es la cardinalidad del conjunto $(WNS)x = \{y : yQx \text{ or } yKx; y, x \in NS\}$ y $NS = \{x \in X : card(So)x = 0\}$; X es la región factible de soluciones (ver sección 2. 3).

$Card(FNS)x$ representa la cantidad de soluciones cuyo flujo neto es mayor al de x

El uso de un indicador de flujo neto de superación fue propuesto por (Fernández *et al.*, 2011) con la finalidad de mejorar la información sobre la preferencia entre soluciones y está definido como sigue:

$$Fn(x) = \sum_{y \in A - \{x\}} |\sigma(x, y) - \sigma(y, x)|,$$

A continuación procedemos a explicar más formalmente lo anterior a través del modelo basado en el concepto de sobreclasificación para un sistema relacional de preferencias de NOSGA-II presentado en Fernández *et al.* (2013).

Definición 1. Una cartera C_x es estrictamente preferida en (λ, β) a C_y si al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

- y es dominada por x (ver sección 2. 3)
- $\sigma(x, y) \geq \lambda$ $\sigma(y, x) < 0.5$
- $\sigma(x, y) \geq \lambda$ ($0.5 \leq \sigma(y, x) < \lambda$) $(\sigma(x, y) - \sigma(y, x)) \geq \beta$

β es un parámetro de sobreclasificación estricta. Notación $C_x P C_y$ o $x P y$

Definición 2. C_x y C_y son indiferentes en (λ, ϵ) si $\sigma(x, y) \geq \lambda$, $\sigma(y, x) \geq \lambda$ y $|\sigma(x, y) - \sigma(y, x)| < p$, p es un parámetro de simetría ($p < \beta$).

Definición 3. La cartera C_x es débilmente preferida en $(\lambda, \beta, \epsilon)$ a C_y si las siguientes condiciones son satisfechas:

- $\sigma(x, y) \geq \lambda$ $\sigma(x, y) > \sigma(y, x)$
- no se cumple que $x P y$
- no se cumple que $x I y$ (ver sección 2. 2. 4. 2)

La preferencia débil se denotará como $C_x Q C_y$ o $x Q y$.

Definición 4. C_x tiene preferencia K en (λ, ϵ) a C_y si las siguientes condiciones son satisfechas:

- $0.5 < \sigma(x, y) < \lambda$
- $\sigma(y, x) < 0.5$
- $(\sigma(x, y) - \sigma(y, x)) > p$

La preferencia K se denotará como $C_x K C_y$ o $x K y$.

Definición 5. Si $\sigma(x, y) < 0.5$ y $\sigma(y, x) < 0.5$, diremos que C_x y C_y son incomparables y lo denotaremos como $C_x R C_y$ o $x R y$.

Definición 6. Existe una no preferencia entre C_x y C_y (que se denotará como $C_x \sim C_y$ o $C_x \sim C_y$) si las siguientes condiciones son satisfechas:

- no se cumple que xPy no se cumple que yPx
- no se cumple que xQy no se cumple que yQx
- no se cumple que xKy no se cumple que yKx
- no se cumple que xIy
- no se cumple que xRy

Debería ser $\lambda > 0.5 > \beta > \varepsilon$.

Sea $S = P \cup Q \cup K$.

Sea X el conjunto de soluciones factibles (ver sección 2. 3) y $O = g(X)$ su imagen en el espacio de objetivos.

Definición 7. C_{x^*} es la mejor cartera basada en S si:

- x^* es una solución aceptable; y
- existe una $y \in O$ tal que ySx^*

Definición 8. C_{x^*} es la mejor cartera basada en P si:

- x^* es una solución aceptable; y
- existe una $y \in O$ tal que yPx^*

Definición 9. $x \in O$ ($C_x \in X$) es llamada cartera no superada estrictamente si $\nexists y \in O$ tal que yPx^* .

Definición 10. Para cada $x \in O$, definimos el conjunto de carteras estrictamente superadas $(S_O)_x = \{y \in O: yPx\}$, y $card(S_O)_x$ su cardinal, si x es una cartera no estrictamente superada, entonces $card(S_O)_x = 0$.

Definición 11. El conjunto $N_S = \{x \in O: card(S_O)_x = 0\}$ es llamado el conjunto no superado estrictamente del problema de la cartera tratado.

Definición 12. Sea C un subconjunto de O . Para cada $x \in C$, el conjunto de carteras débilmente superadas $(W_C)_x$ se define como $(W_C)_x = \{y \in C: yQx \vee yKx\}$. $card(W_C)_x$ es su cardinal, una función de enteros dependiendo de x .

Definición 13. $x \in O$ ($C_x \in X$) es conocida como una cartera no superada si $(S_O)_x = (W_C)_x = 0$.

Es posible, a partir de esta última definición, asegurar que la búsqueda de la mejor cartera es transformada en un problema bi-objetivo, sin importar la dimensión del espacio de búsqueda original. Si una cartera ideal existe entonces debería corresponder a la solución $(0, 0)$ del problema

$$\text{Minimizar } (card(S_O)_x, card(W_O)_x).$$

Las soluciones $(0, 0)$ pueden corresponder a las mejores carteras basadas en S .

Debido a que es posible que tal solución ideal no exista, es plausible pensar que la mejor cartera debería corresponder a una solución $(0, n)$ donde n es un entero ≥ 0 . Con $n > 0$ tales soluciones pueden corresponder a las mejores carteras basadas en P .

Una diferencia relevante entre NOSGA-II con la mayoría de los AG es que el primer enfoque realiza una presión selectiva hacia el conjunto de carteras no superadas estrictamente (ver Fernández *et al.*, 2013), por lo que, en lugar de la distancia *crowding* utilizada en NSGA-II (o cualquier otra medida de dispersión), NOSGA-II utiliza una medida de mérito definida como $\square = card(W_{frente})_x + card(F_{frente})_x$ donde *frente* es el conjunto compuesto por x con el mismo valor de $card(S_O)_x$ y $F_n(x)$ es el flujo neto correspondiente a la cartera x . Fernández *et al.* (2011) proponen el uso del flujo neto, definido como $F_n(x) = \sum_{y \in A - \{x\}} |\sigma(x, y), \sigma(y, x)|$ con la finalidad de mejorar la información sobre las preferencias.

En base a lo anterior, Fernández *et al.* (2011) proponen encontrar la mejor cartera al resolver

$$\text{Minimizar } (card(S_O)_x, card(W_O)_x, card(F_{N_S})_x).$$

Donde $(F_{N_S})_x = \{y \in N_S: F_n(y) > F_n(x)\}$ y existe una prioridad favoreciendo $(card(S_O)_x$.

2. 6 SIMULACIÓN DE MONTECARLO

Para aproximarse a la realidad, un modelo que busque resolver el problema de la cartera debería incorporar una medida de riesgo de los datos. Pueden ser resaltados tres enfoques comunes para la incorporación de este riesgo: análisis de decisiones, programación estocástica, y simulación de Montecarlo. Este último enfoque tiene una potencial ventaja sobre los otros dos cuando es aplicada en el contexto de la optimización multiobjetivo (Gabriel, 2006).

El método de Montecarlo es un método numérico que permite resolver problemas matemáticos mediante la simulación de variables aleatorias (Sobol, 1974), *i. e.*, para encontrar la solución a un problema caracterizado por variables aleatorias que siguen una distribución de probabilidad conocida, el método de Montecarlo genera una secuencia de valores que siguen dicha distribución. A través de esta secuencia de valores se obtienen estimaciones estadísticas cuyas consecuencias son relevantes en el contexto del problema.

Este método no genera una solución exacta al problema, sino que, mediante un número determinado de iteraciones, se produce una solución aproximada (que está en función de las iteraciones).

Es posible enumerar dos peculiaridades del método de Montecarlo (ver Sobol, 1983):

- i. El algoritmo de este método tiene una estructura muy sencilla. Como regla, se elabora primero un programa para la realización de una prueba aleatoria (la prueba aleatoria propuesta por este documento es planteada en la sección 3. 1.), después esta prueba se repite N veces de modo que cada experimento sea independiente de los restantes y se toma la media de los resultados de todos los experimentos.
- ii. El error de este método es, como regla, proporcional a la magnitud $\sqrt{D/N}$ donde D es una constante y N es el número de pruebas. Esta fórmula permite ver que para disminuir el error en 10 veces (en otras palabras, para obtener en el resultado otra cifra decimal exacta) es preciso aumentar N (*i. e.*, el volumen del trabajo) en 100 veces.

Siguiendo a Sawilowsky (2003), la simulación de Montecarlo utiliza el muestreo repetido para determinar las propiedades de algún fenómeno o comportamiento y puede ser

empleada en el procesamiento de imágenes, y de vinculación genética (Robert & Casella, 1999); control de inventarios, sistemas de filas en un lavado de autos, previsión de tiempos de espera, planificación de la gestión, predicción a corto plazo, comportamiento de los consumidores respecto al cambio de marca, y comportamiento de pedido del producto del cliente, (McMillan y González, 1968).

De acuerdo con Sobol (1983), consiste en la simulación de variables aleatorias continuas o discretas. Una variable es continua si se puede tomar cualquier valor comprendido en un intervalo (a, b) . Sea (a', b') un intervalo cualquiera contenido en (a, b) , entonces la probabilidad de que una variable aleatoria continua tome un valor perteneciente al intervalo (a', b') es

$$P\{a' < x < b'\} = \int_{a'}^{b'} P(x)dx,$$

donde $P(x)$ es la densidad de probabilidad de la variable aleatoria continua (i. e., función de probabilidad que determina el comportamiento esperado de valores dados).

Una variable aleatoria es discreta si puede tomar solo un conjunto discreto de valores $1, 2, \dots, l$ y puede ser descrita por la tabla

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & l \\ p_1 & p_2 & \dots & p_l \end{pmatrix}$$

donde $1, 2, \dots, l$ son los valores posibles de la variable y no es necesario que cumplan con alguna restricción; mientras que $p_1, p_2, \dots, p_l$ son las probabilidades que les corresponden, i. e., la probabilidad de que tome el valor i es p_i y se denota como $P\{x = i\} = p_i$; estas probabilidades deben cumplir con las siguientes condiciones:

1. se debe cumplir que $p_i > 0$, y
2. $p_1 + p_2 + \dots + p_l = 1$.

La simulación de variables aleatorias discretas permite la obtención de dos resultados representativos de los valores obtenidos en cuanto a la variable aleatoria discreta: el valor medio (M) y la varianza (V). Donde $M = \frac{\sum_{i=1}^l x_i p_i}{\sum_{i=1}^l p_i}$, y $V = M[(x_i - M)^2]$. La última igualdad establece la varianza como el valor medio del cuadrado de la desviación de la

variable aleatoria de su valor medio M . Vale la pena aclarar que siempre se tiene que $V > 0$.

Es posible simular variables aleatorias discretas mediante la generación de números pseudo-aleatorios uniformes en el intervalo $[0, 1]$. Por ejemplo, supóngase la simulación del lanzamiento de una moneda; en este caso se puede establecer que, si el número generado está en el rango $[0, 0.5]$, entonces la salida esperada en el lanzamiento corresponde a *cruz*, de lo contrario corresponde a *cara*. La simulación de Montecarlo puede servir para estimar salidas esperadas mediante el uso de un generador de números pseudo-aleatorios a través de una cantidad significativamente grande de este tipo de muestras (cf., Sawilowsky, 2003).

La simulación de Montecarlo puede ser conducida con o sin reemplazo. En la primera forma, una vez que el valor para el experimento ha sido registrado, el valor obtenido a partir del generador de números pseudo-aleatorio uniforme se devuelve al depósito de valores y se puede extraer nuevamente. En la simulación sin reemplazo esto no es así: una vez que el resultado ha sido registrado, el valor obtenido ya no vuelve al depósito de valores.

Hay una variedad de factores que deben ser atendidos con el fin de asegurar que una simulación de Montecarlo es correcta y útil. Algunos de estos factores son los siguientes (cf. Sawilowsky, 2003):

- El generador de números pseudo-aleatorios tiene un "período" largo antes de que los valores se repitan.
- El generador de números pseudo-aleatorios produce valores que pasan las pruebas para la aleatoriedad
- El número de repeticiones del experimento es lo suficientemente grande como para asegurar la exactitud de los resultados
- Se utiliza la técnica de muestreo adecuada
- El algoritmo utilizado es válido para lo que se está modelando
- El estudio simula el fenómeno en cuestión

Algunas ventajas que tendría la simulación de Montecarlo en un modelo que intente resolver el problema de la cartera de proyectos son:

- Se simula la generación de variables aleatorias.

- Se le puede incluir como parte de la optimización.
- No se recurre a funciones de utilidad para combinar los múltiples objetivos.
- Incorpora la aleatoriedad en el riesgo del impacto en los objetivos.
- La complejidad computacional es baja.
- Permite obtener indicadores de riesgo.

Capítulo 3

METODOLOGÍA

3. 1 CREACIÓN DE UN SIMULADOR DE MONTECARLO

Debido a las ventajas que representa el uso de un algoritmo evolutivo (AE) para resolver el problema de la cartera (ver sección 2. 5), proponemos la implementación de un AE con esta finalidad. No obstante, y siguiendo la discusión planteada en la sección 2. 2. 4. 4, existe la necesidad de implementar un modelo que trate el problema de la cartera considerando el riesgo con la finalidad de hacer una representación realista del mundo. Para cubrir esta necesidad presentamos un modelo que representa el comportamiento del DM ante el riesgo en términos de una serie de cuantiles significativos de distribuciones probabilísticas generados en un simulador de Montecarlo.

Sea x una variable aleatoria, un cuantil q de x es el valor x_q tal que $\Pr(x \geq x_q) = q$. Esto es, el cuantil q representa el valor de la variable x que marca un corte de modo que una proporción de valores q de la población es mayor o igual que x_q , dividiendo los datos ordenados de la población en q cuantiles.

El enfoque planteado en este trabajo considera el comportamiento del DM ante el riesgo utilizando estos cuantiles significativos como objetivos a optimizar en un problema de decisión. Proponemos que los cuantiles sean generados a través de la simulación de Montecarlo; misma que ha demostrado desempeñarse de una mejor manera que otros métodos cuando es aplicada en el contexto de la optimización multiobjetivo (ver Gabriel, 2006).

Por medio de esta simulación, proponemos la realización de un análisis estadístico de las carteras, análisis que permite obtener, en base a la distribución de probabilidad de los proyectos de una cartera dada para cada objetivo, un valor esperado (media, $\bar{o}_j$) de las consecuencias esperadas en cada uno de los objetivos. Este análisis también permite obtener un reflejo de la aversión ante el riesgo del decisor a través de la importancia que él otorgue al estimador del peor caso de la distribución (j). Este peor caso puede ser visto como un cuantil especial que es generado a partir de un cálculo estadístico como se muestra a continuación. Proponemos el uso de la media de la muestra menos 3 veces la desviación estándar, como indicador del peor caso para cada objetivo, es decir:

$$j = \bar{o}_j - 3\sigma_j; j \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Para la obtención de estos indicadores, proponemos el desarrollo de un análisis estadístico mediante la implementación de una muestra de 1000 puntos estadísticos (cf. Medaglia, 2007).

Sea $X = \{x \in R^k \mid g_1(x) \leq r_1, g_2(x) \leq r_2, \dots, g_m(x) \leq r_m\}$ la región de soluciones factibles con m restricciones. Sea f_{kj} la k -ésima función objetivo del j -ésimo proyecto en una cartera dada; entonces, f_{kj} se define como:

$$f_{kj} = f(x, {}_{kj})$$

Donde $x \in X$, y ${}_{kj}$ define la distribución de probabilidad que sigue el resultado esperado del j -ésimo proyecto en el k -ésimo objetivo. (Esta distribución es asignada por el analista a cada objetivo dentro del problema.)

Entonces, las consecuencias para los k objetivos de una cartera dada dentro de la muestra, son definidas como sigue:

$$Obj1 = \sum b_j f_{1j}$$

$$Obj2 = \sum b_j f_{2j}$$

.

.

.

$$Objk = \sum b_j f_{kj}$$

donde

$$b_j = \begin{cases} 1 & \text{si el proyecto } j \text{ está en la cartera} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Para intentar garantizar la creación de un simulador de Montecarlo de alta calidad (siguiendo la orientación planteada en la sección 2.6), proponemos el uso del generador de números pseudo-aleatorios llamado *Mersenne Twister* (MT) (ver Matsumoto & Nishimura, 1998). MT es un algoritmo de generación de números pseudo-aleatorios

desarrollado por Makoto Matsumoto y Takuji Nishimura. La actualización del 2002 de este algoritmo tiene los siguientes méritos (Matsumoto & Nishimura, 2004):

- Está diseñado con la consideración de los defectos de los distintos generadores existentes.
- Un periodo mucho más largo y un orden de equidistribución mucho más alto que cualquier otro generador de números pseudo-aleatorios implementado. (Está comprobado que el periodo es de $2^{19,937-1}$, y está asegurada una propiedad de equidistribución 623-dimensional.)
- Generación rápida. (Aunque depende del sistema, se informa que MT es a veces más rápido que la biblioteca estándar ANSI-C en un sistema con *pipeline* y memoria caché).
- Uso eficiente de la memoria. (La versión implementada en este trabajo consume sólo 624 palabras de área de trabajo).

Puesto que la única información requerida para realizar el proceso de simulación es la distribución de probabilidad (y los parámetros correspondientes), es posible realizar dicho proceso de manera independiente a la optimización. Esto genera el aporte adicional de permitir que el DM obtenga información de carteras formadas por él mismo. Lo que implica mayor flexibilidad del modelo.

3. 2 IMPLEMENTACIÓN DE UN ENFOQUE EVOLUTIVO

El modelo propuesto en la sección 3. 1, resulta ser un enfoque novedoso, pues, aunque existen investigaciones que realizan una gestión del riesgo por medio de información probabilística (más específicamente, por medio de cuantiles) (ver Greco *et al.*, 2013; Medaglia *et al.*, 2007; Greco *et al.*, 2010; Matos, 2007), hasta nuestro conocimiento, esta gestión del riesgo no se ha hecho bajo un enfoque de optimización evolutiva, excepto en el trabajo realizado por Medaglia *et al.* (2007).

Medaglia *et al.* (2007) proponen un método evolutivo para problemas de selección de proyectos con múltiples objetivos (estocásticos), y una estructura lineal de restricciones en los recursos. El método está basado en una articulación de preferencias *a posteriori* y es capaz de aproximar a la frontera de Pareto compuesta por soluciones no dominadas estocásticamente. Para lograr esto, produce un estimador del vector de valores esperados y de percentiles por medio de un simulador de Montecarlo a través de una cantidad significativa (1000) de puntos estadísticos. Este trabajo presenta resultados prometedores en el modelado del comportamiento del DM ante el riesgo; sin embargo, presenta la desventaja de requerir restricciones lineales, lo que implica una limitante importante. Pero una limitante aún más trascendental es la incapacidad de este enfoque para considerar una cantidad alta de objetivos y proyectos (los experimentos mostrados en el trabajo presentan solamente tres objetivos, y únicamente cuatro proyectos).

Con la finalidad de desarrollar un modelo que permita sobrellevar las desventajas mencionadas, planteamos el uso de NOSGA-II que permite reducir cualquier cantidad de objetivos originales a tres objetivos específicos del enfoque (ver sección 2. 5. 1) y que utilice un simulador de Montecarlo para representar el riesgo en los impactos de los objetivos.

A continuación se muestra el procedimiento planteado (*cf.* Fernández *et al.*, 2013):

Inicio del procedimiento

Generar una población aleatoria P de tamaño L (ver sección 3. 2. 1)

Evaluar el impacto en los objetivos generados por el simulador de Montecarlo (ver sección 3. 2. 2)

Dividir las soluciones en frentes (ver sección 3. 2. 3)

Para cada frente C_i **hacer**

Por cada $x \in C_i$, calcular

Fin para

Generar una población de hijos Q con tamaño L (ver sección 3. 2. 1)

Efectuar selección por torneo binario (ver sección 3. 2. 4)

Realizar operación de cruce (ver sección 3. 2. 5)

Realizar operación de mutación (ver sección 3. 2. 6)

Para $i = 1$ **hasta** número_de_generaciones **hacer**

Asignar $P' \leftarrow P \cup Q$

Evaluar σ en $P' \times P$

Para cada padre e hijo en P' **hacer**

Evaluar el impacto en los objetivos generados por el simulador de Montecarlo (ver sección 3. 2. 2)

Dividir las soluciones en frentes (ver sección 3. 2. 3)

Calcular $\square$

Iterar (dentro) añadiendo soluciones a la siguiente generación hasta que L individuos hayan sido encontrados

Fin para

Reemplazar P por los L individuos encontrados

Generar la población de hijos Q con tamaño L (ver sección 3. 2. 1)

Efectuar la selección por torneo binario (ver sección 3. 2. 4)

Realizar operación de cruce (ver sección 3. 2. 5)

Realizar operación de mutación (ver sección 3. 2. 6)

Fin para

Fin del procedimiento

donde la función $\sigma(x,y)$ establece el nivel o grado de credibilidad de la sobreclasificación para el par de acciones (x, y) (ver sección 2. 2. 4. 2).

3. 2. 1 GENERACIÓN ALEATORIA DE UNA POBLACIÓN

Este procedimiento busca generar una población dando prioridad a las soluciones factibles. Para garantizarlo, cada solución creada se analiza con una probabilidad del 99.99% de probabilidad para saber si es o no factible. Si lo es, entonces forma parte de la nueva población; de lo contrario, es ignorada y se crea una nueva solución que deberá ser analizada nuevamente. Este proceso se repite hasta formar una población de tamaño L .

Al realizar el procedimiento descrito, garantizamos una prioridad en la creación de una población con soluciones factibles; sin embargo, estamos permitiendo variedad en las soluciones al no prohibir la posible existencia de soluciones no factibles que, según diversos estudios, sería causa de convergencia en óptimos locales (*i. e.*, soluciones que son las mejores de su vecindad pero no necesariamente las mejores de la población).

3. 2. 2 EVALUACIÓN DEL IMPACTO EN LOS OBJETIVOS

La evaluación del impacto en los objetivos que se realiza en base al Simulador de Montecarlo se muestra en el siguiente algoritmo:

Entrada: Cartera

Salida: Impacto en los objetivos

1: posición_objetivo $\leftarrow 0$

2: **mientras** posición_objetivo < k

3: posición_punto $\leftarrow 0$

4: **mientras** posición_punto < 1000

5: suma $\leftarrow 0$

6: posición_proyecto $\leftarrow 0$

```

7:      mientras posición_proyecto < n
8:          si cartera.proyectos[posición_proyecto] = 1
9:              valor ← obtener_valor()
10:             suma ← suma + valor
11:             puntos_estadisticos[posición_objetivo][posición_punto] ← suma
12:             sumaPorObjetivo[posición_objetivo] ← sumaPorObjetivo[posición_objetivo]
+           puntos_estadisticos[posición_objetivo][posición_punto]
13:             cartera.impacto_en_objetivo[posición_objetivo] ←
(sumaPorObjetivo[posición_objetivo]/1000)

```

Donde `cartera.proyectos[posición_proyecto]` se refiere al proyecto de la cartera cuyo índice es `posición_proyecto` y `cartera.proyectos[posición_proyecto] = 1` indica que dicho proyecto será apoyado por la cartera.

`obtener_valor()` es un procedimiento que, tomando como entrada la distribución de probabilidad de un proyecto en un objetivo dado, genera como resultado un valor cuya función de probabilidad corresponde a la distribución proporcionada.

3. 2. 3 CREACIÓN DE FRENTES

Como se mencionó en la sección 2. 6. 1, NOSGA-II está basado en NSGA-II cuya metodología implementa el llamado enfoque rápido de ordenamiento no-dominado que tiene como característica el ordenamiento de las soluciones en frentes de no dominancia. NOSGA-II realiza la implementación de un enfoque similar solo que los frentes están ordenados en función de soluciones no superadas. El pseudocódigo para realizar lo anterior se muestra a continuación (*cf.* Deb, 2002; Fernández *et. al.*, 2011):

Inicio del procedimiento

Por cada $p \in P$

$S_p \leftarrow \emptyset$

$n_p \leftarrow 0$

Por cada $q \in P$

Si (pSq)

$$S_p \leftarrow S_p \cup \{q\}$$

Si no, si (qSp)

$$n_p \leftarrow n_p + 1$$

Si $n_p = 0$

$$p_{rank} \leftarrow 0$$

$$F_1 \leftarrow F_1 \cup \{p\}$$

$$i \leftarrow 1$$

Mientras $F_i \neq \emptyset$

$$Q \leftarrow \emptyset$$

Por cada $p \in F_i$

Por cada $q \in F_i$

$$n_q \leftarrow n_q - 1$$

Si $n_q = 0$

$$q_{rank} \leftarrow i + 1$$

$$Q \leftarrow Q \cup \{q\}$$

$$i \leftarrow i + 1$$

$$F_i \leftarrow Q$$

Fin del procedimiento

3. 2. 4 SELECCIÓN POR TORNEO BINARIO

Existen diversos métodos para elegir las soluciones que serán utilizadas para producir una nueva generación (ver sección 2. 5). Entre estos métodos, quizá uno de los más utilizados es la selección por torneo binario que consiste en seleccionar al azar dos

soluciones y enfrentarlas entre sí. Al enfrentar dos soluciones en el torneo binario, es necesario establecer criterios mediante los que se puede definir una solución ganadora. Los criterios propuestos en el presente trabajo son los siguientes (con niveles de prioridad decreciente):

1. Una solución ubicada en un frente dado es preferida a una solución ubicada en un frente mayor.
2. Una solución es preferida a otra solución si la primera tiene un valor de $\square$ menor que la segunda.

Si una de las soluciones es factible y la otra no lo es, se considera que la primera es preferida sobre la segunda.

Si ninguna de las dos soluciones es factible, se agrega un tercer criterio:

3. La solución con menos restricciones violadas es preferida sobre la otra solución.

3. 2. 5 OPERACIÓN DE CRUCE

Los individuos de la población son representados por cadenas binarias de n genes, tal como se muestra en la siguiente figura:

gen_1	gen_2	...	gen_{n-1}	gen_n
---------	---------	-----	-------------	---------

Figura 1. Cadena de n genes representando a un individuo.

Donde:

$$gen_i = \begin{cases} 1 & \text{si el proyecto } i - \text{ésimo es apoyado por la cartera} \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

Consideramos un solo punto de cruce generado de manera aleatoria (c.f. Michalewicz, 1996) y $n-1$ posibilidades para realizar este punto de cruce, tal como se muestra en la siguiente figura:

	1	2	$n-2$	$n-1$	
gen_1	gen_2	...	gen_{n-1}	gen_n	

Figura 2. $n-1$ puntos de corte de un individuo.

3. 2. 6 OPERACIÓN DE MUTACIÓN

La operación de mutación proporciona a un AE la capacidad de mantener diversidad genética lo que es necesario para, eventualmente, evitar que el AE converja en un óptimo local. En este trabajo la mutación consiste en un cambio de bit (*i. e.*, si $gen_i=0$, entonces $gen_i=1$ y viceversa si el i -ésimo gen es seleccionado para mutar). La probabilidad de que el i -ésimo gen sea seleccionado para mutar es del 3%.

3. 2. 7 GENERACIÓN DE UMBRALES

Obtener el impacto esperado en los objetivos originales mediante el simulador de Montecarlo, proporciona un mecanismo para la generación estadística de los umbrales de indiferencia y preferencia estricta. (En el presente trabajo se plantea el uso del mismo valor para ambos umbrales.)

El umbral de indiferencia y preferencia estricta es calculado para pares de soluciones y debe ser calculado para todos los pares. Es decir, el umbral de indiferencia y preferencia estricta entre las soluciones x y y en el j -ésimo objetivo es obtenido en función del impacto en ese objetivo por parte de las soluciones x y y . Para calcularlo, realizamos la siguiente secuencia de pasos:

1. Obtener, a través de la simulación de Montecarlo, el impacto esperado en el j -ésimo objetivo por cada una de las soluciones x y y . Este valor es igual a la media de los valores generados en la simulación (ver Anexo C.1).
2. Obtener una medida de dispersión en los valores generados al obtener estos impactos. Dicha medida de dispersión es igual a la varianza de los valores generados durante la simulación (ver Anexo C.2).
3. Obtener la diferencia de medias ($\sigma_{a,b}^j$) de estos impactos (Ver Anexo C.3).
4. El umbral para el j -ésimo objetivo en las soluciones x y y es $q_j = 1.645 * \sigma_{a,b}^j$.

Puesto que no es posible obtener de la misma manera los umbrales para el resto de los objetivos (cuantiles e indicadores de peor caso), se propone que los umbrales sean calculados como el 1% del impacto menor en el objetivo de las carteras que se estén comparando.

3. 3 ESTRUCTURA Y EVALUACIÓN DE EXPERIMENTOS

El proceso de selección de una cartera óptima requiere que la actitud ante el riesgo por parte del DM sea especificada. Esta actitud caracteriza las preferencias propias de ganancia/riesgo del DM. Es importante notar que el comportamiento de una cartera es altamente sensible a la actitud del DM, por lo que es necesario identificar precisamente esta actitud con antelación con el fin de poder utilizar procedimientos de optimización de carteras de manera eficiente (Gretchikha, 1999).

3. 3. 1 COMPARACIÓN DE SOLUCIONES

Creemos que si podemos lograr lo anterior sin reducir la calidad en las soluciones finales (frontera de Pareto), entonces estaríamos creando un impacto significativo ya que seríamos capaces de presentar al DM soluciones que lo satisfagan al tiempo que estaríamos considerando su actitud ante el riesgo. Por todo esto, nuestro enfoque tiene que comprobar que las soluciones generadas durante el proceso no se ven afectadas por esta consideración del riesgo. Con esto en mente, se ha usado el conjunto de datos empleado en Fernández et al. (2013), con el objetivo de contrastar las soluciones obtenidas en ambos métodos. Este conjunto de datos se muestra en la Tabla 1 del Anexo A.

En la primera columna de la Tabla 1, se muestra el monto solicitado por cada proyecto. Si el proyecto no se apoyara con esta cantidad, entonces existirían altas probabilidades de que las consecuencias esperadas en los objetivos no se puedan conseguir. La segunda y tercera columnas muestran el tipo de proyecto al que corresponde cada proyecto. (En este caso, cada proyecto corresponde a dos tipos de proyectos.) En las columnas cuatro a doce, se presentan las consecuencias que se espera obtener en cada objetivo si el proyecto se apoya. En diversos trabajos las consecuencias en los objetivos son tratados como valores esperados. Para ilustrar cómo nuestro trabajo puede lidiar con el riesgo, quitamos esta restricción y modelamos las consecuencias como variables aleatorias que siguen una distribución normal de tal manera que los momentos centrales de dichas variables corresponden a los valores esperados que son mostrados en la Tabla 1.

El experimento anterior sólo valida si nuestro enfoque puede presentar resultados no peores que los mostrados por Fernández *et al.* (2013), por lo que aún es necesario modelar el comportamiento del DM ante el riesgo. Para lograr esto y, siguiendo la discusión planteada en la sección 2. 2. 4. 4, proponemos modelar el comportamiento de

un DM ligeramente inclinado al riesgo, y de otros neutral ante el riesgo, averso y muy averso al riesgo respectivamente.

3.3.2 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM LIGERAMENTE INCLINADO AL RIESGO.

Consideramos que un DM ligeramente inclinado al riesgo estaría interesado en saber el impacto de las carteras en los cuatro objetivos originales así como en un cuantil por objetivo original. Ya que en este caso el DM espera tener buenos resultados a pesar del riesgo involucrado, es posible proponer un cuantil del 30% por objetivo original (*i. e.*, obtener un valor tal que solamente el 30% de los valores generados durante la simulación sean mejores que él) y que daría más peso a estos cuantiles que a los objetivos originales. Las características usadas para modelar este comportamiento se muestran a continuación (el impacto esperado en cada objetivo original se muestran en la Tabla 1, Anexo A):

4 objetivos originales

8 objetivos a optimizar (4 originales y 4 cuantiles del 30%)

Los umbrales de veto para los ocho objetivos a optimizar se muestran en la Tabla 2 mientras que los pesos se muestran en la Tabla 3.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8
30000	37750	37250	54000	0	0	0	0

Tabla 2. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.

Donde $v_i = 0$ representa un umbral de veto infinito (se considera que no existe veto) en el objetivo i -ésimo.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4	Cuantil objetivo 1	Cuantil objetivo 2	Cuantil objetivo 3	Cuantil objetivo 4
7	7	7	7	18	18	18	18

Tabla 3. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.

3. 3. 3 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM NEUTRAL ANTE EL RIESGO.

En este caso se considera que el DM solo desea conocer la información sobre el impacto en los cuatro objetivos originales ya que no está interesado en información sobre el riesgo. En base a esto se plantea el uso de las siguientes características para modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo:

4 objetivos originales a optimizar

Los umbrales de veto para los cuatro objetivos a optimizar se muestran en la Tabla 4 mientras que los pesos se muestran en la Tabla 5.

V_1	V_2	V_3	V_4
30000	37750	37250	54000

Tabla 4. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
25	25	25	25

Tabla 5. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo.

3.3.4 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM AVERSO AL RIESGO.

Un DM averso al riesgo tiende a enfocar más su atención en no obtener malos resultados que en obtener buenos. Por lo tanto, para él resultan más importantes las consecuencias obtenidas en un indicador del peor caso que en los objetivos originales o, incluso, en cualquier otro cuantil. Por esto, consideramos que un DM averso al riesgo consideraría las consecuencias en los cuatro objetivos originales, un indicador de peor caso y un cuantil de aproximadamente 70% en cada uno de ellos. (Puesto que su actitud es “pesimista”, espera tener información acerca de un cuantil alto.) También consideramos que los cuantiles tendrán más peso que los objetivos originales. Las características que planteamos para modelar este comportamiento se muestran a continuación.

4 objetivos originales

12 objetivos a optimizar (4 originales, 4 indicadores de peor caso y 4 cuantiles del 70%)

Los umbrales de veto para los doce objetivos a optimizar se muestran en la Tabla 6 mientras que los pesos se muestran en la Tabla 7.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
30000	37750	37250	54000	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 6. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM averso al riesgo.

Donde $v_i = 0$ representa un umbral de veto infinito (se considera que no existe veto) en el objetivo i -ésimo.

Objetivo1	Objetivo2	Objetivo3	Objetivo4	Peor caso 1	Peor caso 2	Peor caso 3	Peor caso 4	Cuantil 1	Cuantil 2	Cuantil 3	Cuantil 4
5	5	5	5	11	11	11	11	9	9	9	9

Tabla 7. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM averso al riesgo.

3.3.5 MODELADO DEL COMPORTAMIENTO DE UN DM MUY AVERSO AL RIESGO.

Para un DM muy averso al riesgo resultan mucho más importante las consecuencias obtenidas en un indicador del peor caso que en cualquier otro cuantil pero, sobre todo, que en los objetivos originales (ya que, desde su perspectiva, evitar consecuencias malas tiene más importancia que obtener consecuencias buenas). Por esto, consideramos que un DM muy averso al riesgo consideraría las consecuencias en los cuatro objetivos originales, un indicador de peor caso y un cuantil de aproximadamente 85% en cada uno de ellos. (Por ser muy averso, desearía un cuantil considerablemente alto.) Las características para modelar este comportamiento son:

4 objetivos originales

12 objetivos a optimizar (4 originales, 4 indicadores de peor caso y 4 cuantiles del 85%)

Los umbrales de veto para los doce objetivos a optimizar se muestran en la Tabla 8 mientras que los pesos se muestran en la Tabla 9.

V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	V_9	V_{10}	V_{11}	V_{12}
30000	37750	37250	54000	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 8. Umbrales de veto usados para modelar el comportamiento de un DM muy averso al riesgo.

Donde, otra vez, $v_i = 0$ representa un umbral de veto infinito (se considera que no existe veto) en el objetivo i -ésimo.

Objetivo1	Objetivo2	Objetivo3	Objetivo4	Peor caso 1	Peor caso 2	Peor caso 3	Peor caso 4	Cuantil 1	Cuantil 2	Cuantil 3	Cuantil 4
1	1	1	1	16	16	16	16	8	8	8	8

Tabla 9. Pesos usados para modelar el comportamiento de un DM muy averso al riesgo.

3.3.6 EQUIPOS Y MATERIALES

La configuración del equipo para generar las soluciones es la siguiente:

- Procesador Intel i3 de 4 núcleos
- 4 GB de RAM
- Disco duro de 1 TB
- Sistema Operativo CentOS Linux 6.3 64 bits

La herramienta computacional fue desarrollada bajo el lenguaje de programación Java en la plataforma de trabajo NetBeans IDE 7.4.

Capítulo 4

RESULTADOS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

4.1 RESULTADOS

Las soluciones fueron generadas en un tiempo de 2 horas y 45 minutos; dado que el problema de la cartera de proyectos es un problema relevante al que se enfrentan las organizaciones (ver sección 1), este es un tiempo razonable para encontrar una solución al problema. A continuación se muestran los resultados obtenidos al realizar los experimentos mencionados en la sección 3.3.

4.1.1 COMPARACIÓN DE SOLUCIONES

Los resultados para este experimento se generan de la siguiente manera:

- i. Se realizan 20 corridas de 100 generaciones en ambos modelos. Las soluciones generadas por Fernández et al. (2013), y el modelo propuesto en este trabajo se muestran en las Tablas 10 y 11 en el Anexo B, respectivamente.
- ii. Las soluciones generadas por ambos modelos se introducen en un solo *pool* de soluciones.
- iii. Se obtienen las soluciones no superadas del *pool* de soluciones. Al aplicar el concepto de no superación a este *pool*, se obtienen las soluciones no superadas que son mostradas en la Tabla 12 del Anexo B. La cantidad de soluciones

generadas por Fernández *et al.* (2013) fueron 37, mientras que las generadas por nuestro método son 134. Al procesar estas soluciones se encontró que 1 (2.7%) de las soluciones de Fernández *et al.* (2013) fue superada por nuestras soluciones mientras que 11 (8.2%) de las soluciones generadas por nuestro modelo fueron superadas por las soluciones de Fernández *et al.* (2013). Estos resultados pueden considerarse aproximadamente equivalentes.

Modelado del comportamiento de un dm ligeramente inclinado al riesgo.

Para modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo, se proponen las características mencionadas en la sección 3. 3. 2. Dicho planteamiento se implementa en este trabajo mediante 20 corridas con 100 generaciones cada una generando las soluciones mostradas en la Tabla 13 del Anexo B.

Modelado del comportamiento de un dm neutral ante el riesgo.

En la Tabla 14 del Anexo B se muestran las soluciones no superadas generadas a partir de 20 corridas de 100 generaciones cada una representando el comportamiento del DM Neutral ante el riesgo.

Modelado del comportamiento de un dm averso al riesgo.

Las soluciones no superadas generadas a partir de 20 corridas de 100 generaciones cada una representando el comportamiento del DM Averso al riesgo se muestran en la Tabla 15.

Modelado del comportamiento de un dm muy averso al riesgo.

Las soluciones no superadas generadas a partir de 20 corridas de 100 generaciones cada una representando el comportamiento del DM Muy Averso al riesgo se muestran en la Tabla 16.

4.2 DISCUSIÓN

Es plausible suponer que la calidad de las soluciones generadas por Fernández *et al.* (2013) es similar a la calidad de las soluciones generadas por el enfoque propuesto en el presente trabajo. Esto debido a que la proporción de las soluciones superadas en ambos casos es similar (ver punto iii de la sección 4. 1. 1).

Entonces, al demostrar mediante esta afirmación que las soluciones generadas en nuestro enfoque son de calidad, solo nos queda demostrar que dicho enfoque puede considerar el comportamiento del DM ante el riesgo. Para lograrlo, a continuación se realiza una comparación de los resultados obtenidos en la sección 4. 1 (mismos que fueron generados a partir de los parámetros mostrados en las secciones 3. 3. 2, 3. 3. 3, 3. 3. 4, y 3. 3. 5) con la finalidad de comprobar si existe una diferencia significativa entre el modelado de los distintos comportamientos.

Puesto que las soluciones generadas en cada uno de estos comportamientos son equivalentes y, ya que la cantidad de soluciones obtenida en algunos casos es relativamente grande para que el DM pueda considerarlas todas al mismo tiempo, hemos decidido elegir una única solución por cada comportamiento que, desde nuestra perspectiva de la subjetividad del DM, sería elegida por él como mejor solución.

En el caso de un DM averso al riesgo, los criterios con mayor peso son los indicadores de peor caso y, ya que estos tienen el mismo peso entre sí, elegimos una solución que represente este comportamiento en función del impacto en los indicadores de peor caso y la homogeneidad entre ellos, dando como resultado la siguiente solución:

Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Peor caso 1	Peor caso 2	Peor caso 3	Peor caso 4	Cuantil 1	Cuantil 2	Cuantil 3	Cuantil 4	Card(QUK)	Card(FN)	Monto
66501	69976	75071	126157	59578	62259	68196	115503	65311	68681	73872	124319	0	0	249850000

Tabla 17. Solución que representa los resultados de modelar el comportamiento de un DM averso al riesgo.

Se sigue el mismo razonamiento para proponer una solución que represente el comportamiento de un DM muy averso al riesgo:

Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Peor caso 1	Peor caso 2	Peor caso 3	Peor caso 4	Cuantil 1	Cuantil 2	Cuantil 3	Cuantil 4	Card (QUK)	Card (FN)	Monto
73029	65925	73044	123261	62515	68676	59381	116315	67417	73841	63813	123598	0	0	249775000

Tabla 18. Solución que representa los resultados de modelar el comportamiento de un DM muy averso al riesgo.

Ya que las dos soluciones generadas al modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo son indiferentes entre sí (ver sección 4. 1. 3), es posible seleccionar, de manera indistinta, cualquiera de ellas. Por lo que se propone la siguiente:

Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Card(QUK)	Card(FN)	Monto
70519	72928	75969	118402	0	49	249200000

Tabla 19. Solución que representa los resultados de modelar el comportamiento de un DM neutral ante riesgo.

Un DM ligeramente inclinado al riesgo considera más importantes los cuantiles que el impacto en los objetivos originales y, puesto que considera que los cuantiles tienen el mismo peso, la solución seleccionada es:

Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Cuantil 1	Cuantil 2	Cuantil 3	Cuantil 4	Factible	Card(QUK)	Card(FN)	Monto
73371	64497	73550	123022	74652	65824	74789	124942	true	0	0	249150000

Tabla 20. Solución que representa los resultados de modelar el comportamiento de un DM

ligeramente inclinado al riesgo.

4. 2. 1 Estableciendo si existe diferencia entre los comportamientos modelados

Para saber si el enfoque propuesto en verdad representa los comportamientos modelados, es necesario establecer si existe una diferencia significativa entre los resultados obtenidos. Lo anterior hace que resulte imperioso estimar los umbrales de indiferencia y preferencia estricta. Para lograrlo, el enfoque propuesto plantea un método estadístico que genera umbrales para pares de soluciones (ver sección 3. 2. 7).

Sin embargo, los umbrales no pueden ser obtenidos para todos los objetivos entre soluciones de diferentes comportamientos. Esto se debe a que los comportamientos (averso, muy averso, neutral e inclinado) no consideran la misma cantidad de objetivos, utilizan diferentes proporciones de peso entre los objetivos y, en algunos casos, consideran cuantiles de diferente valor. (e. g., a pesar de que el modelado para los comportamientos averso y muy averso consideran 12 objetivos cada uno, no es posible obtener los umbrales para los cuantiles ya que el primer comportamiento establece cuantiles del 70% mientras que el segundo los establece del 85%.)

A pesar de estos problemas, aún es posible establecer si existe una diferencia significativa entre los comportamientos en función de los objetivos originales. Esto es debido a que todos los comportamientos consideran los objetivos originales como criterios a evaluar y les asignan la misma proporción de pesos; lo que nos permite establecer un punto de comparación a partir de estos objetivos.¹

Al analizar por pares las soluciones seleccionadas, se obtuvieron los siguientes umbrales de indiferencia (y, por ende, de preferencia estricta):

Neutral-Muy Averso

¹ Tanto el modelado para el comportamiento Averso como para el Muy Averso consideran indicadores del peor caso a los que se les asigna la misma proporción de pesos, por lo que la comparación en estos dos comportamientos es en dichos indicadores.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
5780.5	5685.3	5563.1	8245.1

Tabla 21. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par neutral-muy averso.

Neutral-Averso

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
5640.3	6072.7	5434.7	8507

Tabla 22. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par neutral-averso.

Neutral-Ligeramente Inclinado

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
5743.1	5850.4	5638.1	8388.2

Tabla 23. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par neutral-ligeramente inclinado al riesgo.

Muy Averso-Averso²

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
595.78	622.59	593.81	1155.03

Tabla 24. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par muy averso-averso.

Muy Averso-Ligeramente Inclinado

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
5728.9	5722.5	5452.8	8706.7

Tabla 25. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par muy averso-ligeramente inclinado al riesgo.

Ligeramente Inclinado-Averso

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4
5595.6	5730.3	5554.6	8538.1

Tabla 26. Umbrales de indiferencia utilizados al comparar el par ligeramente inclinado al riesgo-averso.

Evaluando las soluciones seleccionadas mediante el concepto de *Outranking* se pueden realizar las siguientes afirmaciones:

² De acuerdo a lo planteado en la sección 3. 2. 7, los umbrales para los objetivos que no son los originales es igual al 1% del valor del objetivo menor en las dos carteras.

- Neutral es preferido a Muy Averso
- Neutral es preferido a Inclinado
- Neutral y Averso son indiferentes.
- Muy Averso es preferido a Averso
- Muy Averso e Inclinado son indiferentes
- Inclinado es preferido a Averso

Puesto que las comparaciones se realizan en función de los niveles de impacto en los objetivos originales (en los que el comportamiento neutral se destaca por asignar los pesos más altos), lo más relevante de estos resultados es que las soluciones obtenidas al modelar el comportamiento de un DM neutral ante el riesgo son preferidas a las soluciones generadas al modelar el resto de comportamientos.

Se puede ver una excepción a esto en el par neutral-averso en el que se aprecia una indiferencia entre las soluciones. Sin embargo, los niveles de impacto en los objetivos del comportamiento neutral son más homogéneos que los del comportamiento averso, lo que indica que el DM se vería más atraído a considerar las primeras soluciones preferidas sobre las segundas. (Puesto que los pesos en los objetivos son los mismos, se espera que el DM elija soluciones con impactos homogéneos.)

Un resultado que vale la pena resaltar es el obtenido en el par averso-muy averso. En este par, los objetivos considerados para la comparación son los indicadores de peor caso. Esto es debido a que ambos comportamientos los consideran en el modelado, asignándoles el mismo peso; y no solo eso, sino que son los objetivos a los que asignan los mayores pesos. Los resultados obtenidos al comparar este par de comportamientos indican que las soluciones del modelo de un DM muy averso son preferidas a las de un DM averso.

La importancia de todo esto es que un DM neutral ante el riesgo efectivamente preferiría las soluciones generadas por el modelo planteado en el presente trabajo para representar ese comportamiento sobre las soluciones generadas en el resto de los comportamientos. Y que un DM muy averso al riesgo efectivamente preferiría las soluciones generadas por el modelo planteado para representar ese comportamiento sobre las soluciones generadas al modelar el comportamiento de un DM simplemente averso.

4.3 CONCLUSIONES

En base a los resultados mostrados, se concluye lo siguiente:

- El modelo propuesto genera soluciones equivalentes a las soluciones generadas por enfoques reportados en la literatura especializada. Al comparar las soluciones generadas por Fernández *et al.* (2013) con las soluciones generadas por nuestro modelo nos pudimos dar cuenta de que el 97% de las soluciones generadas por el primer enfoque son no superadas, mientras que el 92% de las soluciones generadas por el segundo enfoque también son no superadas. Con fundamento en lo anterior podemos afirmar que el DM no se sentiría defraudado si tuviera que elegir una solución generada por nuestro enfoque.
- El modelo expuesto considera y simula la actitud del DM ante el riesgo y genera soluciones justificables (es posible argumentar el nivel de impacto obtenido en función del comportamiento modelado). En las tablas 12, 13, 14 y 15 se exponen los resultados que demuestran que el enfoque propuesto es capaz de presentar información para una variedad de actitudes por parte del DM.
- Se ha demostrado que el modelo planteado permite considerar una cantidad relativamente grande de objetivos (hasta 12, en los modelos implementados) en el proceso de optimización.
- El modelo presentado en este trabajo supera una limitante significativa de otros enfoques al no imponer condiciones en la forma matemática de las restricciones.
- Mediante el simulador propuesto en la sección 3. 1, es posible obtener el valor esperado en los niveles de impacto de los objetivos, así como las variaciones estadísticas en dichos niveles. Esto permite al DM obtener información de una cartera en particular (proporcionada por él mismo), sin la necesidad de realizar el proceso de optimización por completo.

En síntesis, podemos concluir que nuestro enfoque es efectivo en el modelado de múltiples objetivos que consideran y reflejan el riesgo en el problema de la cartera, generando soluciones de calidad que superan algunas limitantes significativas de otros modelos. Esto podría constituir un aporte relevante a las metodologías de solución del problema de la cartera de proyectos.

4. 4 TRABAJO FUTURO

En esta sección se abordan algunas limitaciones del presente trabajo, acompañadas con las respectivas mejoras.

4. 4. 1 LIMITACIONES ACTUALES

El presente trabajo modela el riesgo en base a cuatro comportamientos del DM: ligeramente averso al riesgo, neutral ante el riesgo, averso al riesgo y muy averso al riesgo; demuestra que el modelo es capaz de representar estos comportamientos al demostrar que hay diferencias significativas entre cada uno de ellos. Sin embargo, lo hace en un ambiente estacionario con respecto a la cantidad de proyectos, cantidad de recursos a distribuir y el periodo de tiempo en el que estos recursos son distribuidos. Tampoco considera la interdependencia estadística que se puede dar entre los impactos en los objetivos o en los recursos necesarios por los proyectos. Además este enfoque exige demasiada información de parte del DM al requerirle conocimiento acerca de la conducta funcional de los proyectos (i. e., requiere que el DM proporcione el comportamiento estadístico de los impactos en los objetivos por parte de cada proyecto). Otra desventaja de este enfoque es que no considera el apoyo parcial a los proyectos; en otras palabras, no permite al DM asignar solamente una parte de los recursos solicitados por un proyecto dado.

4. 4. 2 POSIBLES MEJORAS

Para superar la limitación de un ambiente estacionario, es posible desarrollar un modelo que permita la gestión del riesgo en la selección de carteras de proyectos en un ambiente dinámico. El problema de la cartera de proyectos con consideración de riesgo en un ambiente dinámico consiste en seleccionar proyectos en condiciones que pueden variar con el tiempo, con la finalidad de maximizar el impacto (o beneficio) de los objetivos planteados por una organización. Definimos la propuesta de este problema como sigue.

Consideramos una cantidad positiva no predefinida de proyectos (alternativas) con impacto positivo asegurado pero aleatorio (se tiene conocimiento sobre la conducta funcional de cada alternativa) en cada uno de los k objetivos. El DM realiza su incorporación al proceso de selección de proyectos en el tiempo 0 con los recursos (de tipo monetario) t_0 . El DM puede asignar los recursos entre los proyectos en el inicio de cada uno de los P periodos de tiempo consecutivos. Los impactos en los objetivos del

proyecto a en el periodo p son denotados por el vector $a_p = [a_p^1, a_p^2, \dots, a_p^k]$, donde a_p^k es el impacto del proyecto a en el periodo de tiempo p y en el objetivo k .

Esta propuesta plantea que los vectores $a_1, a_2, \dots, a_p$ sean estadísticamente dependientes en recursos y beneficios. Estos son dos de los principales tipos de interdependencia estadística en la literatura relacionada con la selección de proyectos (Santhanam & Kyparisis, 1996; Medaglia *et al.*, 2007). Además estos tipos de interdependencia suelen darse en la vida real. Supóngase la tarea de formar una cartera de proyectos públicos. En este tipo de tareas, se puede tener el objetivo de maximizar el impacto social y minimizar costos. Si, por ejemplo, se tienen entre los proyectos disponibles el establecimiento de un hospital y la creación de un puente con un impacto social estimado en 50 y 60 unidades y un costo de \$3, 000, 000.00 y \$2, 000, 000.00, respectivamente. Si se decide apoyar a ambos proyectos, el impacto social podría exceder las 110 unidades y el costo podría ser menos de los \$5, 000, 000.00.

El análisis de desagregación de preferencias (PDA, por sus siglas en inglés) es un enfoque indirecto de incorporación de preferencias que ha recibido gran interés por parte de la comunidad científica debido, principalmente, a que implica un relativo bajo impacto en el esfuerzo cognitivo del DM (Greco *et al.*, 2008). Es posible implementar este enfoque para extraer el conjunto de parámetros, mismos que servirán para alimentar el método de *Outranking* necesario por el método planteado en Fernández *et al.* (2013), para realizar una optimización multiobjetivo.

BIBLIOGRAFÍA

- Abbasianjahromi, H., & Rajaie, H. (2012). Developing a project portfolio selection model for contractor firms considering the risk factor. *Journal of Civil Engineering and Management*, 18(6), 879-889.
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. M., & Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical finance*, 9(3), 203-228.
- Badri, M. A., Davis, D., & Davis, D. (2001). A comprehensive 0–1 goal programming model for project selection. *International Journal of Project Management*, 19(4), 243-252.
- Bechikh, S. (2013). Incorporating decision maker's preference information in evolutionary multi-objective optimization. Diss. PhD thesis, High Institute of Management of Tunis, University of Tunis, Tunisia.
- Bellman, R. (1978). *An introduction to artificial intelligence: Can computers think?*. Boyd & Fraser Publishing Company.
- Boardman, A. E. (2010). *Cost-benefit analysis*.
- Bohanec, M., & Rajkovič, V. (1990). DEX: An Expert System Shell for Decision Support. *Sistemica* 1(1), 145–157.
- Bouyssou D., (1990): "Build criteria: A prerequisite for MCDA", en C.A. Bana e Costa, editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 58-80.
- Chopra, V. K., & Ziemba, W. T. (1993). The effect of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *The journal of portfolio management*, 19(2), 6-11.
- Coello Coello, C. A. (2006). Evolutionary multi-objective optimization: a historical view of the field. *Computational Intelligence Magazine, IEEE*, 1(1), 28-36.
- Coello, C. A. C., Van Veldhuizen, D. A., & Lamont, G. B. (2002). *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems* (Vol. 242). New York: Kluwer Academic.
- Cohon, J. L., & Marks, D. H. (1975). A review and evaluation of multiobjective programming techniques. *Water Resources Research*, 11(2), 208-220.
- CONACYT. Estructura de la Cuenta Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación 2007- 2011. CONACYT, Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología. 2013.

- Deb, K. (2008). Introduction to evolutionary multiobjective optimization. In *Multiobjective Optimization* (pp. 59-96). Springer Berlin Heidelberg.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., & Meyarivan, T. A. M. T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2), 182-197.
- Deng, G. F., Lin, W. T., & Lo, C. C. (2012). Markowitz-based portfolio selection with cardinality constraints using improved particle swarm optimization. *Expert Systems with Applications*, 39(4), 4558-4566.
- Deng, X. T., Li, Z. F., & Wang, S. Y. (2005). A minimax portfolio selection strategy with equilibrium. *European Journal of operational research*, 166(1), 278-292.
- Denuit, M., Lefevre, C., & Utev, S. (1999). Stochastic orderings of convex/concave-type on an arbitrary grid. *Mathematics of Operations Research*, 24(4), 835-846.
- Detemple, J. (2014). Portfolio Selection: A Review. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 161(1), 1-21.
- Diario Oficial de la Federación [en línea]: Programa Especial de Ciencia, Tecnología e Innovación 2014-2018. 2014 [fecha de consulta: 18 de noviembre de 2014]. Disponible en: <http://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5354626&fecha=30/07/2014/>.
- Eiselta, H. A. & Marianov, V. (2014). Multicriteria decision making under uncertainty: a visual approach. *International transactions in operational research*. 525–540, DOI: 10.1111/itor.12073.
- Elton, E. J., Gruber, M. J., & Blake, C. R. (2010). Applications of Markowitz portfolio theory to pension fund design. In *Handbook of Portfolio Construction* (pp. 419-438). Springer US.
- F.H. Knight. (1921). *Risk, Uncertainty and Profit*. Houghton Mifflin, Boston.
- Fernandez, E., Lopez, E., Mazcorro, G., Olmedo, R., & Coello Coello, C. A. (2013). Application of the non-outranked sorting genetic algorithm to public project portfolio selection. *Information Sciences*, 228, 131-149.
- Fernandez, E., Lopez, F., Navarro, J., & Vega, I. (2009). An integrated mathematical-computer approach for R&D project selection in large public organisations. *International Journal of Mathematics in Operational Research*, 1(3), 372-396.
- Fernández, E. R., & Castillo, J. N. (2000). Modelo y sistema de apoyo a la decisión para problemas de cartera de proyectos con relevancia social. *Gestión y Política Pública*, 2(2000).

Fernández, E., Lopez, E., Lopez, F., & Coello Coello, C. A. (2011). Increasing selective pressure towards the best compromise in evolutionary multiobjective optimization: The extended NOSGA method. *Information Sciences*, 181(1), 44-56.

Figueira, J., Greco, S., & Ehrgott, M. (Eds.). (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys* (Vol. 78). Springer.

Gabriel, S. A., Kumar, S., Ordonez, J., & Nasserian, A. (2006). A multiobjective optimization model for project selection with probabilistic considerations. *Socio-Economic Planning Sciences*, 40(4), 297-313.

Giard, V. E., & Roy, B. (1985). *Méthodologie multicritère d'aide à la décision*. Editions Economica.

Goldberg, D. E. (2002). *The design of innovation: Lessons from and for competent genetic algorithms*. Kluwer Academic Publishers.

Golmohammadi, A., & Pajoutan, M. (2011). Meta heuristics for dependent portfolio selection problem considering risk. *Expert Systems with Applications*, 38(5), 5642-5649.

Greco, S., Matarazzo, B., & Słowiński, R. (2010). Dominance-based rough set approach to decision under uncertainty and time preference. *Annals of Operations Research*, 176(1), 41-75.

Greco, S., Matarazzo, B., & Słowiński, R. (2013). Beyond Markowitz with multiple criteria decision aiding. *Journal of Business Economics*, 83(1), 29-60.

Greco, S., Mousseau, V., & Słowiński, R. (2008). Ordinal regression revisited: Multiple criteria ranking using a set of additive value functions. *European Journal of Operational Research*, 191(2), 416-436.

Gretchikha, A. V. (1999). Identification of investor's risk aversion in portfolio optimization. *Journal of Risk*, 1(4), 55-70.

Grosan, C., & Abraham, A. (2008). A new approach for solving nonlinear equations systems. *Systems, Man and Cybernetics, Part A: Systems and Humans*, IEEE Transactions on, 38(3), 698-714.

Huang, X. (2008). Risk curve and fuzzy portfolio selection. *Computers & Mathematics with Applications*, 55(6), 1102-1112.

Hughes, E. J. (2005). Evolutionary many-objective optimisation: many once or one many?. In *Evolutionary Computation, 2005. The 2005 IEEE Congress on* (Vol. 1, pp. 222-227). IEEE.

- Kolm, P. N., Tütüncü, R., & Fabozzi, F. J. (2014). 60 Years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371.
- Krink, T., & Paterlini, S. (2011). Multiobjective optimization using differential evolution for real-world portfolio optimization. *Computational Management Science*, 8(1-2), 157-179.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection*. *The journal of finance*, 7(1), 77-91.
- Matos, M. A. (2007). Decision under risk as a multicriteria problem. *European Journal of Operational Research*, 181(3), 1516-1529.
- Matsumoto, M., & Nishimura, T. (1998). Mersenne twister: a 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation (TOMACS)*, 8(1), 3-30.
- Matsumoto, M., & Nishimura, T. (2004) [En línea]. What is Mersenne Twister (MT)? [fecha de consulta: 04 de diciembre de 2014]. Disponible: <<http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/ewhat-is-mt.html>>.
- McMillan, C., & Gonzalez, R. F. (1968). *Systems analysis: A computer approach to decision models*. (Revised ed.). Homewood, IL: Irwin
- Medaglia, A. L., Graves, S. B., & Ringuest, J. L. (2007). A multiobjective evolutionary approach for linearly constrained project selection under uncertainty. *European journal of operational research*, 179(3), 869-894.
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *The review of Economics and Statistics*, 247-257.
- Merton, R. C. (1971). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Journal of economic theory*, 3(4), 373-413.
- Michalewicz, Z. (1996). *Genetic algorithms+ data structures= evolution programs*. springer.
- Nassif, L. N., Filho, J. C. S., & Nogueira, J. M. (2013). Project Portfolio Selection in Public Administration Using Fuzzy Logic. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, 74, 322-331. doi:10.1016/j.sbspro.2013.03.036
- Pawlak, Z. y Slowinski, R. (1994). Rough set approach to multi-attribute decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 72(3):443 - 459.

- Phillips-Wren, G., & Jain, L. (2006). Artificial intelligence for decision making. En Knowledge-Based Intelligent Information and Engineering Systems (pp. 531-536). Springer Berlin Heidelberg.
- Rabbani, M., Aramoon Bajestani, M., & Baharian Khoshkhou, G. (2010). A multi-objective particle swarm optimization for project selection problem. *Expert Systems with Applications*, 37(1), 315-321.
- Roberts, C. P., & Casella, G. (1999). Monte Carlo statistical methods. NY: SpringerVerlag.
- Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, 45(1990):324-331. OR for Engineers Expert Systems and Decision-Aid.
- Roy, B. (1991). The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. *Theory and decision*, 31(1), 49-73.
- Roy, B. (1996). Multicriteria methodology for decision aiding (Vol. 12). Springer.
- Roy, B. (2010). Two conceptions of decision aiding. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 1(1), 74-79.
- Ruggieri, S., & Mesnard, F. (2010). Typing linear constraints. *ACM Transactions on Programming Languages and Systems (TOPLAS)*, 32(6), 21.
- Russell, S., & Norvig, P. (2009). Artificial Intelligence: A Modern. Prentice Hall.
- Salo, A., Keisler, J., & Morton, A. (2011). Portfolio decision analysis: improved methods for resource allocation (Vol. 162). Springer.
- Santhanam, R., & Kyparisis, G. J. (1996). A decision model for interdependent information system project selection. *European Journal of Operational Research*, 89(2), 380-399.
- Sastry, K., Goldberg, D., & Kendall, G. (2005). Genetic Algorithms. En Search methodologies. Springer Science+ Business Media, Incorporated.
- Sawilowsky, S. S. (2003). You think you've got trivials?. *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, 2(1), 21.
- Sinivas, M., & Patnaik, L. M. (1994). Genetic algorithms: A survey. *Computer*, 27(6), 17-26.
- Sobol, I. M. (1974). The Monte Carlo Method. (Translated and adapted from the second Russian edition by R. Messer, J. Slone, and P. Fortini. ERIC No. ED 184845.

Soleimani, H., Golmakani, H. R., & Salimi, M. H. (2009). Markowitz-based portfolio selection with minimum transaction lots, cardinality constraints and regarding sector capitalization using genetic algorithm. *Expert Systems with Applications*, 36(3), 5058-5063.

Statistical Office of the European Communities [En línea]: R&D expenditure. (2010) [fecha de consulta: 10 de febrero de 2014]. Disponible: <http://epp.eurostat.ec.europa.eu/statistics_explained/index.php/R_%26_D_expenditure>

Steuer, R. E., Qi, Y., & Hirschberger, M. (2007). Suitable-portfolio investors, nondominated frontier sensitivity, and the effect of multiple objectives on standard portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 152(1), 297-317.

Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1947). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton. University Press, Princeton, NJ.

Yoshimoto, A. (1996). The mean-variance approach to portfolio optimization subject to transaction costs. *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 39(1), 99-117.

Yu, L., Wang, S., Wen, F., & Lai, K. K. (2012). Genetic algorithm-based multi-criteria project portfolio selection. *Annals of Operations Research*, 197(1), 71-86.

Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.

Zopounidis, C., & Pardalos, P. (2010). *Handbook of multicriteria analysis* (Vol. 103). Springer.

ANEXOS

Anexo A. Conjuntos de datos.

Tabla 1. Conjunto de datos empleado en Fernández *et al* (2013).

Monto solicitado	Tipo de proyecto	Tipo de proyecto	Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Obj 5	Obj 6	Obj 7	Obj 8	Obj 9
50000000	1	2	0	10000	0	0	45000	0	18000	0	0
49750000	1	2	50000	0	0	0	30000	0	18000	0	0
49500000	3	2	35000	0	0	0	0	30000	0	24000	0
49250000	2	1	0	0	30000	0	30000	0	0	0	36000
49000000	2	2	40000	0	0	0	30000	0	0	0	54000
48750000	1	1	25000	0	0	45000	0	0	0	0	6000
48500000	1	2	30000	0	0	45000	0	0	0	30000	0
48250000	2	1	0	5000	0	0	30000	0	0	0	12000
48000000	1	2	0	20000	0	0	15000	0	6000	0	0
47750000	2	2	40000	0	0	60000	0	0	0	0	36000
47500000	2	2	0	45000	0	0	30000	0	0	18000	0
47250000	2	1	0	15000	0	0	60000	0	18000	0	0
47000000	2	1	0	20000	0	0	45000	0	0	0	30000
46750000	3	1	0	0	40000	60000	0	0	0	24000	0
46500000	2	1	0	0	10000	0	0	45000	18000	0	0
46250000	2	2	0	20000	0	0	60000	0	0	12000	0
46000000	2	1	0	40000	0	60000	0	0	48000	0	0
45750000	3	1	0	0	20000	0	45000	0	0	24000	0
45500000	1	1	0	25000	0	0	45000	0	60000	0	0
45250000	1	1	35000	0	0	0	15000	0	36000	0	0
45000000	2	2	0	5000	0	0	0	60000	0	18000	0
44750000	2	2	10000	0	0	45000	0	0	0	0	12000
44500000	3	1	50000	0	0	0	60000	0	18000	0	0
44250000	3	1	0	0	40000	0	0	15000	0	0	36000
44000000	1	1	0	45000	0	30000	0	0	0	30000	0
43750000	3	2	0	0	25000	0	0	30000	42000	0	0
43500000	1	2	0	10000	0	60000	0	0	0	0	48000
43250000	3	2	0	15000	0	15000	0	0	6000	0	0
43000000	1	2	40000	0	0	0	0	60000	12000	0	0
42750000	3	2	0	0	5000	45000	0	0	48000	0	0
42500000	3	1	0	5000	0	0	0	45000	0	0	60000
42250000	1	2	25000	0	0	60000	0	0	36000	0	0
42000000	3	2	0	0	15000	0	0	60000	0	0	30000
41750000	3	2	0	45000	0	45000	0	0	0	0	30000
41500000	1	1	0	0	25000	45000	0	0	60000	0	0
41250000	2	1	0	0	30000	0	0	15000	0	24000	0
41000000	3	1	35000	0	0	0	0	60000	42000	0	0
40750000	2	1	0	20000	0	0	60000	0	0	0	48000
40500000	2	2	35000	0	0	15000	0	0	0	60000	0
40250000	1	1	35000	0	0	0	0	60000	0	0	12000
40000000	2	2	0	0	35000	0	0	45000	12000	0	0
39750000	2	2	0	0	15000	0	45000	0	0	24000	0
39500000	2	1	0	0	30000	0	0	30000	0	0	12000
39250000	3	2	0	0	45000	0	0	60000	12000	0	0
39000000	1	2	50000	0	0	0	15000	0	60000	0	0
38750000	2	2	0	50000	0	0	45000	0	0	0	60000
38500000	2	2	10000	0	0	30000	0	0	0	42000	0

Monto solicitado	Tipo de proyecto	Tipo de proyecto	Obj 1	Obj 2	Obj 3	Obj 4	Obj 5	Obj 6	Obj 7	Obj 8	Obj 9
38250000	2	1	0	0	35000	0	0	30000	0	54000	0
38000000	2	2	0	0	20000	0	0	30000	0	42000	0
37750000	2	2	0	0	25000	0	30000	0	18000	0	0
37500000	3	2	50000	0	0	0	60000	0	0	0	24000
37250000	2	2	0	0	50000	0	45000	0	54000	0	0
37000000	1	1	50000	0	0	60000	0	0	0	0	30000
36750000	3	1	0	45000	0	0	0	60000	30000	0	0
36500000	1	1	0	20000	0	45000	0	0	0	0	24000
36250000	2	2	10000	0	0	0	30000	0	6000	0	0
36000000	1	2	0	0	30000	30000	0	0	0	36000	0
35750000	2	2	0	25000	0	15000	0	0	12000	0	0
35500000	3	2	0	35000	0	0	0	60000	60000	0	0
35250000	3	2	0	0	10000	45000	0	0	0	0	54000
35000000	2	2	0	20000	0	0	30000	0	24000	0	0
34750000	2	2	0	0	5000	0	15000	0	0	48000	0
34500000	3	2	0	45000	0	0	0	30000	0	0	12000
34250000	3	1	0	45000	0	0	0	60000	12000	0	0
34000000	1	1	25000	0	0	60000	0	0	0	0	18000
33750000	1	2	0	30000	0	0	15000	0	24000	0	0
33500000	2	1	0	0	15000	45000	0	0	0	0	18000
33250000	1	2	25000	0	0	15000	0	0	12000	0	0
33000000	1	2	15000	0	0	0	60000	0	0	0	36000
32750000	1	1	0	0	5000	30000	0	0	0	0	6000
32500000	3	1	0	10000	0	0	0	15000	0	0	60000
32250000	1	2	0	50000	0	0	45000	0	30000	0	0
32000000	1	2	0	0	15000	0	0	45000	12000	0	0
31750000	2	2	0	0	40000	0	0	45000	0	30000	0
31500000	1	1	0	0	30000	0	0	30000	0	42000	0
31250000	3	1	0	0	30000	0	0	45000	42000	0	0
31000000	2	2	0	35000	0	15000	0	0	0	0	18000
30750000	2	2	0	45000	0	60000	0	0	0	42000	0
30500000	1	1	0	50000	0	0	0	45000	0	0	42000
30250000	1	1	0	0	15000	0	0	15000	12000	0	0
30000000	3	2	0	0	30000	0	45000	0	60000	0	0
29750000	3	2	30000	0	0	0	45000	0	0	0	36000
29500000	3	2	0	0	25000	0	15000	0	18000	0	0
29250000	3	1	0	0	35000	0	30000	0	0	0	36000
29000000	1	2	0	0	5000	0	15000	0	60000	0	0
28750000	2	2	0	0	25000	0	60000	0	0	42000	0
28500000	2	2	0	0	25000	0	45000	0	0	42000	0
28250000	3	1	0	10000	0	0	0	15000	36000	0	0
28000000	3	2	10000	0	0	60000	0	0	0	18000	0
27750000	3	2	0	0	35000	45000	0	0	0	36000	0
27500000	2	2	0	0	35000	0	0	45000	30000	0	0
27250000	3	2	0	5000	0	0	45000	0	0	6000	0
27000000	1	2	0	0	20000	0	45000	0	24000	0	0
26750000	3	2	25000	0	0	15000	0	0	36000	0	0
26500000	2	2	0	40000	0	15000	0	0	42000	0	0
26250000	1	1	0	0	25000	0	45000	0	0	0	60000
26000000	2	2	20000	0	0	0	0	45000	0	18000	0
25750000	3	2	15000	0	0	45000	0	0	54000	0	0
25500000	3	1	0	0	50000	0	0	45000	0	0	48000
25250000	1	1	0	0	20000	15000	0	0	0	54000	0

Anexo B. Soluciones generadas

Tabla 10. Soluciones generadas por Fernández *et al.* (2013)

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4	Objetivo 5	Objetivo 6	Objetivo 7	Objetivo 8	Objetivo 9
82000	67500	59500	115500	87000	84000	96000	57000	75000
82000	67500	58000	115500	91500	79500	96000	58200	75000
82000	67500	59500	115500	90000	79500	93600	58200	78600
82000	67500	60000	115500	87000	84000	93600	61200	75000
76000	69500	55500	106500	90000	78000	101400	69600	61200
77500	65500	68000	118500	90000	75000	108000	61800	64800
81000	62000	66500	117000	85500	84000	108000	66000	58200
74000	67500	64500	109500	97500	76500	101400	56400	66600
74000	67500	65500	109500	96000	76500	101400	52200	70200
82000	59500	64500	112500	103500	79500	99600	63000	73200
75000	71500	64000	96000	115500	82500	111000	55800	64200
82000	69000	59500	117000	84000	84000	103200	52800	73800
81000	67000	63000	111000	100500	84000	100800	49200	67200
82000	60000	67500	109500	91500	90000	95400	67200	64800
82000	66000	67000	109500	90000	88500	87600	64200	75000
81000	73000	61000	96000	111000	84000	112800	51000	61200
81000	78000	56000	106500	102000	76500	109800	61800	63000
81000	78500	52500	106500	103500	76500	109800	62400	59400
78500	72500	62500	115500	85500	78000	107400	69000	64200
78500	73500	53000	115500	91500	70500	108600	61800	63000
78500	73500	56500	115500	91500	70500	107400	61800	67800
78500	72500	63500	115500	87000	78000	105600	69000	67800
78500	73000	60000	115500	91500	73500	102600	69600	67800
78500	72000	63500	115500	91500	76500	102000	69600	67800
78500	71500	66000	115500	88500	76500	103800	69000	67800
76000	72000	70000	93000	111000	79500	107400	60000	58200
81000	74500	62500	102000	100500	84000	108000	61200	56400
82000	72000	60500	102000	105000	84000	105000	57600	64800
82000	72000	60500	102000	103500	84000	107400	57600	61800
82000	70000	62000	102000	105000	84000	105000	60000	61800
81000	72000	65000	100500	100500	87000	111000	61200	56400
77000	74500	60500	108000	99000	78000	108600	46200	78000
78500	65500	66500	105000	102000	84000	105600	52800	66600
75000	74500	66500	99000	105000	84000	105600	57600	64800
78500	65500	65500	105000	102000	81000	104400	58200	66600
78500	69000	65000	105000	102000	78000	104400	59400	61800

Tabla 11. Soluciones generadas por nuestro enfoque.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4	Objetivo 5	Objetivo 6	Objetivo 7	Objetivo 8	Objetivo 9
65000	74000	64500	103500	105000	75000	97800	56400	77400
77500	61000	65500	97500	112500	78000	99600	56400	68400
72500	66500	71000	100500	105000	85500	99000	57000	64800
74000	62000	71500	100500	112500	78000	95400	57000	68400
78000	65500	64500	99000	108000	79500	93000	64800	68400
76000	62000	68000	100500	112500	78000	92400	58800	68400
74500	63500	71000	100500	102000	85500	98400	61200	61800
75500	65500	64000	97500	109500	84000	101400	58200	63000
74500	63500	71000	96000	102000	90000	101400	57600	61800
73500	65500	65500	97500	109500	84000	102600	56400	63000
76000	65000	66000	105000	96000	76500	94800	70200	67200
76000	65000	65500	105000	97500	76500	95400	70200	67200
78500	67000	62000	108000	100500	73500	93600	63600	74400
77000	69000	60000	109500	99000	73500	94800	64800	69000
81000	63000	65500	105000	94500	76500	97200	69000	67200
76000	67500	62000	105000	94500	78000	94200	69600	70200
76000	65500	65000	105000	96000	76500	93000	70200	73200
76000	67500	64500	102000	102000	76500	97200	66000	66600
76000	67500	65000	102000	102000	76500	94800	66000	72600
80000	63500	66000	102000	93000	81000	96600	64800	73200
69000	66500	84000	99000	91500	93000	96000	62400	75600
69000	69000	81500	103500	96000	85500	100200	61200	73200
69000	70000	79500	103500	94500	87000	97800	60000	79200
69000	68500	85000	102000	91500	88500	94800	67800	72600
72500	68000	80500	100500	93000	88500	100200	61800	69600
65500	68500	85000	102000	93000	90000	96000	61800	79200
69000	66500	85000	99000	93000	90000	96000	67800	76800
69000	73000	80500	102000	93000	85500	99000	61200	69600
72500	64000	85000	100500	90000	91500	97800	67200	72600
72500	64500	79500	103500	93000	90000	97800	60600	79200
77500	61500	68000	97500	94500	93000	107400	54000	71400
77500	60000	69500	96000	97500	87000	107400	57600	67200
76500	56500	75000	97500	94500	96000	103800	52200	72600
74000	60500	71000	96000	97500	93000	105600	57600	69000
74000	69500	67000	97500	97500	94500	91200	63000	73200
72000	68000	69000	100500	100500	85500	92400	66600	72000
74000	66000	70500	100500	94500	94500	93600	67200	72000
72500	71500	65500	100500	94500	91500	93600	58800	70200
74000	69500	65000	100500	93000	87000	91200	61800	77400
74000	69500	66000	100500	97500	90000	90000	63000	73800
72000	66000	70000	105000	97500	85500	90000	66600	77400
72000	69500	67500	106500	93000	85500	90000	62400	79200

74000	65000	69500	100500	93000	93000	90000	61200	77400
74000	71500	64000	100500	100500	87000	92400	58800	73800
77000	73500	62000	115500	99000	76500	91200	55800	83400
77000	76500	60500	111000	100500	76500	93600	55800	81600
76000	74000	61000	111000	100500	79500	95400	56400	78600
77500	75500	62000	103500	108000	78000	93600	57000	82800
76000	76000	64500	99000	102000	79500	97800	56400	77400
77500	75000	62000	103500	112500	76500	90000	57600	82800
76000	77000	59500	106500	102000	79500	97800	56400	76800
75500	74000	64000	111000	106500	72000	90000	60000	87600
78000	74500	62500	108000	102000	73500	94800	59400	85800
80000	74000	60500	106500	106500	76500	91200	56400	85800
77000	71000	65500	102000	97500	84000	96000	61800	75000
76000	70000	67500	103500	97500	87000	95400	58200	78600
79000	70000	69000	102000	88500	91500	96600	57600	70800
77000	68000	65500	102000	100500	84000	97800	60000	75000
76000	70000	69000	103500	93000	91500	95400	57000	78600
79000	70500	69000	100500	90000	91500	97800	57600	70800
76000	72000	67000	102000	88500	93000	98400	54600	72000
75000	70500	71500	102000	88500	91500	94200	63600	72600
74500	68000	69000	100500	100500	88500	96600	58800	75000
76000	72500	65000	102000	88500	93000	96000	55200	72000
72500	64500	74500	103500	99000	84000	99600	53400	82800
70000	68000	76000	97500	100500	88500	101400	53400	76200
72500	63000	80000	97500	99000	84000	103800	55800	72000
70000	66000	75500	93000	102000	88500	108600	53400	66600
71500	61000	77500	94500	111000	81000	101400	52800	78600
72500	66000	70500	103500	105000	82500	101400	53400	79200
72500	64500	77500	100500	99000	81000	100800	55800	74400
72500	64500	72000	103500	105000	84000	103200	53400	73200
71000	63500	77500	100500	100500	81000	101400	60000	72000
71000	67500	71500	102000	100500	79500	102600	57600	71400
71000	74000	72500	94500	105000	87000	97200	57600	81000
71000	77000	71000	96000	111000	82500	99600	53400	74400
71000	71500	72500	93000	105000	88500	97200	57600	85200
71000	74500	69500	94500	111000	81000	96600	53400	78600
73000	76500	69000	96000	103500	87000	105600	54600	68400
71000	73500	72000	99000	111000	82500	99600	53400	78000
71000	75500	72000	100500	103500	84000	100800	52800	79800
73000	74000	71000	99000	99000	91500	97200	54600	76800
73000	71000	71500	99000	100500	88500	104400	54600	72000
71000	74500	72000	94500	108000	87000	97200	53400	81000
70500	72000	64500	93000	99000	88500	91800	62400	65400
70500	72000	62000	93000	105000	84000	91800	66600	60600
70500	69000	62000	93000	106500	78000	90600	63600	70200
70500	69000	66500	93000	99000	87000	90600	66000	69000
69500	73000	65500	90000	106500	87000	94800	61200	65400
70500	70000	62000	93000	106500	78000	90600	67800	64200
70500	67000	69500	93000	94500	91500	94200	61200	63000
70500	69500	67000	99000	94500	87000	89400	61200	74400
69500	74500	61500	96000	105000	82500	91800	62400	66000
70500	70500	59000	94500	106500	78000	91200	67800	60600

73000	78500	64500	94500	91500	99000	92400	55800	81000
71500	76500	69500	91500	88500	99000	87000	60000	84600
73000	76500	68500	96000	87000	96000	85200	62400	84600
75000	75000	69500	91500	84000	99000	88800	60000	84600
73000	78500	65500	96000	88500	96000	85200	62400	84000
73000	78500	66000	96000	90000	99000	86400	61200	81000
71500	77000	69500	91500	88500	99000	85200	61200	84600
71500	74500	72500	91500	82500	100500	87000	62400	79800
73000	78500	64500	94500	90000	99000	92400	54600	84000
76500	78500	61000	94500	93000	94500	94800	55800	81000
75500	70500	66500	94500	93000	96000	101400	50400	82200
79000	71500	64000	96000	90000	96000	100200	48000	87000
75500	68500	68000	93000	97500	91500	100800	54000	79800
79000	68500	69500	93000	90000	96000	100800	51600	79800
75500	68500	69500	93000	93000	96000	101400	54000	79800
75500	68500	69500	93000	93000	96000	103800	51600	79800
79000	69500	68500	94500	93000	96000	96600	51600	84600
79000	64000	69500	88500	94500	96000	107400	51600	76800
76500	66000	71000	90000	96000	100500	94200	50400	80400
75500	68000	68000	91500	99000	96000	98400	50400	85800
73500	65500	64500	106500	93000	87000	96000	59400	71400
73500	64500	68500	105000	91500	87000	94200	59400	70200
73500	58000	71500	102000	99000	87000	93600	59400	73200
73500	62000	63500	108000	93000	87000	100800	56400	72000
76500	63000	66500	109500	94500	87000	86400	59400	84000
76500	63000	66500	105000	97500	87000	88800	59400	81600
76500	64500	66000	105000	94500	87000	92400	59400	73800
73500	63000	67000	103500	93000	88500	97200	59400	73200
76500	58000	69000	102000	102000	87000	91800	59400	76800
73500	63000	64500	105000	94500	87000	96000	56400	78000
75000	60000	69000	108000	88500	96000	99000	59400	74400
75000	60000	69500	112500	82500	93000	97800	59400	75600
74000	55000	77500	102000	100500	85500	95400	62400	76800
74000	55000	76500	102000	96000	90000	97200	60000	76800
75000	57500	75500	109500	99000	79500	84600	66600	78600
75000	58500	76000	105000	99000	85500	85800	64200	79200
75000	54000	80500	108000	102000	84000	85800	64200	80400
75000	53000	77500	105000	102000	84000	87600	61200	79200
74500	55000	76500	103500	96000	85500	100800	58200	76800
74000	58500	73500	103500	100500	81000	95400	59400	78600

Tabla 12. Soluciones no superadas del *pool* de soluciones.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4	Objetivo 5	Objetivo 6	Objetivo 7	Objetivo 8	Objetivo 9
82000	67500	59500	115500	87000	84000	96000	57000	75000
82000	67500	58000	115500	91500	79500	96000	58200	75000
82000	67500	59500	115500	90000	79500	93600	58200	78600
82000	67500	60000	115500	87000	84000	93600	61200	75000
76000	69500	55500	106500	90000	78000	101400	69600	61200
77500	65500	68000	118500	90000	75000	108000	61800	64800
81000	62000	66500	117000	85500	84000	108000	66000	58200
74000	67500	64500	109500	97500	76500	101400	56400	66600
74000	67500	65500	109500	96000	76500	101400	52200	70200
82000	59500	64500	112500	103500	79500	99600	63000	73200
75000	71500	64000	96000	115500	82500	111000	55800	64200
82000	69000	59500	117000	84000	84000	103200	52800	73800
81000	67000	63000	111000	100500	84000	100800	49200	67200
82000	60000	67500	109500	91500	90000	95400	67200	64800
82000	66000	67000	109500	90000	88500	87600	64200	75000
81000	73000	61000	96000	111000	84000	112800	51000	61200
81000	78000	56000	106500	102000	76500	109800	61800	63000
81000	78500	52500	106500	103500	76500	109800	62400	59400
78500	72500	62500	115500	85500	78000	107400	69000	64200
78500	73500	53000	115500	91500	70500	108600	61800	63000
78500	73500	56500	115500	91500	70500	107400	61800	67800
78500	72500	63500	115500	87000	78000	105600	69000	67800
78500	73000	60000	115500	91500	73500	102600	69600	67800
78500	72000	63500	115500	91500	76500	102000	69600	67800
78500	71500	66000	115500	88500	76500	103800	69000	67800
76000	72000	70000	93000	111000	79500	107400	60000	58200
81000	74500	62500	102000	100500	84000	108000	61200	56400
82000	72000	60500	102000	105000	84000	105000	57600	64800
82000	72000	60500	102000	103500	84000	107400	57600	61800
82000	70000	62000	102000	105000	84000	105000	60000	61800
81000	72000	65000	100500	100500	87000	111000	61200	56400
77000	74500	60500	108000	99000	78000	108600	46200	78000
78500	65500	66500	105000	102000	84000	105600	52800	66600
75000	74500	66500	99000	105000	84000	105600	57600	64800
78500	65500	65500	105000	102000	81000	104400	58200	66600
78500	69000	65000	105000	102000	78000	104400	59400	61800
77500	61000	65500	97500	112500	78000	99600	56400	68400
72500	66500	71000	100500	105000	85500	99000	57000	64800
74000	62000	71500	100500	112500	78000	95400	57000	68400

78000	65500	64500	99000	108000	79500	93000	64800	68400
76000	62000	68000	100500	112500	78000	92400	58800	68400
74500	63500	71000	100500	102000	85500	98400	61200	61800
75500	65500	64000	97500	109500	84000	101400	58200	63000
74500	63500	71000	96000	102000	90000	101400	57600	61800
73500	65500	65500	97500	109500	84000	102600	56400	63000
76000	65000	66000	105000	96000	76500	94800	70200	67200
76000	65000	65500	105000	97500	76500	95400	70200	67200
78500	67000	62000	108000	100500	73500	93600	63600	74400
77000	69000	60000	109500	99000	73500	94800	64800	69000
81000	63000	65500	105000	94500	76500	97200	69000	67200
76000	67500	62000	105000	94500	78000	94200	69600	70200
76000	65500	65000	105000	96000	76500	93000	70200	73200
76000	67500	64500	102000	102000	76500	97200	66000	66600
76000	67500	65000	102000	102000	76500	94800	66000	72600
80000	63500	66000	102000	93000	81000	96600	64800	73200
69000	69000	81500	103500	96000	85500	100200	61200	73200
69000	70000	79500	103500	94500	87000	97800	60000	79200
72500	68000	80500	100500	93000	88500	100200	61800	69600
69000	73000	80500	102000	93000	85500	99000	61200	69600
72500	64000	85000	100500	90000	91500	97800	67200	72600
72500	64500	79500	103500	93000	90000	97800	60600	79200
77500	61500	68000	97500	94500	93000	107400	54000	71400
77500	60000	69500	96000	97500	87000	107400	57600	67200
74000	60500	71000	96000	97500	93000	105600	57600	69000
74000	69500	67000	97500	97500	94500	91200	63000	73200
72000	68000	69000	100500	100500	85500	92400	66600	72000
74000	66000	70500	100500	94500	94500	93600	67200	72000
72500	71500	65500	100500	94500	91500	93600	58800	70200
74000	69500	65000	100500	93000	87000	91200	61800	77400
74000	69500	66000	100500	97500	90000	90000	63000	73800
72000	66000	70000	105000	97500	85500	90000	66600	77400
72000	69500	67500	106500	93000	85500	90000	62400	79200
74000	65000	69500	100500	93000	93000	90000	61200	77400
74000	71500	64000	100500	100500	87000	92400	58800	73800
77000	73500	62000	115500	99000	76500	91200	55800	83400
77000	76500	60500	111000	100500	76500	93600	55800	81600
76000	74000	61000	111000	100500	79500	95400	56400	78600
77500	75500	62000	103500	108000	78000	93600	57000	82800
76000	76000	64500	99000	102000	79500	97800	56400	77400
77500	75000	62000	103500	112500	76500	90000	57600	82800
76000	77000	59500	106500	102000	79500	97800	56400	76800
75500	74000	64000	111000	106500	72000	90000	60000	87600
78000	74500	62500	108000	102000	73500	94800	59400	85800
80000	74000	60500	106500	106500	76500	91200	56400	85800
77000	71000	65500	102000	97500	84000	96000	61800	75000
76000	70000	67500	103500	97500	87000	95400	58200	78600
79000	70000	69000	102000	88500	91500	96600	57600	70800
77000	68000	65500	102000	100500	84000	97800	60000	75000
76000	70000	69000	103500	93000	91500	95400	57000	78600
79000	70500	69000	100500	90000	91500	97800	57600	70800
76000	72000	67000	102000	88500	93000	98400	54600	72000
75000	70500	71500	102000	88500	91500	94200	63600	72600
74500	68000	69000	100500	100500	88500	96600	58800	75000
76000	72500	65000	102000	88500	93000	96000	55200	72000
72500	64500	74500	103500	99000	84000	99600	53400	82800
72500	63000	80000	97500	99000	84000	103800	55800	72000
71500	61000	77500	94500	111000	81000	101400	52800	78600
72500	66000	70500	103500	105000	82500	101400	53400	79200
72500	64500	77500	100500	99000	81000	100800	55800	74400
72500	64500	72000	103500	105000	84000	103200	53400	73200
71000	63500	77500	100500	100500	81000	101400	60000	72000
71000	67500	71500	102000	100500	79500	102600	57600	71400
71000	74000	72500	94500	105000	87000	97200	57600	81000
71000	77000	71000	96000	111000	82500	99600	53400	74400

71000	71500	72500	93000	105000	88500	97200	57600	85200
71000	74500	69500	94500	111000	81000	96600	53400	78600
73000	76500	69000	96000	103500	87000	105600	54600	68400
71000	73500	72000	99000	111000	82500	99600	53400	78000
71000	75500	72000	100500	103500	84000	100800	52800	79800
73000	74000	71000	99000	99000	91500	97200	54600	76800
73000	71000	71500	99000	100500	88500	104400	54600	72000
71000	74500	72000	94500	108000	87000	97200	53400	81000
70500	72000	64500	93000	99000	88500	91800	62400	65400
70500	72000	62000	93000	105000	84000	91800	66600	60600
70500	69000	62000	93000	106500	78000	90600	63600	70200
70500	69000	66500	93000	99000	87000	90600	66000	69000
70500	70000	62000	93000	106500	78000	90600	67800	64200
70500	67000	69500	93000	94500	91500	94200	61200	63000
70500	69500	67000	99000	94500	87000	89400	61200	74400
70500	70500	59000	94500	106500	78000	91200	67800	60600
73000	78500	64500	94500	91500	99000	92400	55800	81000
71500	76500	69500	91500	88500	99000	87000	60000	84600
73000	76500	68500	96000	87000	96000	85200	62400	84600
73000	78500	65500	96000	88500	96000	85200	62400	84000
73000	78500	66000	96000	90000	99000	86400	61200	81000
71500	77000	69500	91500	88500	99000	85200	61200	84600
71500	74500	72500	91500	82500	100500	87000	62400	79800
73000	78500	64500	94500	90000	99000	92400	54600	84000
76500	78500	61000	94500	93000	94500	94800	55800	81000
75500	70500	66500	94500	93000	96000	101400	50400	82200
79000	71500	64000	96000	90000	96000	100200	48000	87000
75500	68500	68000	93000	97500	91500	100800	54000	79800
79000	68500	69500	93000	90000	96000	100800	51600	79800
75500	68500	69500	93000	93000	96000	101400	54000	79800
75500	68500	69500	93000	93000	96000	103800	51600	79800
79000	69500	68500	94500	93000	96000	96600	51600	84600
79000	64000	69500	88500	94500	96000	107400	51600	76800
76500	66000	71000	90000	96000	100500	94200	50400	80400
75500	68000	68000	91500	99000	96000	98400	50400	85800
73500	65500	64500	106500	93000	87000	96000	59400	71400
73500	64500	68500	105000	91500	87000	94200	59400	70200
73500	58000	71500	102000	99000	87000	93600	59400	73200
73500	62000	63500	108000	93000	87000	100800	56400	72000
76500	63000	66500	109500	94500	87000	86400	59400	84000
76500	63000	66500	105000	97500	87000	88800	59400	81600
76500	64500	66000	105000	94500	87000	92400	59400	73800
73500	63000	67000	103500	93000	88500	97200	59400	73200
76500	58000	69000	102000	102000	87000	91800	59400	76800
73500	63000	64500	105000	94500	87000	96000	56400	78000
75000	60000	69000	108000	88500	96000	99000	59400	74400
75000	60000	69500	112500	82500	93000	97800	59400	75600
74000	55000	77500	102000	100500	85500	95400	62400	76800
74000	55000	76500	102000	96000	90000	97200	60000	76800
75000	57500	75500	109500	99000	79500	84600	66600	78600
75000	58500	76000	105000	99000	85500	85800	64200	79200
75000	54000	80500	108000	102000	84000	85800	64200	80400
75000	53000	77500	105000	102000	84000	87600	61200	79200
74500	55000	76500	103500	96000	85500	100800	58200	76800
74000	58500	73500	103500	100500	81000	95400	59400	78600

Tabla 13. Resultados al modelar el comportamiento de un DM ligeramente inclinado al riesgo.

Monto	24780 0000	24747 5000	24980 0000	24915 0000	24935 0000	24960 0000	24997 5000	24857 5000	24862 5000	24805 0000	24985 0000	24952 5000	24900 0000	24885 0000	24842 5000
Card(FN)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Card(QUK)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Factible	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true
Cuantil 4	12783 1	12789 5	12649 4	12494 2	11860 4	10825 4	12360 3	12487 8	10991 1	12343 3	12647 9	12655 3	11727 4	12956 0	12950 8
Cuantil 3	75158	65630	59742	74789	85699	81327	74700	84351	76860	83266	78157	78273	87389	73158	73431
Cuantil 2	63223	73389	70612	65824	45608	63175	70808	76432	44567	72273	74395	74210	73874	69429	69777
Cuantil 1	75253	66327	79763	74652	76854	68281	66710	55328	78278	56586	58633	58501	50053	68223	68373
Objetivo 4	12597 6	12606 2	12427 3	12302 2	11691 9	10645 1	12161 9	12293 2	10795 8	12152 1	12454 8	12462 8	11555 2	12752 4	12763 5
Objetivo 3	73943	64493	58552	73550	84458	80018	73452	83035	75573	81930	76892	77006	86051	71980	72223
Objetivo 2	61975	72104	69428	64497	44565	61922	69419	75047	43591	70980	73021	73026	72536	68043	68494
Objetivo 1	74003	66978	78435	73371	75611	67038	65518	54124	76995	55453	57476	57387	48907	67009	67069

Tabla 14. Resultados al modelar el comportamiento de un DM Neutral ante el riesgo.

Objetivo 1	Objetivo 2	Objetivo 3	Objetivo 4	Factible	Card(QUK)	Card(FN)	Monto
70519	72928	75969	118402	true	0	49	249200000
70543	73038	75993	118650	true	0	49	249200000

Tabla 15. Resultados al modelar el comportamiento de un Averso al riesgo.

Monto	249050000	249025000	249650000	244750000	249900000	249100000	247925000	248475000	248575000	248725000	249850000
Card(FN)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Card(QUK)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Factible	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true
Cuantil 4	125603	125624	115077	115057	121138	125422	119789	125403	125697	109228	124319
Cuantil 3	51006	82148	76302	78280	84383	68156	60874	75353	67528	83044	73872
Cuantil 2	78169	72400	72215	50745	64169	60260	78330	72906	68594	54296	68681
Cuantil 1	70632	46386	55365	75761	57017	71156	63780	57979	69145	68206	65311
Peor caso 4	116667	116672	106243	106337	111978	116221	111047	116313	116693	100425	115503
Peor caso 3	46206	76057	70532	72273	77948	62613	55665	69432	61783	76478	68196
Peor caso 2	71750	65777	65844	45499	57833	54317	71907	66393	62685	48628	62259
Peor caso 1	64809	41593	50027	69699	51488	65099	58192	52439	62977	62288	59578
Objetivo 4	127471	127526	116944	116962	123080	127370	121606	127410	127606	111041	126157
Objetivo 3	52035	83488	77471	79618	85592	69340	61996	76589	68623	84344	75071
Objetivo 2	79473	73889	73578	51930	65540	61526	79821	74182	69971	55400	69976
Objetivo 1	71891	47366	56460	77064	58099	72509	64985	59176	70463	69443	66501

Tabla 16. Resultados obtenidos al modelar el comportamiento de un Muy Averso al riesgo.

Monto	248950 000	249975 000	249300 000	249450 000	249300 000	248800 000	248400 000	248325 000	248550 000	248300 000	249150 000	249775 000
Card(FN)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Card(QUK)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Facible	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true	true
Cuantil 4	120744	119509	102941	119540	106251	123808	122354	122231	122146	122724	122425	123598
Cuantil 3	56970	72753	81097	70565	60836	58186	68540	68669	68671	68732	80426	63813
Cuantil 2	74806	71417	71697	63424	69320	71147	49342	49400	49415	49284	67768	73841
Cuantil 1	72815	50962	50796	70578	73319	69956	78205	78429	78434	78216	57726	67417
Peor caso 4	113809	112384	96027	112171	99771	116881	115239	114883	115187	115397	115491	116315
Peor caso 3	52768	68065	76072	65886	56398	53908	64048	64310	64251	64217	75572	59381
Peor caso 2	69647	66372	66467	58621	64384	66479	45097	45021	45242	45157	62593	68676
Peor caso 1	67839	46990	46553	65640	68236	65250	73452	73317	73655	73184	53494	62515
Objetivo 4	124573	123132	106353	127483	109517	127526	126074	126065	125991	126284	126158	123261
Objetivo 3	59070	75075	83530	66095	63059	60464	70900	70934	71050	71046	82941	73044
Objetivo 2	77500	74015	74427	76518	72000	73528	51537	51599	51552	51468	70425	65925
Objetivo 1	75537	52993	52976	70020	75954	72513	80939	81101	81056	80946	60034	73029

247025 000	249250 000	247525 000
0	0	0
0	0	0
true	true	true
120646	123792	120433
73324	84936	80767
60524	52180	53496
67492	63120	59127
113143	116771	113351
68563	79827	75855
55942	47839	49101
62713	58489	54865
124602	127419	124529
75852	87484	83447
63017	54488	55954
70050	65443	61460

Anexo C. Sumario.

C.1 Media aritmética.

Dados los números $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$, la media aritmética ($\bar{o}_j$) es calculada de la siguiente manera:

$$\bar{o} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_\kappa}{\kappa}$$

C.2 Varianza.

Dados los valores $x_1, x_2, \dots, x_\kappa$, generados en la simulación de Montecarlo, la varianza ($S_a^{i^2}$), de la cartera **a**, en el i -ésimo objetivo, es calculada de la siguiente manera:

$$S_a^{i^2} = \frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} (x_i - \bar{o})^2 = \left(\frac{1}{\kappa} \sum_{i=1}^{\kappa} x_i^2 \right) - \bar{o}^2$$

C.3 Diferencia de medias

La diferencia de medias ($\sigma_{a,b}^i$) para varianzas que no pueden suponerse iguales, en el i -ésimo objetivo para las carteras **a** y **b**, es

$$\sigma_{a,b}^i = \sqrt{\frac{S_a^{i^2}}{\kappa} + \frac{S_b^{i^2}}{\kappa}}$$

donde κ representa la cantidad de valores generados en la simulación para las carteras **a** y **b** en el i -ésimo objetivo.