

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA TIERRA Y EL ESPACIO
FACULTAD DE INFORMÁTICA
POSGRADO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN



**“DETERMINACIÓN PRECISA DEL GEOIDE COMBINANDO UN
MODELO GEOPOTENCIAL DE ALTA RESOLUCIÓN CON
MODELOS DIGITALES DEL TERRENO”**

PRESENTA

NORBERTO ALCÁNTAR ELIZONDO

PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

DIRECTORES DE TESIS:

DRA. XÓCHITL GUADALUPE TORRES CARRILLO
DR. RAMÓN VICTORINO GARCÍA LÓPEZ

Culiacán, Sinaloa, julio de 2021.

AGRADECIMIENTOS

Contenido

Agradecimientos	II
Lista de tablas	V
Lista de figuras	VII
Resumen	X
 CAPITULO I INTRODUCCIÓN	 1
1.1 Planteamiento del Problema	3
1.2 Justificación	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Hipótesis	6
 CAPITULO II MARCO TEÓRICO	 7
2.1 Modelos Geopotenciales Globales	7
2.1.1 EGM2008	15
2.1.2 EIGEN_6C4	16
2.1.3 GECON	18
2.1.4 SSG_UGM_1	19
2.2 Modelos Geoidales-gravimétricos regionales	19
2.2.1 Modelo MEXICO97	20
2.2.2 GGM10	21
2.3 Modelos Digitales del Terreno	21
2.3.1 Shuttle Radar Topography Mission (SRTM v4.1)	23
2.3.2 Continuo de Elevaciones MexicanoCEM3.0(INEGI,2017)	28
2.3.3 Aster-GDEM	30
2.4 Efectos Gravitacional de Masas Topográficas	32
2.4.1 Modelos Residuales del Terreno RTM- Prismas Regulares	32
2.4.2 Modelos Residuales del Terreno RTM- Tesseroides	38
2.5 Métodos de evaluación Integral	40
2.5.1 Integración numérica directa	40
2.5.2 Integración numérica esférica con 2-D FFT	41
2.5.3 Integración numérica esférica combinando integración directa y 1-D FFT	44
2.5.4 Errores de convolución cíclica	45
2.5.5 Inversión de integral esférica con el método directo	47
2.5.6 Inversión de integral esférica empleando 1-D FFT	47

2.5.7 Integración numérica esférica con 2-D FFT	49
CAPITULO III METODOLOGÍA	51
CAPITULO IV PRUEBAS Y RESULTADOS	53
4.1 Análisis de precisión de los modelos	53
4.1.1 Comparación de alturas ortométricas BNGPS, SRTM, CEM	53
4.1.2 Comparación entre los Modelos Geopotenciales Globales EGM2008, EIGEN_6C4, GECO, SSG_UGM_1 y el modelo geoidal GGM10	55
4.1.3 Comparativa de las diferencias de alturas geoidales entre BNGPS y los modelos Geopotenciales Globales EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, SSC_UGM_001 y GGM10	59
4.2 Cálculo de la contribución de las masas Topográficas (Área de estudio Hermosillo.)	60
4.3 Cálculo de la contribución de las masas Topográficas (otras Áreas del País.)	74
CAPITULO V DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES	84
CAPITULO VI REFERENCIAS	87

Lista de tablas

TABLA 2.1.1a. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 70's, Fuente: Rapp (1998)	7
TABLA 2.1.1b. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 80's, Fuente: Rapp (1998)	8
TABLA 2.1.1c. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 90's, Fuente: Rapp (1998)	9
Tabla 2.1.2. Modelos Geopotenciales Globales de alto grado, Fuente: International center for global earth models (ICGEM)	15
Tabla 2.1.3. Principales características y diferencias de EIGEN-6C, EIGEN-6C2, EIGEN-6C3 y EIGEN-6C4, Fuente: 5th GOCE User Workshop	18
Tabla 2.3.1. Características principales y precisiones típicas de los datos utilizados para generar MDT (Hengl et al., 2003)	22
Tabla 2.3.2. Desempeño del SRTM en diferentes regiones, Fuente Rodríguez (2005)	26
Tabla 2.3.3. errores medios cuadráticos del SRTM en algunas regiones de la India	27
Tabla 2.3.4. Características del CEM 3.0., Fuente INEGI (2017)	30
Tabla 2.3.5 características del ASTER GDEM fuente (https://lpdaac.usgs.gov/products/astgtmv003/)	32
Tabla 4.1. Estadística de los modelos digitales elevaciones (MDE) SRTM, CEM y ETOPO y BN-INEGI.....	54
Tabla 4.2. Estadística de la diferencia entre los (MDE) SRTM, CEM y ETOPO con respecto a los BN-INEGI	55
Tabla 4.3. Estadística de la Diferencia entre los modelos EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, SSG-UGM-001 y GGM10.	56
Tabla 4.4. Estadística de la Diferencia entre las ondulaciones geoidales de los Bancos de Nivel GPS con respecto a las ondulaciones geoidales de los modelos EGM2008, EIGEN-6C4, GECO SSG-UGM-001 y GGM10.....	60

Tabla 4.5. Estadística correspondiente a la corrección del terreno residual.....	68
Tabla 4.6. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} SRV NAVD29 y del modelo EGM2008 ($N_{EGM2008}$), EIGEN6C4 ($N_{EIGEN6C4}$), GECO (N_{GECO}), XGM2019 ($N_{XGM2019}$), GGM10 (N_{GGM10}).....	73
Tabla 4.7. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} (NAVD29) y de los modelo $N_{EGM2008+CT}$, $N_{EIGEN6C4+CT}$, $N_{GECO+CT}$, $N_{XGM2019+CT}$, $N_{GGM10+CT}$	73
Tabla 4.8. Bancos de Nivel GPS para cada zona de estudio.....	78
Tabla 4.9. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} (SVR NAVD29) y de los modelo $N_{EGM2008}$ y $N_{EIGEN6C4}$, y comparación ya incluyendo la contribución de masas topográficas (CT).....	83

Lista de figuras

Figura 1.1 Altura Elipsoidal, Geoidal y Ortométrica	1
Figura 2.1.2 Esquema del potencial topográfico en el contexto de un modelo del campo de gravedad de alta resolución	13
Figura 2.3.1.a Malla de puntos y modelo utilizando la técnica de malla rectangular (Murai, 1997)	22
Figura 2.3.1.b Malla de puntos y modelo utilizando la técnica Red irregular de triángulos (TIN) (Murai, 1997)	23
Figura 2.3.2. SRTM en el Transportador especial Endeavour	23
Figura 2.3.3. Esquema del SRTM en el Transportador especial Endeavour.....	24
Figura 2.3.4. Disponibilidad de datos con resolución de 3" (~90m).....	25
Figura 2.3.5. Estimación del error Vertical Absoluto al 90% en Norte América, Fuente Rodríguez (2005)	26
Figura 2.3.6. secciones realizadas con el sistema de posicionamientos global Cinemático, Fuente Rodríguez (2005)	27
Figura 2.5.1. Geometría de la reducción RTM	33
Figura 2.5.2. Sectorización en el cálculo del efecto del terreno	36
Figura 2.5.3. Notación usada para la definición del prisma	37
Figura 2.5.4. Geometría del Teseroide (Álvarez, 2007).....	38
Figura 2.5.5. Efecto de borde en la convolución $(\mathbb{g}_N)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ . También se muestra el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{\mathbb{g}}_N)_\ell \# (\tilde{h}_N)_\ell$. (Jekeli, 2009).....	46
Figura 2.5.6. Error de truncamiento y efecto de borde en la convolución $(\mathbb{g}_N)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ , y el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{\mathbb{g}}_{2N}^0)_\ell \# (\tilde{h}_{2N})_\ell$ (Jekeli, 2009).....	46
Figura 3.1 Metodología de obtención de un Geoide Refinado.....	51
Figura 4.1 localización de BN-GPS en el territorio de México.....	53

Figura 4.2a. Modelo Digital del Terreno SRTM con BN-INEGI.....	53
Figura 4.2b. Modelo Digital del Terreno CEM con BN-INEGI.....	54
Figura 4.2c. Modelo Digital del Terreno ETOPO con BN-INEGI	54
Figura. 4.3 Modelo Geopotencial Global EGM2008.....	56
Figura. 4.4. Diferencia entre el EGM2008 y el EIGEN-6C4, con un valor mínimo de -0.886 m y un máximo de 0.580 m ambos localizados en el estado de Michoacán, una media de 0.001m y una desviación estándar de 0.095 m	57
Figura 4.5 Diferencia entre el EGM2008 y el GECO con un valor mínimo de -1.094 m, localizados en el estado de Michoacán y un máximo de 0.690 m ubicado en el estado de Chiapas, una media de 0.001 m y una desviación estándar de 0.087 m.....	57
Figura 4.6. Diferencia entre el EGM2008 y el SSG-UGM-001 con un valor mínimo de -0.635 m, localizados en el estado de Michoacán y un máximo de 0.455 m ubicado en el estado de Chiapas, una media de 0.01 m y una desviación estándar de 0.069 m.....	58
Figura 4.7. Diferencia entre el EGM2008 y el GGM10, con un valor mínimo de -2.938 m, localizados en Baja California y un máximo de 1.414 m ubicado en el estado de Durango, una media de -0.345 m y una desviación estándar de 0.203 m.....	59
Figura 4.7. Ubicación general del área de estudio Hermosillo.....	60
Figura 4.9. Ubicación particular del área de estudio Hermosillo	61
Figura 4.10a. Modelo Earth2014.RET2014.5min.geod.grd.....	61
Figura 4.10b. Modelo Earth2014-RET2014.5min.geod.grd para el área de estudio con valores máximo: 1513.075 m, mínimo: 1.300 m, media: 666.558 m y desviación estándar: 345.829 m.....	62
Figura 4.11. Modelo SRTM 90m., para el área de estudio, con valores máximo: 2407 m, mínimo: 0.5 m, media: 665.343 m y desviación estándar: 369.838 m.....	63
Figura 4.12 Alturas topográficas residuales con valores máximo: 1118.65 m, mínimo: -465.180 m, media: 0.917 m y desviación estándar: 109.453 m...	64
Figura 4.13. Malla sobrepuesta en el modelo de alturas topográficas residuales...	65

Figura 4.14 correcciones del terreno residual.....	66
Figura 4.15. Perfil sobre el paralelo central de la zona de estudio (29° N).....	67
Figura 4.16. Perfil sobre el meridiano central de la zona de estudio (111° W)	67
Figura 4.17. Curvas de nivel de alturas geoidal del modelo EGM2008 ($N_{EGM2008}$), con la siguiente estadística: Máximo: -28.319 m, mínimo: -33.982 m, media: -30.997 m, desviación estándar: 1.194 m.....	70
Figura 4.18. Curvas de nivel de alturas geoidales de modelo GGM10 (N_{GGM10}), con la siguiente estadística: Máximo: -28.560 m, mínimo: -34.430 m, media: -31.437 m, desviación estándar: 1.233 m.....	71
Figura 4.19. Localización de BN-GPS, en el área de estudio, sobre el modelo XGM2019e-2160, con la estadística: Máximo: -28.303 m, mínimo: -33.9220 m, media: -32.4351 m, desviación estándar: 0.6884 m.....	72
Figura 4.20. Área de Estudio Durango.....	74
Figura 4.21. Área de Estudio Mérida.....	75
Figura 4.22. Área de Estudio Toluca.....	76
Figura 4.23. Área de Estudio Monterrey.....	77
Figura 4.24. Contribución de las masas Topográficas para la región de Durango.....	79
Figura 4.25. Contribución de las masas Topográficas para la región de Mérida.....	80
Figura 4.26. Contribución de las masas Topográficas para la región de Toluca.....	81
Figura 4.27. Contribución de las masas Topográficas para la región de Monterrey.....	82

Resumen

La determinación del geoide a través de modelos geopotenciales globales, actualmente tienen una resolución en el rango de 9 km, y una precisión de 30 cm, esto puede mejorarse significativamente incorporando información de las masas topográficas locales, con más alta resolución y suficiente precisión, mediante modelos digitales del terreno. Aplicando técnicas de Realce Espectral y de modelo residual del terreno (RTM) obtenidas de la diferencia entre el un modelo digital de elevación, en nuestro caso el SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) de 3 segundos de arco (versión post-procesada vers.4.1), y una superficie de referencia que sirve como filtro de paso alto, eliminando las características de longitud de onda larga de los datos SRTM, para incorporar al modelo geopotencial (EGM2008) componentes de la señal del geoide asociadas a las frecuencias más altas y no presentes en el modelo (error de omisión). Dichas componentes serán incorporadas debido a la contribución de las masas topográficas a la señal del geoide. La técnica de modelo RTM es capaz de modelar la mayor parte de los errores de omisión de los modelos geopotenciales globales (EGM2008) utilizando para tal efecto datos del modelo digital del terreno SRTM (Shuttle Radar Topography Mission) 3" (90m), con estos datos se calcularon las alturas geoidales de los puntos de interés. Se utilizaron datos independientes de nivelación GPS de la red de INEGI, en los que se obtuvieron las alturas geoidales con el fin de comparar estas alturas con las obtenidas con el modelado RTM y obtener su precisión.

Encontrando que existe una relación directa en la disminución de la dispersión de los datos al aplicar la contribución de las masas topográficas a los modelos Geopotenciales globales y compararlos con los BNGPS. que depende de las condiciones topográficas de la zona de estudio, ya que en zonas planas como el caso de Mérida y Hermosillo el efecto es menor ($\sim 5\text{mm}$) que en las zonas más escarpadas (2-3 cm).

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

Un sistema de referencia vertical tiene asociado una superficie de origen, que por convención es el Nivel Medio del Mar (NMM), también llamada geoide en el ámbito geodésico y otras ciencias de la tierra. La determinación del geoide es uno de los principales propósitos de la geodesia.

El creciente empleo de las técnicas GPS/GNSS, genera la necesidad de transformar las alturas elipsoidales (geométricas) a alturas ortométricas (físicas), para aplicaciones en ingeniería, hidrología, hidrografía, geofísica, geodesia, etc.

Tenemos que la altura ortométrica (H) es la distancia vertical entre un punto sobre la superficie terrestre y el geoide, la altura geoidal (N) es la distancia entre el geoide y el elipsoide de referencia y la altura elipsoidal (h) es la distancia entre un punto sobre la superficie de la tierra y el elipsoide de referencia (Figura 1.1).

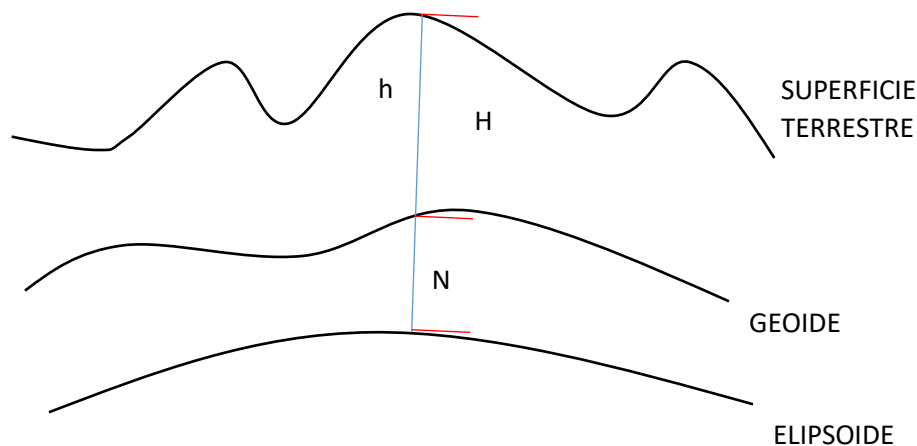


Figura 1.1 Altura Elipsoidal, Geoidal y Ortométrica

Las superficies geopotenciales o de nivel caracterizan el campo de gravedad terrestre en el espacio, existiendo un número infinito de ellas. Una superficie geopotencial de particular importancia para la geodesia y la cartografía es el geoide

con valor de potencial (de referencia) W_0 . Como primera aproximación, el geoide idealmente coincide con una superficie promedio de los mares en reposo.

El método clásico para la determinación del geoide genera resultados muy precisos, pero requieren la obtención de datos gravimétricos, nivelación geométrica, GPS/GNSS, observaciones astronómicas para la determinación de la desviación de la vertical lo que los hacen poco eficientes y costosos.

Una forma de determinarlo, principalmente de manera global, es mediante modelos matemáticos basados en la expansión en serie de esféricos armónicos, estos también son llamados modelos geopotenciales globales (GGM). Dichos modelos pueden generar las alturas del geoide sobre el elipsoide de referencia, dadas la latitud y longitud de un punto (Torge, 1991). Entre los que podemos mencionar SGG_UGM_001 (Pail et al., 2016), GECO (Gilardoni et al., 2016), EIGEN-6C4(Kostelecky et al., 2015), EGM2008 (Pavlis et al., 2008), XGM2019e-2159 (Zingerle et al., 2019).

Los GGM permiten transformar las alturas elipsoidales, que se determinan con relativa facilidad a partir de observaciones de GPS/GNSS, en alturas físicas, asociadas al campo de gravedad de la Tierra, sin la necesidad de realizar, el costoso y lento proceso de nivelación.

Los GGM de alto grado y orden son una solución eficiente, sin embargo, no son capaces de representar los componentes de las altas frecuencias relacionadas con la topografía pues su resolución es limitada, es decir, más allá de la banda espectral de armónicos esféricos de grado mayor a 2,190 (longitudes de onda menores de 18 km), esto se conoce como error de omisión (Hirt, 2010).

Las masas topográficas terrestres son la principal fuente de señales del campo de gravedad de alta frecuencia (Forsberg, 1984) y estas deben ser tratadas apropiadamente en la determinación precisa del geoide (Heiskanen y Moritz, 1967).

Las masas topográficas terrestres pueden cuantificarse a través de Modelos Digitales de Elevaciones (MDE) como los son: el Shuttle Radar Topography Mission

(SRTM) (JLP, 2009), El Continuo de elevaciones mexicano CEM 3.0 (INEGI, 2017) o el ETOPO (Amante y Eakins, 2009).

1.1 Planteamiento del Problema

El empleo de las técnicas GPS/GNSS permite la localización precisa de coordenadas de carácter global, como lo son la latitud y longitud geodésica y la altura geoidal (ϕ, λ, h), de manera muy eficiente, sin embargo, existe el inconveniente de que las alturas geoidales son eminentemente geométricas a diferencia de las alturas ortométricas (H), las cuales están referidas al geoide que es la representación matemática del nivel medio del mar (NMM) y que son las más utilizadas por tener una relación directa con factores físicos como la gravedad terrestre y sirven de base para las aplicaciones cartográficas e ingeniería.

La determinación del geoide debe ser precisa y confiable, para que cumpla con los requerimientos de las diversas aplicaciones en que se utiliza. Existen diversos métodos para determinarlo, que consisten en ubicarlos con respecto al elipsoide de referencia terrestre. Esto es, mediante la determinación de la altura geoidal. Los principales métodos son: por levantamiento gravimétrico, nivelación geométrica que proporciona directamente la altura con respecto al NNM, métodos astrogeodésicos (midiendo la desviación de la vertical), y la nivelación GNSS. Las metodologías comúnmente aplicadas (clásicas) en la ejecución de los métodos mencionados son en generalmente laboriosas, costosas teniendo problemas de eficiencias, aunque no de precisión (gravimetría y nivelación geométrica).

Por otro lado, la altura geoidal se puede obtener a partir de modelos geopotenciales globales (GGM) que representan el campo de gravedad terrestre; se han desarrollado algunos modelos globales como el OSU91 (Rapp et al., 1991), el EGM 96 (Lemoine et al., 1998) y el EGM2008 (Pavlis et al., 2008).

Los modelos geopotenciales actuales tienen una resolución limitada y de baja precisión principalmente en zonas montañosas o de poca cobertura de datos (Hirt-

2010); Por ejemplo, el modelo EGM2008 documentado por Pavlis (Pavlis et al., 2008) es considerado en la actualidad como el de mayor resolución y en algunas áreas el más preciso. Su resolución es de aproximadamente 9 km y con precisiones de 20-50 cm. (Wildermann et al., 2012).

En nuestro país, el Instituto Nacional de Estadística Geografía (INEGI) establece, mantiene y da acceso al sistema de referencia vertical nacional. Asimismo, establece el llamado sistema de referencia NAVD88, como sistema de referencia vertical para los levantamientos topográficos. Dicho sistema presenta problemas de cobertura y de densidad de vértices. Además, consiste en trayectos no conectados que impiden determinar las variaciones del geoide, aunado a esto tenemos el problema de la gran diferencia de época entre las recientes observaciones por satélite y la nivelación de la red vertical de primer orden (a veces que data de los años 60 y 70 del siglo pasado). Un número significativo de puntos se encuentran situados sobre puentes viales y podrían verse afectados por vibraciones continuas del tráfico y falta de trabajos de mantenimiento; otros se encuentran cerca o debajo de la copa de los bosques tropicales de rápido crecimiento. Los cambios de altura causados por el hundimiento también pueden alterar las alturas de los vértices.

1.2 Justificación

La resolución y por ende la precisión de los modelos geopotenciales globales puede mejorarse significativamente si se incorpora información de las masas topográficas locales, con más alta resolución y suficiente precisión (modelos digitales del terreno). Esto se puede efectuar aplicando las técnicas de realce espectral y modelos residuales del terreno, que consisten en incorporar a un modelo geopotencial componentes de la señal del geoide asociadas a las frecuencias más altas y no presentes en el modelo. Dichas componentes serán aportadas por la contribución de las masas topográficas a la señal del geoide.

La necesidad de datos locales y regionales se puede reducir a áreas menores alrededor de puntos de interés (Wildermann et al., 2012). La brecha de resolución entre los modelos potenciales y los modelos digitales del terreno se está reduciendo, por ejemplo, bajando el espaciado de 5' (9 km) para el EGM2008 a 3" (90 m) con el SRTM. La influencia de los datos regionales de gravedad u otros componentes de campo se reduce a una zona de área limitada. Esto significa una ventaja significativa, en particular en el caso de los países en desarrollo, que normalmente tiene una calidad heterogénea de los datos, una mala distribución geográfica o una completa ausencia de fuentes de datos locales, además de existir áreas de difícil acceso donde los geoides gravimétricos muestran baja precisión.

Existe la necesidad de modelos geopotenciales más precisos, que permitan combinarlos con alturas elipsoidales producto del posicionamiento Geodésico GNSS, que permitan obtener alturas ortométricas precisas de forma eficiente.

1.3 Objetivos

Objetivo General:

Determinar el geoide de manera precisa, para obtener alturas geoidales regionales y locales, combinando un modelo geopotencial de alta resolución con un modelo digital de alturas topográficas, logrando precisiones centimétricas.

Objetivos Particulares:

- Establecer un análisis de precisión de los modelos geopotenciales globales en la zona de estudio.
- Emplear modelos digitales del terreno y batimétricos para calcular la contribución al geoide debido a las masas topográficas residuales y totales.

- Combinar modelos geopotenciales globales con modelos digitales del terreno y batimétricos para aumentar la precisión en la solución del geoide.
- Realizar un análisis del comportamiento de este método en diferentes condiciones topográficas y un estudio sobre la distribución de la energía espectral correspondiente.

1.4 Hipótesis:

La determinación del geoide se puede realizar con precisión centimétricas, utilizando un Modelo Geopotencial Global y un Modelo Digital del Terreno.

CAPITULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 Modelos Geopotenciales Globales

Aunque los geodestas han considerado y estudiado la representación del potencial gravitatorio mediante masas puntuales (Sükel, 1981 y 1983). El enfoque en elementos finitos (Meissl, 1981) y splines (Sünkel, 1984 y Jekeli, 2005) estos enfoques, sólo tienen aplicación limitada (especialmente) en la representación del campo gravitacional "estático" (es decir, tiempo-promediado) de la tierra. Mientras que, los armónicos esféricos han prevalecido como la forma estándar utilizada para la representación global del potencial gravitatorio, desde los primeros días de las determinaciones globales hasta el presente. De hecho, el conjunto de coeficientes de una expansión armónica esférica del potencial gravitacional se ha vuelto prácticamente sinónimo de un GGM. Rapp (1998) proporciona una revisión del desarrollo de modelos geopotenciales del siglo XX, que incluye una extensa lista de referencias ver tablas 2.1a, 2.1b y 2.1c.

Tabla 2.1.1a. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 70's, Fuente: Rapp (1998).

Modelo	Tipo*	Fecha	Grado Max.
GEM-1	S	1972	8
GEM-2	C	1972	16
GEM-3	S	1972	12
GEM-4	C	1972	16
WGS-74	C	1974	19
GEM-5	S	1974	12
GEM-6	C	1974	16
GEM-7	S	1976	16
GEM-8	C	1976	25
GEM-9	S	1979	20
GEM-10	C	1979	22
GEM-10B	C	1978	36
GEM-10C	C	1978	180
SAO SEIII	C	1973	18
GRIM1	S	1976	10
GRIM2	C	1978	23
OSU78	C	1978	60
OSU79	C	1979	180

*S=Datos de seguimiento satelital; C=solucion combinada

Tabla 2.1.1b. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 80's, Fuente: Rapp (1998)

Modelo	Tipo*	Fecha	Grado Max.
GEM-L2	S	1982	20
PGS-S4	C	1982	22
GRIM3	C	1983	36
GRIM3B	C	1984	36
GRIM3-L1	C	1985	36
GEM-T1	S	1988	36
GEM-T2	S	1989	36
TEG-1	C	1988	50
PTGF-4/4A	C	1989	50
OSU81	C	1981	180
Hajela	T	1984	250
GPM2	C	1985	200
OSU86C, D	C	1986	250
OSU86E,F	C	1986	360
WGS84	C	1987	180
IFE88E2	t	1989	360
OSU89A/B	C	1989	360

*S=Datos de seguimiento satelital; C=Solución combinada; T= Solo datos terrestres;
t= Modelo a la medida

Tabla 2.1.1c. Modelos Geopotenciales desarrollados en los 90's, Fuente: Rapp (1998)

Modelo	Tipo*	Fecha	Grado Max.
GEM-T3	C	1992	50
GEM-T3S	S	1992	50
TEG-2B	C	1991	50
GRIM4-S1	S	1991	50
GRIM4-C1	C	1991	50
GRIM4-S3	S	1992	50
GRIM4-C3	S	1992	50
JGM-1	C	1994	60
JGM-2	C	1994	70
JGM-3	C	1994	70
DGM-E04	t	1997	70
GRIM4-S4	S	1997	60
GRIM4-C4	C	1997	72
OSU91A	C	1991	360
DGF192A	C	1992	360
OGE12	C	1992	360
GFZ93	C	1993	360
GFZ95A	C	1995	360
GFZ96	C	1996	359
Li/Sideris	t	1994	500
DQM94	t	1996	360
TG-3	C	1997	70
EGM96	C	1997	360

*S=Datos de seguimiento satelital; C=solucion combinada; t= Modelo a la medida

Un Modelo Geopotencial Global (GGM) es una función matemática que describe el campo de gravedad de la Tierra en el espacio tridimensional, (Barthelmes, 2014), aunque muchos de los conceptos que discutidos se aplican igualmente a otros planetas y cuerpos celestes. Consisten en un conjunto de valores numéricos para ciertos parámetros, las estadísticas de los errores asociados con estos valores (tal como se expresan, por ejemplo, en su matriz de covarianza de errores), y una colección de expresiones matemáticas, valores numéricos y algoritmos que permiten al usuario realizar:

1. Síntesis, es decir, cálculo de los valores numéricos de cantidades relacionadas con el potencial gravitacional (funcionales del campo), dada la posición del punto de evaluación.
2. Propagación de errores, es decir, el cálculo de los errores esperados de los funcionales calculados, asimilado por la propagación de los errores de los parámetros que definen la GGM (Sansò y Sideris, 2013).

La determinación del campo de gravedad global de la tierra es una de las tareas principales de la geodesia: sirve como referencia para la geodesia en sí misma y proporciona información importante sobre la tierra, su interior y los océanos para todas las geociencias.

Un GGM debe ser capaz de soportar tales cálculos en puntos arbitrarios, situados en o sobre la superficie de la Tierra, de una manera rigurosa y eficiente. Además, una GGM debe cumplir ciertas condiciones derivadas de la física subyacente. Es decir, debería representar una función escalar de posición que es armónica fuera de las masas atrayentes y desaparece en el infinito como el recíproco de la distancia entre el punto atraído y el elemento de atracción de masa. Además, el GGM debe permitir el cálculo de cualquier funcional del campo de una manera que garantice la auto-coherencia. Esto significa que el modelo debe preservar las relaciones (diferencial o integral) entre los diversos funcionales. Un GGM tiene numerosos usos, tanto operacionales como científicos (Tscherning, 1983).

Los GGM son recursos fundamentales y son necesarios, por ejemplo, para establecer el datum vertical de los sistemas de referencia globales y para realizar

una unificación de alturas globales (Bolkas, et al., 2012) explorar la estructura interior y estudiar la evolución geológica de la Tierra (Wieczorek, 2007). También en muchas otras disciplinas el conocimiento preciso del campo de gravedad de la Tierra es de gran importancia: en la aeronáutica/astronáutica se utilizan modelos de gravedad para simular fuerzas perturbadoras que actúan sobre vehículos (espaciales) y predecir órbitas (Chao, 2005); la navegación inercial necesita información precisa sobre las deflexiones de la vertical que pueden derivarse de los modelos de campo gravitatorio (Wang et al., 2016); la exploración de minerales o combustibles fósiles y los modelos geofísicos se basan en la inversión de la gravedad (Bosch y McGaughey, 2001); alturas ortométricas se miden con respecto al geoide, que es una superficie equipotencial del campo gravitatorio y son relevantes para un amplio campo de aplicaciones y ciencias, como la construcción o el modelado hidrológico; la fusión del hielo en glaciares o en regiones polares y el agotamiento de las aguas subterráneas pueden observarse mediante variaciones espaciales-temporales de la gravedad (Tapley et al., 2004); o en oceanografía donde la circulación geostrófica del océano se deriva de la topografía dinámica del océano que se estudia por la diferencia de las alturas medidas por la altimetría satelital y las alturas del geoide de un modelo de campo de gravedad estática (Bosch y Savcenko, 2010).

Hoy en día, las observaciones de la gravedad por satélite, aérea y terrestre disponibles a escala global son suficientes en términos de resolución y calidad para describir el potencial gravitatorio de la tierra en modelos hasta escalas no menores de 10 km, generalmente. La realidad es que algunas áreas remotas (principalmente en Asia, África y América del Sur) carecen de observaciones suficientemente densas o las inexactitudes de las observaciones sobre esas áreas realmente no apoyan una resolución tan alta (Pavlis et al., 2012 y 2013). Sin embargo, en las ciencias ambientales globales, impulsadas principalmente por el compromiso político de comprender fenómenos globales como el cambio climático y los datos satelitales de alta resolución disponibles (distintos de la gravimetría espacial), existe una demanda de modelos de gravedad de escala más fina.

El potencial gravitacional externo de la tierra, V , en un punto P definido por su distancia geocéntrica r_P , co-latitud geocéntrica θ_P y longitud λ_P , puede ser expresada como:

$$V(r_P, \theta_P, \lambda_P) = \frac{GM}{r_P} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r_P} \right)^n \sum_{m=-n}^n C_{nm} Y_{nm}(\theta_P, \lambda_P) \right] \quad (2.1.1)$$

GM es la constante gravitacional geocéntrica (el producto de la constante gravitacional universal, G , multiplicada por la masa de la tierra, incluida su atmósfera, M y a es un factor de escala asociado con los coeficientes armónicos esféricos, completamente normalizados y sin unidades, C_{nm} (a es, por lo general, numéricamente igual al radio ecuatorial de un elipsoide medio adoptado de la Tierra. Las funciones armónicas esféricas de la superficie se definen como (Heiskanen y Moritz ,1967):

$$Y_{nm}(\theta_P, \lambda_P) = \bar{P}_{n|m|}(\cos \theta_P) \cdot \{\cos m\lambda_P\} \quad \text{si } m \geq 0 \quad (2.1.2)$$

y

$$Y_{nm}(\theta_P, \lambda_P) = \bar{P}_{n|m|}(\cos \theta_P) \cdot \{\sin |m|\lambda_P\} \quad \text{si } m < 0$$

$\bar{P}_{n|m|}(\cos \theta_P)$ es la función de Legendre asociada completamente normalizada del primer tipo, de grado n y orden $|m|$. En la práctica, la suma de grados se trunca a un grado finito de N , que depende del poder de resolución de los datos disponibles. A su vez, N define (aproximadamente) la resolución de la GGM. El objetivo de la modelización gravitacional global de alta resolución es estimar, con la mayor precisión posible, los coeficientes C_{nm} , a través de la combinación óptima de información gravitacional de una fuente de datos variada. Igualmente importante es

la estimación de error para los valores de C_{nm} . Los valores estimados para C_{nm} pueden utilizarse para calcular funcionales del campo (por ejemplo, ondulaciones geoidales, anomalías de gravedad, etc.), mientras que sus errores asociados (y la correlación de errores cuando esté disponible) pueden ser propagado para producir los errores de la (s) funcional (es) derivada (s).

El objetivo del modelado gravitacional global de alta resolución es estimar, con la mayor exactitud posible, los coeficientes C_{nm} , a través de la combinación óptima de información gravitacional de una variedad de fuentes de datos. De igual importancia es la estimación de los errores para C_{nm} . Los valores estimados de C_{nm} pueden usarse entonces para calcular funcionales del campo (por ejemplo, ondulaciones de geoide, anomalías de gravedad, etc.) mientras que sus errores asociados (y correlación de error cuando están disponibles) pueden propagarse para producir los errores de los funcionales derivados).

Los Modelos Geopotenciales Globales (GGM) existentes, se han desarrollado utilizando armónicos esféricos como base de su representación, permiten el cálculo de cualquier funcional del campo de gravedad (ondulaciones geoidales, anomalías de gravedad, deflexiones de los gradientes verticales de segundo orden del potencial) en cualquier lugar fuera de las masas atrayentes. Estos valores calculados están, por supuesto, sujetos a errores de comisión y omisión (Sansò y Sideris, 2013).

Los Modelos Geopotenciales Globales pueden obtenerse solo de observaciones satelitales o combinando datos satelitales y terrestres. Un medio para aumentar la resolución de los modelos de campo gravitatorio es extender los modelos basados en la observación con el modelado directo de la gravedad (*Forward*). En resumen, el modelado directo (*Forward*) describe el proceso de calcular los valores de la atracción gravitacional basados en un modelo de masa dado de la Tierra. Por lo tanto, los modelos directos *forward* (sólo) sirven como estimaciones del campo gravitatorio real, pero su aplicación puede ser útil si se considera cuidadosamente. Los modelos modernos de elevación digital basados en satélites proporcionan un conocimiento detallado de la geometría de las masas superiores de la tierra hasta

escalas de decenas a cientos de metros. Debido a la atenuación de la fuerza gravitatoria con la distancia, son exactamente aquellas masas superiores las que causan la mayor parte de las variaciones de la gravedad a corta escala en la superficie de la tierra. Con esto en mente, la información gravitacional oculta en los modelos digitales de elevación digital es de importancia clave para el modelado de gravedad de alta resolución y es importante que sea develada.

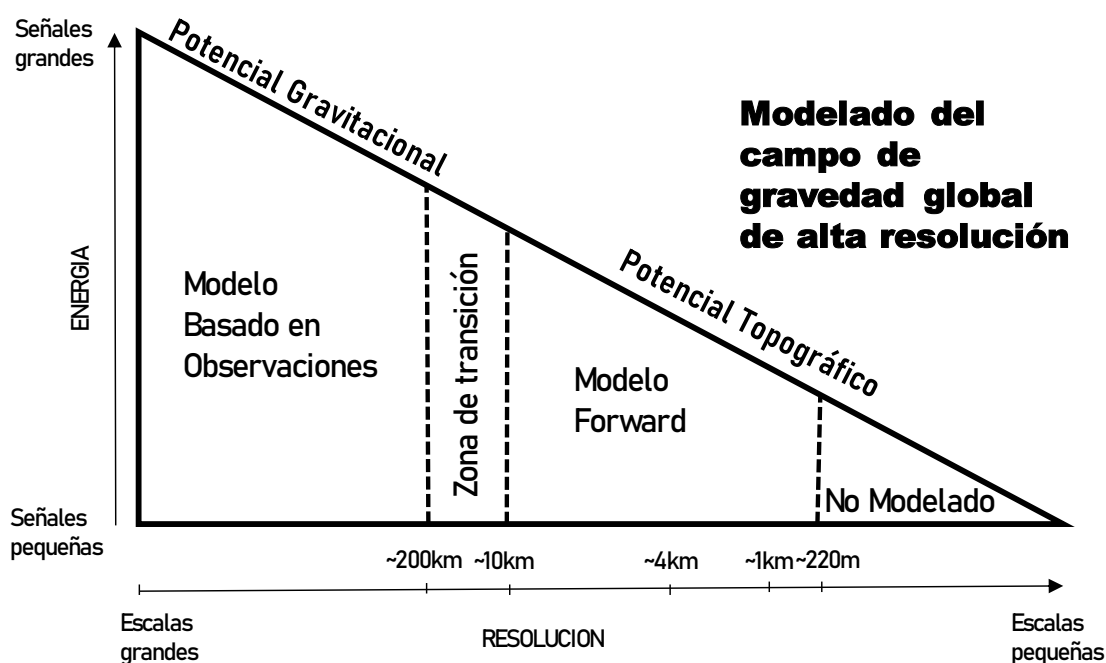


Figura 2.1.2 Esquema del potencial topográfico en el contexto de un modelo del campo de gravedad de alta resolución.

El desarrollo de una GGM de alta resolución es una tarea que implica la combinación óptima de una variedad de datos (satélite, terrestre, marino, aéreo) Figura 2.1.2. Esto se debe a que un solo tipo de datos con cobertura global y con una precisión uniforme y alta sensibilidad espectral aún no existe. Los datos mencionados son de carácter complementario (en términos de sensibilidad espectral y/o de cobertura geográfica), de forma que su combinación óptima permite que una GGM satisfaga una gran variedad de aplicaciones.

Los modelos solo satelitales se calculan considerando los datos de rastreo satelital y las observaciones espaciales de las misiones de gravedad: CHAMP (Challenging Mini-Satellite Payload for Geo-scientific Research and Applications program), (Reigber et al., 1999), GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment) (Grace 1998) y GOCE (Gravity field and steady-state Ocean Circulation Explorer) GOCE (ESA SP1233 1999). Estas son independientes de las observaciones de la gravedad en el terreno, por lo tanto, no contienen sesgos relacionados con inconsistencias de datos de altura (Gerlach y Rummel, 2013). Además, se basan en observaciones que cubren casi uniformemente toda la Tierra, aparte de posibles brechas polares (Sneeuw y Van Gelderen, 1997). Por otro lado, debido a la altitud del satélite, los modelos que solo utilizan información de satélites no pueden alcanzar una alta resolución. Hasta ahora, hay disponible un amplio conjunto de modelos globales solo para satélites (p. ej. ICGEM <http://icgem.gfz-potsdam.de/ICGEM>).

Mientras que, los modelos de gravedad global combinados tienen, en cambio, una resolución muy alta, fusionando la información de la gravedad del satélite con la terrestre. Los datos satelitales proporcionan los términos de baja frecuencia, mientras que los datos de gravedad de la superficie de altimetría/gravimetría permiten describir las frecuencias más altas del desarrollo armónico del potencial gravitatorio. El resultado del desarrollo de un GGM es un modelo que puede usarse como estándar para numerosas aplicaciones, durante un período de tiempo considerable.

Una forma de desarrollar modelos de tan alto grado implica la formación de una malla regular de valores promediados por área de algunos funcionales del campo que cubre completamente el globo. Los modelos de armónicos esféricos de muy alto grado y orden se desarrollan a partir del análisis de dichas redes de anomalías globales, utilizando técnicas de análisis de armónicos eficientes como las presentadas por Colombo (1981). Wenzel (1998) reporta que tales expansiones se completaron hasta el grado y orden 1,800 mientras que Pavlis (2005) reportan sobre el desarrollo y la evaluación del modelo gravitacional preliminar PGM2004A,

extendiéndose hasta el grado y el orden 2,160, e identificaron una perspectiva relacionada con el desarrollo que se requería para su posterior mejora.

La precisión y la resolución de los datos que se utilizaron en su desarrollo dictan la precisión y la resolución de un GGM. La geopolítica y/o los derechos de propiedad impiden muchas veces que la persona o el equipo que desarrolla una GGM puedan tener acceso a todos los datos existentes.

Los modelos Geopotenciales globales combinados con mayor resolución se mencionan en la tabla 2.1.2:

Modelo	Año	Grado/Orden	Datos	Referencias
SGG-UGM-1	2018	2159	EGM2008, S(GOCE)	Wei et al., 2018
GECO	2015	2190	EGM2008, S(GOCE)	Gilardoni et al., 2016
EIGEN-6C4	2014	2190	A, G, S(GOCE), S(GRACE), S(LEGEOS)	Förste et al., 2014
EGM2008	2008	2190	A, G, S(GRACE)	Pavlis et al., 2008

Tabla 2.1.2. Modelos Geopotenciales Globales de alto grado, Fuente: International centre for global earth models (ICGEM).

En el siguiente apartado se dará una breve reseña de los modelos del geoide existentes con mayor relevancia para el desarrollo de este trabajo

2.1.1 EGM2008 (Earth Gravitational Model 2008)

Fue publicado por la Agencia Nacional de Inteligencia-Geoespacial (NGA). El EGM2008 (Earth Gravitational Model) es un modelo armónico esférico del potencial gravitacional de la Tierra, desarrollado por una combinación de mínimos cuadrados de:

- Modelo gravitacional ITG-GRACE03S (Mayer-Gürr, 2007) y su matriz de covarianza de errores asociada,
- Con la información gravitacional obtenida de un conjunto global de Anomalías de gravedad de aire libre de un área media definidas en una malla equiangular de 5 minutos de arco. Esta malla se formó mediante la fusión de datos terrestres, derivados de misiones satelitales altimétricas sobre los océanos y campañas gravimétricas aerotransportadas (Pavlis et al., 2012). En áreas donde solo se disponía de datos de gravedad de resolución más baja, su contenido espectral se complementó con información gravitacional implícita en la topografía.

El EGM2008 está completo hasta el grado y orden 2160, y contiene coeficientes adicionales hasta el grado 2190 y orden 2160. En las áreas cubiertas con datos de alta calidad de gravedad, las discrepancias entre las ondulaciones geoidales EGM2008 y los valores de nivelación/GPS independientes son del orden de 5 a 10 cm. Estos resultados indican que el EGM2008 funciona de manera comparable con los modelos de geoides regionales detallados contemporáneos. EGM2008 se desempeña igualmente bien con otros modelos gravitacionales basados en GRACE en cálculos de órbita. Sobre EGM96, EGM2008 representa una mejora en la resolución de un factor de seis, y en la precisión de factores de tres a seis, dependiendo de la cantidad gravitacional y área geográfica.

2.1.2 EIGEN_6C4

El EIGEN-6C4 (European Improved Gravity model of the Earth by New techniques) es un modelo estático de campo de gravedad global combinado hasta el grado y orden 2190 (Förste et al., 2014).

Ha sido elaborado conjuntamente por GFZ (Geo Forschungs Zentrum) de Potsdam y GRGS (Groupe Recherches Geodesie Spatiale) de Toulouse y contiene los siguientes datos satelitales y terrestres:

- LAGEOS (LAsEr GEODynamics Satellite)-1/2 (grados 2 a 30): datos del SLR (Satellite Laser Ranging) 1985-2010
- GRACE, GNSS-SST y Datos de medición de rango de la banda K, procesando de acuerdo con RL03 GRGS (grados 2 a 130): diez años 2003 – 2012
- GOCE (Gravity and Ocean Circulation Experiment misión); (Rummel et al., 2011), Datos de Satellite Gravity Gradiometry (SGG), procesados por componentes del gradiente de la gravedad Txx, Tyy, Tzz y Txz para el método de acceso directo, incluidos los siguientes intervalos de tiempo: 837 días de los tiempos nominales de misión 20091101-20120801, 422 días de la fase de orbitas bajas entre 20120801-20131020. Estos datos de GOCE al igual que los datos de LAGEOS y GRACE son los mismos que se utilizan para la quinta versión del modelo de campo de gravedad únicamente satelital de la ESA a través del enfoque directo GO_CONS_GCF_2_DIR_R5. Para el EIGEN-6C4, los huecos polares de GOCE se estabilizaron mediante la Regularización de capa Esférica utilizando el modelo de campo de gravedad combinado EIGEN-6C3stat
- Datos terrestres (grado máximo 370): datos de geoides oceánicos DTU12 y una malla de alturas geoidales del EGM2008 para los continentes.

El análisis de los diferentes conjuntos de datos satelitales y de superficie se realizó mediante una combinación limitada de bandas de ecuaciones normales (hasta el máximo grado / orden 370), que se generan a partir de ecuaciones de observación para los coeficientes armónicos esféricos (Shako et al., 2014). La solución de resultado de grado/orden 370 se ha extendido al grado/orden 2190 mediante una solución diagonal de bloques utilizando la cuadrícula de datos de anomalías de gravedad global DTU10. En la tabla 2.1.3 se muestran las principales características del EIGEN-6C4 y las diferencias con respecto a los desarrollos previos EIGEN-6C, EIGEN-6C2 y EIGEN-6C3stat.

	EIGEN-6C (2011)	EIGEN-6C2 (2012)	EIGEN-6C3stat (2013)	EIGEN-6C4 (2014)
Max g/o	1420	1949	1949	2190
LAGEOS	GRGS, 200301-200906	GRGS, 1985-2010	GRGS, 1985-2010	GRGS, 1985-2010
GRACE	GRGS RL02 200301-200906	GRGS RL02 200303-201012	GRGS RL02 (d 2-100) 200302-201101 + GFZ RL05 (d 55-180) 200310-201209	GRGS RL03 10 Años 200303-201012
Max g/o GRACE	130	130	180	130
GOCE SGG data	200 días Txx Tyy Tzz fuera de 20091101-20100630	350 días Txx Tyy Tzz fuera de 20091101- 20110419	Altitud nominal de la órbita 837 días Txx Tyy Tzz fuera de 20091101-20120801 + Fase de órbita baja 225 días Txx Tyy Tzz fuera de 20120901- 20130524	Altitud nominal de la órbita 837 días Txx Tyy Tzz fuera de 20091101- 20120801 + Fase de órbita baja 422 días Txx Tyy Tzz fuera de 20120801-20131020
Max g/o GOCE	210	210	235	235
Terrestrial data	DTU Anomalías de gravedad global	DTU Anomalías de gravedad global DTU Geoide oceánico + EGM2008 malla del geoide	DTU Anomalías de gravedad global DTU Geoide oceánico + EGM2008 malla del geoide	DTU Anomalías de gravedad global DTU Geoide oceánico + EGM2008 malla del geoide

Tabla 2.1.3.19 Principales características y diferencias de EIGEN-6C, EIGEN-6C2, EIGEN-6C3 y EIGEN-6C4, Fuente: 5th GOCE User Workshop, Paris, 25. –28.11.2014, Ch. Förste1.

2.1.3 GEOCO

El Modelo Geopotencial Global GEOCO surge como la fusión del modelo EGM2008 y el modelo GOCE que utiliza datos obtenidos solo por satélite, principalmente el modelo global GOCE-TIM-R5. GOCE contiene más información que el EGM2008 en las áreas donde no se disponía de datos de la gravedad del terreno en el momento del cálculo de EGM2008, como África, América del Sur y la Antártida. Hablando espectralmente, GOCE es más preciso que EGM2008 en las frecuencias medias, por ejemplo, hasta el grado 200 (Gilardoni et al., 2016). Además, el modelo GOCE, basado únicamente en observaciones espaciales, no se ve afectado por sesgos locales e inconsistencias causadas por la integración de diferentes fuentes de datos.

2.1.4 SSG_UGM_1

Liang (2018) determinó un modelo de campo de gravedad de grado y orden ultraalto, mediante la combinación de datos de observación satelital y datos de anomalía de gravedad.

En este modelo, conocido como SGG-UGM-1, se utilizaron la anomalía de gravedad derivada de EGM2008 y datos de observación de GOCE, es un modelo global de gravedad completo de grado y orden 2159. El sistema de ecuación normal completamente ocupado hasta grado y orden 220 formado por los datos del satélite GOCE y el sistema de ecuaciones normales de la diagonal de bloque hasta el grado y orden 2159 formado por los datos de anomalía de gravedad EGM2008 se utilizan para la combinación.

Se compararon los modelos SGG-UGM -1, EGM2008 y EIGEN-6C4 en el dominio de la frecuencia, obteniendo que SGG-UGM-1 está cerca de los modelos de referencia y que los coeficientes son más bajos que el grado 220 de SGG-UGM 1 es más preciso que el EGM2008. Los modelos también están validados por los datos de nivelación del GPS en China y América. Los resultados muestran que en China el nivel de precisión del geoide derivado de SGG-UGM-1 es equivalente al EIGEN-6C4, y es mejor que el EGM2008, mientras que en América son casi iguales.

2.2 Modelos gravimétricos locales, regionales y geoidales

La exactitud y el poder de resolución de los datos que se utilizaron en su desarrollo dictan la precisión y resolución de un GGM. Los problemas geopolíticos y/o propiedad muchas veces impiden que el individuo o el equipo que desarrolla una GGM tengan acceso a todos los datos existentes. Sin embargo, en algunas regiones, algunos individuos pueden disponer de datos de mayor precisión y/o poder de resolución (conjuntos geográficamente densos de datos de gravedad y elevación) o pueden estar disponibles después de que se haya desarrollado el GGM de referencia. Estos datos pueden usarse en combinación con los GGM existentes

para mejorar la precisión y/o resolución de la determinación de una o más funcionales específicos del campo, sobre la región donde los datos detallados estuvieron disponibles. Esta "densificación" local o regional puede producir un producto o modelo gravimétrico local o regional específico.

Dicha densificación ha estado entre las actividades geodésicas más frecuentes durante muchas décadas y representa la forma geodésica de crear un modelo gravitacional de resolución múltiple que se asemeja a un "colcha": es decir, se cosen parches de detalle fino (los Modelos Gravimétricos Locales) en la parte superior de una tela más o menos homogénea (la referencia GGM). Los geodestas no tienen necesariamente que reevaluar la referencia del GGM cada vez que un nuevo conjunto de datos (un nuevo parche) se vuelve disponible localmente. Dicha reevaluación se justifica sobre todo si se dispone de nuevos datos satelitales mejorados, que abarcan un período suficientemente largo y/o si se dispone de nuevos datos del terreno (de mayor precisión y/o resolución) en zonas de gran extensión geográfica.

2.2.1 Modelo MEXICO97

Fue desarrollado por el Servicio Geodésico Nacional de Estados Unidos (NGS) en colaboración con el INEGI (NGS, 2001) que proporcionó los datos gravimétricos del territorio de México. Cuenta con una resolución espacial de 2'x2' minutos (~ 2x2km) para el territorio nacional, cubre la región 14°-33°N, 119°-86°W, en su determinación se usaron más de un millón de datos de gravedad terrestre y marina (referidos a la Fórmula Internacional de la Gravedad de 1971; IGSN71) junto con datos de gravedad derivados de la altimetría satelital y del modelo gravimétrico global EGM96. Para su cálculo se utilizó el método de Eliminar-Calcular-Restituir en combinación con la técnica de integración de Stokes a través de la Transformada Rápida de Fourier (FFT). Las alturas geoidales están referidas al Sistema Geodésico de Referencia de 1980 (GRS-80) centrado en el origen del Marco de

Referencia Internacional Terrestre de 1994 (ITRF94) época 1996.0 (considerando la variación de las coordenadas con el tiempo). Sin embargo, las latitudes y las longitudes son prácticamente iguales a las del ITRF92 época 1988.0 (datum horizontal oficial de México). Aunque se reporta con una precisión por abajo del metro, esta suele alcanzar hasta 3m en áreas con información gravimétrica insuficiente. Los rangos de elevación van desde -47.6 metros en el pacifico a 6.8 en Honduras.

2.2.2 GGM10.

El geoide gravimétrico para México Versión 2010, GGM10; (https://www.inegi.org.mx/temas/rqnp_gravimetrica/) elaborado por el INEGI. Es un modelo digital de alturas geoidales asociado al marco de referencia oficial vigente (ITRF08, época 2010.0), sus alturas representan la separación existente entre el geoide y el elipsoide geodésico de referencia GRS80. Los datos geodésicos con los que se generó son diversos, destacan los valores de aceleración de la gravedad medidos sobre la topografía y los modelos digitales de elevación del terreno. La técnica de cálculo utilizada es llamada Stokes-Helmert. El GGM10 tienen asociado un error medio cuadrático de estimado de 20 cm, sin embargo, esta cifra puede variar regionalmente.

2.3 Modelos digitales del terreno

Se requiere un Modelos Digitales del Terreno (MDT) que se adapte bien a la topografía de la Tierra para la determinación de un modelo de geoide preciso, ya que las masas topográficas deben condensarse en el geoide para satisfacer el problema del valor límite geodésico (GBVP). Se pueden usar varias tecnologías para obtener datos de elevación para el desarrollo de DTM, como sondeos

terrestres, captura de datos fotogramétricos en el aire, escaneo láser aéreo e imágenes satelitales basadas en radar (Hengl et al., 2003). La tabla 2.3.1 indica las características y la precisión de estas fuentes de datos.

Métodos de Colección	Características Principales	Ejemplos	Precisión típica
Levantamiento del Terreno	Alta precisión, Densidad de muestreo pequeña, Alto costo	Sistema DGPS	±1m
		Taquimetría	0.001 m – 1m
		Nivelación	~0.001 m
Imágenes Estereoscópicas	Densidad de muestreo Alta, Semi/Completamente Automatizada, Problemas con la vegetación	Fotografía Aérea,	0.1 m – 1m
		Imágenes Satelitales (SPOT y ASTER)	10m – 20m
Escáner Laser	Es posible colocarlo en aviones con navegación GPS, los datos crudos necesitan filtrarse y remuestrearse antes de utilizarse, puede penetrar el follaje de los árboles y recuperar las superficies de la vegetación y del terreno	Escáner Laser Aerotransportado (LIDAR)	0.2 m – 1m
Imágenes de Radar	Bajo costo por KM ² , Requiere puntos de control en el terreno, Procesamiento complejo	Radar de apertura sintética aerotransportado (inSAR) y espacial (ERS y SRTM)	0.5 m – 2m 10 m – 25 m

Tabla 2.3.1 Características principales y precisiones típicas de los datos utilizados para generar MDT (Hengl et al., 2003)

Los DTM se distribuyen comúnmente utilizando dos estructuras: cuadrícula rectangular (Figura 2.3.1a), donde cada píxel lleva la información de elevación, y Red Irregular Triangulada (TIN) (Figura 2.4.1b), que se basa en triángulos con sus vértices en puntos de muestra de elevación (Hengl et al., 2003).

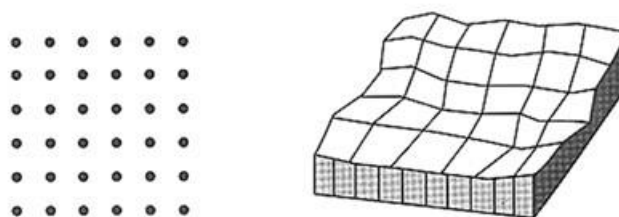


Figura 2.3.1.a Malla de puntos y modelo utilizando la técnica de malla rectangular (Murai, 1997)

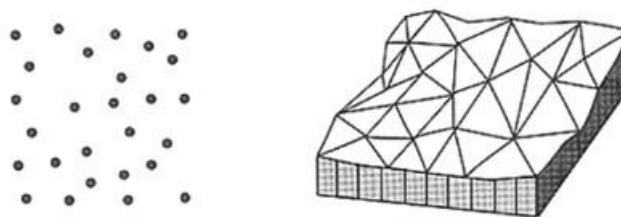


Figura 2.3.1.b Malla de puntos y modelo utilizando la técnica Red irregular de triángulos (TIN)
(Murai, 1997)

Hay varios DTM disponibles en todo el mundo. Los últimos modelos se describen a continuación en las subsecciones siguientes.

2.3.1 Shuttle Radar Topography Mission (SRTM v4.1)

La Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) fue un proyecto conjunto de la NASA, las agencias espaciales alemanas e italianas y la Agencia Nacional de Inteligencia Geoespacial. Fue administrado por el Laboratorio de Propulsión a Chorro de la NASA en Pasadena, California, para la Dirección de Misión Científica de la NASA, Washington, DC. Los datos topográficos de 30 y 90 metros fueron distribuidos públicamente por el Servicio Geológico de los EE. UU. Estos datos están disponibles a través de una interfaz fácil de usar en el sitio web Earth Explorer de USGS (JLP, 2009).

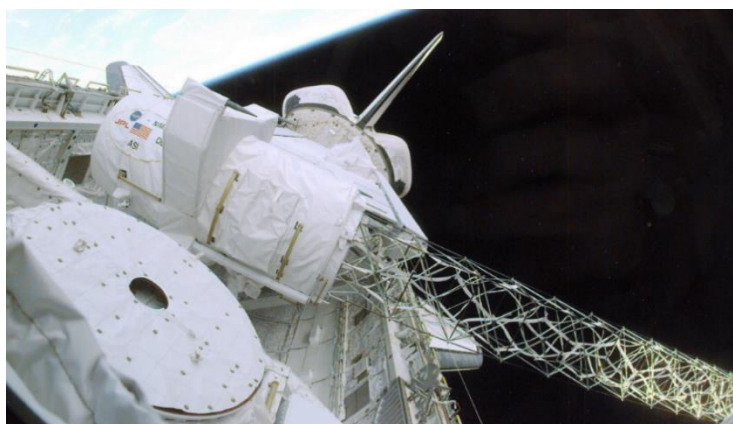


Figura 2.3.2. SRTM en el Transportador especial Endeavour

La Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) (Farr y Kobrick, 2001) viajó a bordo del transbordador espacial Endeavour en febrero de 2000 (figura 2.3.2 y 2.3.3), recolectaron datos de interferometría de radar sobre 80% de la masa terrestre entre las latitudes 56° sur y 60° norte de la línea ecuatorial. Durante la misión de 11 días, SRTM usó un radar de imágenes para mapear la superficie de la Tierra numerosas veces desde diferentes perspectivas. La combinación de estos datos de radar se procesó en el JPL para producir un mapa topográfico global creado al hacer rebotar señales de radar fuera de la superficie de la Tierra y de vuelta al transbordador, el objetivo inicial, en precisión horizontal y vertical, era alrededor de 20 m y 16 m (error lineal al 90% de confianza), respectivamente (Jordan et al., 1996; Slater et al., 2003)

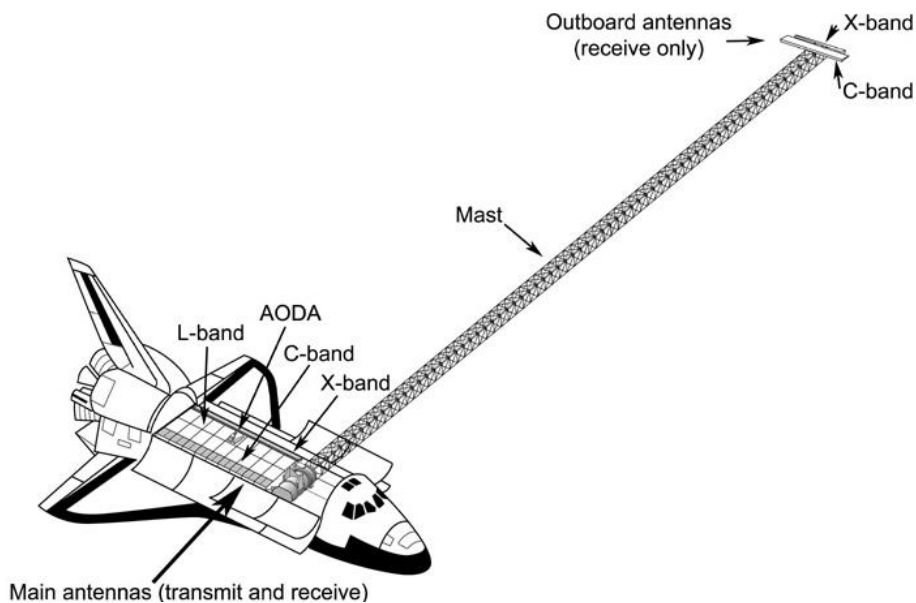


Figura 2.3.3. Esquema del SRTM en el Transportador especial Endeavour.

El 23 de septiembre de 2014, la Casa Blanca anunció que los datos topográficos de más alta resolución generados por la Misión de Radar Topográfico de Radar (SRTM) de la NASA en 2000 debían lanzarse a nivel mundial a fines de 2015. El anuncio fue hecho en los Jefes de Estado de las Naciones Unidas.

Anteriormente, los datos de SRTM para regiones fuera de los Estados Unidos se tomaron muestras para su lanzamiento al público a 3 segundos de arco, aproximadamente 90 metros (Figura 2.3.4). Los nuevos datos se han lanzado con

un muestreo de 1 arco de segundo o aproximadamente 30 metros que revela la resolución completa de las mediciones originales.

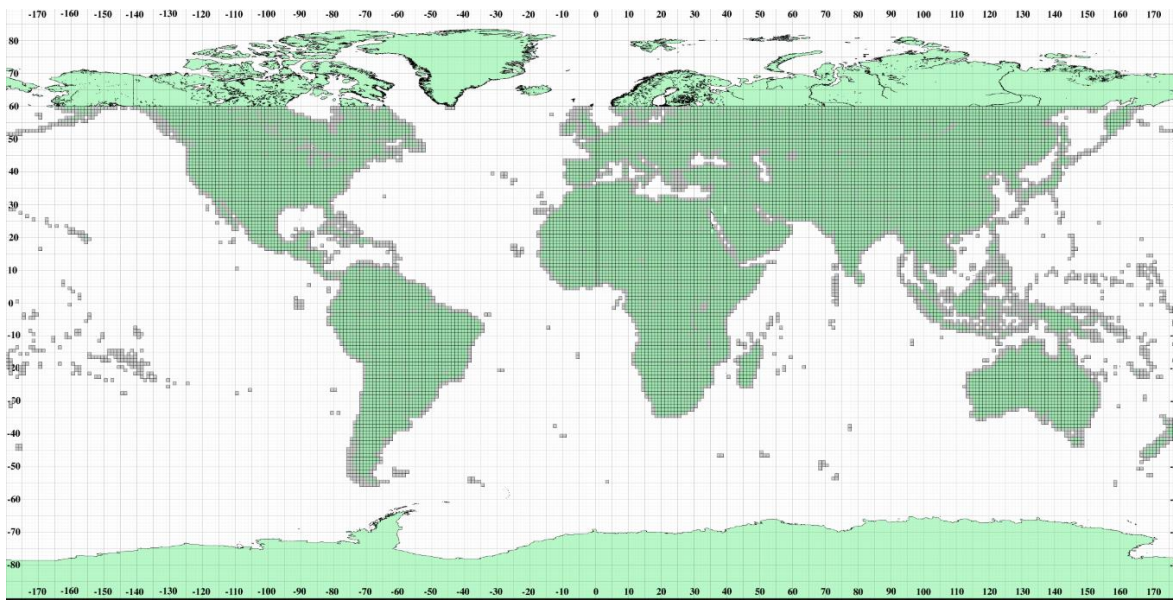


Figura 2.3.4. Disponibilidad de datos con resolución de 3" (~90m)

Los datos están disponibles para su descarga de [USGS EROS Data Center](https://eros.data.usgs.gov/) .

Como parte de la misión SRTM, NIMA / NGA y la NASA llevaron a cabo una extensa campaña mundial para recopilar datos sobre el terreno que permitieran la validación global de este conjunto de datos único. Este informe presenta una descripción detallada de cómo se obtuvieron los resultados, también presenta una caracterización detallada de los diferentes componentes del error, sus magnitudes y estructura espacial.

En la tabla 2.3.2 que se muestra un resumen del desempeño SRTM observado al compararlo con datos terrestres disponibles. Todas las cantidades representan 90% de errores en metros.

	África (m)	Australia (m)	Eurasia (m)	Islandia (m)	N. América (m)	S. América (m)
Error Absoluto en Geolocalización	11.9	7.2	8.8	9.0	12.6	9.0
Error Absoluto en Altura	5.6	6.0	6.2	8.0	9.0	6.2
Error Relativo en Altura	9.8	4.7	8.7	6.2	7.0	5.5
Error de Altura de Longitud de Onda Larga	3.1	6.0	2.6	3.7	4.0	4.9

Tabla 2.3.2 Desempeño del SRTM en diferentes regiones, Fuente Rodríguez (2005)

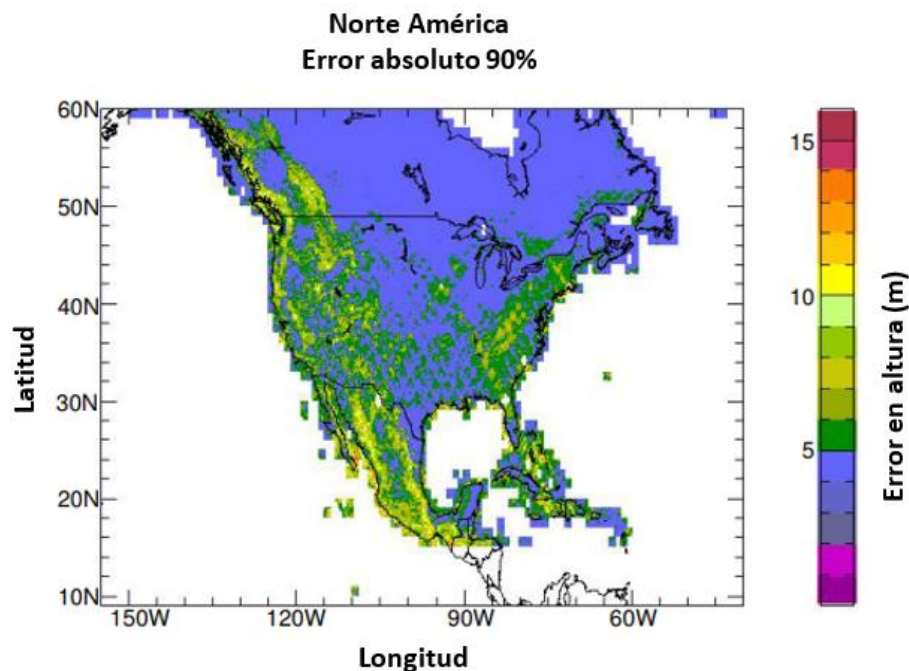


Figura 2.3.5. Estimación del error Vertical Absoluto al 90% en Norte América, Fuente Rodríguez (2005)

A partir de analizar los datos de la tabla 2.3.2 se observa un error absoluto en altura de 9 m para Norteamérica (figura 2.3.5), Sin embargo, muchas regiones de Asia central, Oriente Medio, subcontinente indio, regiones norte y este de África, Sudamérica y México están desprovistos de puntos de control en el terreno para evaluar de manera adecuada estas regiones, para el caso de México se puede observar en la Figura 2.3.6 como las secciones realizadas con el sistema de posicionamientos global cinemático no cruza por nuestro territorio (figura 2.3.6),

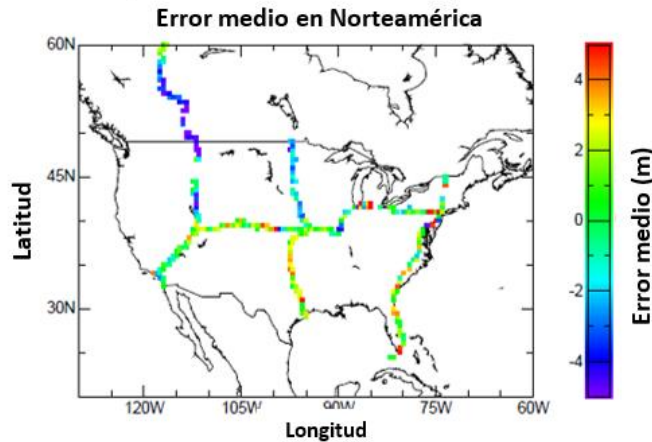


Figura 2.3.6. secciones realizadas con el sistema de posicionamientos global Cinemático, Fuente Rodríguez (2005)
Otros trabajos a nivel local en otras partes del mundo, se han realizado para conocer la precisión del modelo SRTM, y son los siguientes:

- Agrawal (2006) evaluando los datos SRTM en la India mostrando altos errores medios cuadráticos medios en regiones con ondulaciones del terreno de moderadas a altas en el norte de la India como lo muestra la tabla 2.3.3.

Lugar	Ondulación del terreno	RMSE
Allahabad, India	Bajo	3.6 m
Alwar, India	Moderado	11.4 m
Chamoli, India	alto	19.6 m

Tabla 2.3.3 errores medios cuadráticos del SRTM en algunas regiones de la India

- Gorokhovich y Voustianiouk (2006) mostraron errores medios absolutos en Phuket, Tailandia de 7.6 m.
- Rexer y Hirt (2014) compararon las alturas SRTM con estaciones de alturas precisas de la base de datos nacional de gravedad de Australia (ANGD) encontrando un RMSE de 4.4 m.
- En Polonia (Karwel y Ewiak, 2008) indican un RMSE de 2.9 m y 5.4 m, para terrenos plano y escarpados respectivamente.
- En Grecia (Mouratidis et al., 2010) el error encontrado fue de 6.4 m

- Gorokhovich y Voustianiouk (2006) realizaron un estudio en la región de Catskill (USA) obteniendo un error medio absoluto de 4.1 m

2.3.2 Continuo de Elevaciones Mexicano CEM 3.0 (INEGI,2017)

El Continuo de Elevaciones Mexicano 3.0 (CEM 3.0) se basa principalmente en el continuo de curvas de nivel a escala 1: 50 000; sin embargo, el modelo utilizado para su generación se apoya de manera importante en otros tipos de información, como los puntos acotados, las corrientes y cuerpos de agua. En específico, los primeros consideraron los continuos de bancos de nivel y vértices geodésicos; los segundos integraron los continuos de la red hidrográfica y los cuerpos de agua en su escala 1: 50 000. Todos los continuos en sus versiones más recientes.

La elaboración del CEM 3.0 está basada en el modelo de interpolación denominado ANUDEM, algunas características importantes de este son las siguientes:

- Considera como fuente diversos tipos de información que contengan datos de altura del terreno como lo son las curvas de nivel y los puntos acotados,
- Considera tanto los métodos de interpolación locales como los globales,
- Considera el agua como una fuente primaria de erosión, por tanto, existen redes de drenaje bien establecidas y son representadas por la red hidrográfica y los cuerpos de agua.

Adicionalmente, esta versión tiene las siguientes características (Tabla 2.3.4):

- Tiene una resolución de 15 m x 15 m.
- Las alturas se guardan en valores enteros con signo utilizando 16 bits para cada dato.
- Las unidades de alturas (Z) están en metros.
- La información se proporciona en coordenadas geográficas.

- El datum corresponde a ITRF92 época 1988.0, elipsoide GRS80.
- La cobertura geográfica del CEM 3.0 corresponde a la República Mexicana en su totalidad.
- El CEM se distribuye principalmente a través de internet.
- El formato de distribución es el denominado BIL (Banda entrelazada por línea) y TIFF (Tagged Image File Format).

Ventajas

Se destacan las siguientes:

- Se utilizaron diversos tipos de información fuente para generar el CEM 3.0.
- La información fuente se estructuró en continuos.
- Los continuos permitieron una disponibilidad total e inmediata de la información fuente con cobertura del territorio continental mexicano.
- Se utilizó un modelo de interpolación robusto reconocido a nivel internacional denominado ANUDEM.
- Se encuentra disponible en el portal del INEGI.

<http://www.inegi.org.mx/geo/contenidos/datosrelieve/continental/continuoElevaciones.aspx>

Sistema de Descarga

Para la distribución del CEM 3.0 se ha desarrollado un sistema dinámico de descarga el cual se caracteriza por:

- Permitir la descarga del CEM 3.0 a resoluciones de 15, 30, 60, 90 y 120 metros.

- Posibilita la descarga mediante la selección de la cobertura geográfica ya sea nacional, área geoestadística estatal (AGEE), cobertura de la carta topográfica 1:50 000 y por un área definida por el usuario.
- El sistema permite adicionalmente la descarga del sombreado del área seleccionada para descarga, el sombreado es un producto derivado del CEM 3.0.
- El sistema de descarga es complementado con un visualizador el cual muestra la cobertura geográfica seleccionada en formato 3D.

Características	Descripción
Año de publicación	2013
Resolución	15 m x 15 m
Valores de Z	Enteros positivos y negativos.
Unidades de Z	Metros.
Datos de referencia geodésica	El datum corresponde a ITRF92 época 1988.0, elipsoide GRS80, coordenadas geográficas.
Cobertura geográfica	Territorio continental de los Estados Unidos Mexicanos.
Error medio cuadrático general	4.8 m
Error medio cuadrático por rango de pendiente (%):	
De 0 a 14	4.5 m
De 15 a 36	6.0 m
Mayor que 36	7.2 m
Medio de distribución	Principalmente por internet mediante el portal del INEGI. Considera diversas opciones.
Formato de distribución	BIL (Banda entrelazada por línea). Forma Raster, para las descargas total del territorio y por entidad federativa. Formato TIFF (Tagged Image File Format) para las descargas por selección de área y carta respectivamente.
Software utilizado para su generación	ArcGis 10.3

Tabla 2.3.4 Características del CEM 3.0., Fuente INEGI (2017)

2.3.3 Aster GDEM

El desarrollo de los productos de datos ASTER GDEM (tabla 2.3.5) es un esfuerzo de colaboración entre la Administración Nacional de Aeronáutica y del Espacio (NASA) y el Ministerio de Economía, Comercio e Industria de Japón (METI). Los

productos de datos ASTER GDEM son creados por Sensor Information Laboratory Corporation (SILC) en Tokio y está disponible para la descarga desde el enlace <https://lpdaac.usgs.gov/products/astgtmv003/>

El modelo de elevación digital global de ASTER (GDEM) versión 3 (ASTGTM) proporciona un modelo de elevación digital global (DEM) de áreas terrestres en la Tierra con una resolución espacial de 1 segundo de arco (aproximadamente 30 metros de posición horizontal en el ecuador).

La metodología utilizada para producir el ASTER GDEM implicó el procesamiento automatizado de 2,3 millones de escenas del archivo ASTER, incluida la estereocorrelación para producir DEM ASTER individuales basados en escenas, enmascaramiento para eliminar píxeles nublados, apilamiento de todos los DEM protegidos por nubes y eliminación de valores negativos residuales. y valores atípicos, promediando los datos seleccionados para crear valores de píxeles finales y luego corrigiendo las anomalías residuales antes de dividir los datos en mosaicos de 1° por 1°. La cobertura geográfica del ASTER GDEM se extiende desde 83° Norte hasta 83° Sur. Cada mosaico se distribuye en formato GeoTIFF y se proyecta en el geoide del Sistema Geodésico Mundial de 1984 (WGS84)/Modelo Gravitacional de la Tierra de 1996 (EGM96).

El instrumento ASTER fue construido por el Ministerio de Economía, Comercio e Industria de Japón (METI) y lanzado a bordo de la nave espacial Terra de la NASA en diciembre de 1999. Tiene una capacidad estereoscópica a lo largo de la trayectoria utilizando su banda espectral del infrarrojo cercano y su visión del nadir y la visión hacia atrás.

Los estudios para validar y caracterizar el ASTER GDEM confirman que las precisiones para este producto global son de 20 metros al 95% de confianza para datos verticales y de 30 metros al 95% de confianza para datos horizontales.

Características	Descripción
Colección	Terra ASTER
DOI	10.5067/ASTER/ASTGTM.003
Tamaño del archivo	~25 MB
Resolución Temporal	Multi-Anual
Extensión Temporal	2000-03-01 a 2013-11-30
Extensión espacial	Global
Sistema de coordenadas	Latitud y Longitud Geográfica
Datum	WGS84/EGM96
Formato de los Archivos	GeoTIFF
Dimension Geografica	1 grado lat x 1 grado lon

Tabla 2.3.5 características del ASTER GDEM fuente(<https://pdaac.usgs.gov/products/astgtmv003/>)

2.4 Efectos Gravitacional de Masas Topográficas

Derivado de la creciente disponibilidad de los modelos digitales del terreno MDT de alta resolución es posible determinar con precisión el efecto gravitacional de las masas topográficas en el campo de gravedad de gravedad terrestre. La técnica que nos permite realizar este proceso es el Gravity Forward Modeling (GFM).

El GFM se fundamenta en la ley de la gravitación Universal de Newton y permite calcular el potencial gravitacional y sus derivados por medio las alturas topográficas y un valor correspondiente a la densidad adecuado.

2.4.1 Modelos Residuales del Terreno (RTM) - Prismas Regulares

El uso de prismas rectangulares (Mader,1951; Nagy et al., 2000) se ha utilizado tradicionalmente para el dominio espacial GFM un ejemplo lo podemos ver en la rutina TC del programa Gravsoft ampliamente utilizada (Forsberg y Tscherning, 2008) Si bien los prismas rectangulares son adecuados para aplicaciones locales, generalmente no se pueden recomendar para aplicaciones a escala regional o global debido a la aproximación plana relacionada con este esquema.

El Modelo Residual del Terreno (RTM) es uno de los métodos más comunes de reducción de masa utilizados principalmente en la determinación geoide. Dentro de este esquema, la contribución de la topografía se elimina y se restaura utilizando un modelo de la topografía igual a la diferencia entre la topografía real y una superficie de elevación lisa pero variable (figura 2.5.1). Por lo tanto, las masas topográficas por encima de esta superficie de referencia se eliminan y las masas llenan los déficits por debajo de esta superficie de referencia. La superficie de referencia puede construirse promediando la malla de topografía de resolución fina (detallada) y luego filtrando en paso bajo la rejilla media generada tomando medias móviles de un número apropiado de bloques adyacentes. En aplicaciones prácticas, la rejilla topográfica detallada se utiliza a una distancia máxima y la rejilla gruesa se utiliza para la topografía restante de la zona en estudio (Forsberg, 1984). El radio de la zona interior depende de la resolución del DTM detallado disponible. Para puntos fuera de esta área interna, se puede usar una rejilla de menor resolución derivada de la multa mediante el promedio o desde un modelo de expansión de armónicos esféricos de la topografía de la Tierra (Hirt et al., 2010).

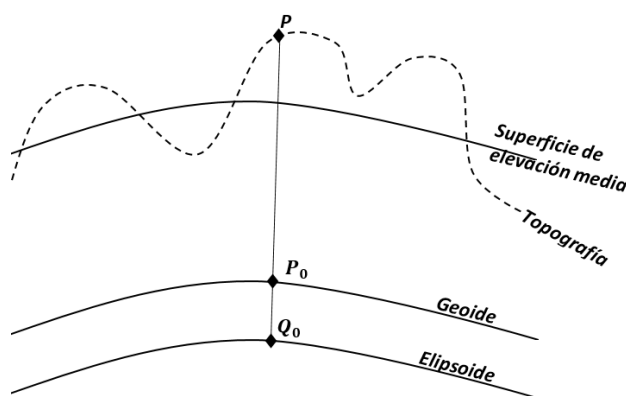


Figura 2.5.1. Geometría de la reducción RTM

Forsberg (1994) sugiere dos formas diferentes de definir la superficie de referencia de la topografía.

Las alturas topográficas de referencia con longitudes de onda hasta $n_{max} = 2,160$ (resolución de aproximadamente 5') se puede obtener a partir de una expansión esférica de series armónicas de la topografía global del modelo de terreno digital

DTM2006.0., calculado por el equipo de desarrollo EGM2008 basado en el conjunto de datos de elevación global SRTM y algunas otras fuentes de datos descritas en Pavlis et al. (2007). El modelo DTM2006.0 consiste en un conjunto de 2.401.336 coeficientes totalmente normalizados $\overline{HC}_{nm}$, $\overline{HS}_{nm}$ que se transforman en alturas de la topografía utilizando la expansión de la serie (EGM-Team 2008):

$$H_{ref}^{DTM2006.0}(\theta, \lambda) = \sum_{n=0}^{n_{max}} \sum_{m=0}^n (\overline{HC}_{nm} \cos m\lambda + \overline{HS}_{nm} \sin m\lambda) \overline{P}_{nm}(\cos \theta) \quad (2.4.1)$$

Con θ co-latitud geocéntrica, λ longitud y $\overline{P}_{nm}(\cos \theta)$ funciones asociadas de Legendre totalmente normalizadas. DTM2006.0 es un complemento consistente del modelo de gravedad EGM2008 de la Tierra.

- Alternativamente, se puede construir una superficie de referencia suave aplicando el operador de promedio móvil (MA) en el DTM. Es importante destacar que el grado armónico esférico asociado de la superficie de referencia debe concordar con el máximo grado armónico esférico n_{max} . Entonces, los datos RTM son capaces de proporcionar información sobre las partes omitidas de longitud de onda corta

La altura media móvil H_{ref}^{MA} se puede calcular a partir de:

$$H_{ref}^{MA}(k, l) = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)} \sum_{i=-n}^{i=n} \sum_{j=-n}^{j=n} H(k+i, l+j) \quad (2.4.2)$$

Donde H es una matriz que contiene los datos DTM, (k, l) es el par de índices que denota el punto de cálculo. El parámetro n se puede determinar fácilmente a partir del ancho w de la ventana de filtro y la resolución DTM Δx :

$$n = \text{int} \left(\frac{w}{2\Delta x} \right) \quad (2.4.3)$$

La Ec. 2.4.2 usa una ventana cuadrada centrada al punto de cálculo. Para construir la superficie de referencia media móvil de acuerdo con el máximo grado armónico esférico n_{max} , el ancho w de la ventana se adapta a la resolución espacial de la expansión armónica esférica (Torge, 2001):

$$w = \frac{180deg}{n_{max}} \quad (2.4.4)$$

En el caso del EGM2008, el grado máximo n_{max} de 2160 implica una ventana con w de 5 minutos de arco.

En este estudio, probamos la segunda alternativa.

La técnica de Modelo Residual del Terreno RTM (Forsberg y Tscherning, 1981; Forsberg, 1984) es capaz de modelar la mayor parte del error de omisión de la señal EGM2008 (Hirt, 2010 y Hirt et al., 2010). Generamos datos RTM como la diferencia entre el modelo de elevación SRTM de 3" de arcos (Jarvis et al., 2008) y la superficie de referencia generada por medio del operador media móvil. Las masas topográficas que se encuentran sobre esta superficie de referencia se eliminan y las masas llenan los déficits por debajo de esta superficie de referencia. La superficie de referencia se puede construir promediando la cuadrícula de topografía de resolución fina (detallada) y luego filtrando a paso bajo la cuadrícula promedio generada tomando promedios móviles (el operador de media móvil MA) de un número apropiado de bloques adyacentes. La cuadrícula topográfica detallada se utiliza a una distancia máxima y la cuadrícula gruesa se utiliza para la topografía restante del área bajo estudio (Forsberg, 1984). El radio de la zona interna depende de la resolución del DTM detallado disponible. Para los puntos fuera de esta área interna, se puede usar una malla de menor resolución derivada de la más fina promediando (figura 2.5.2) o de un modelo de expansión de armónicos esféricos de la topografía de la Tierra (Hirt et al., 2010).

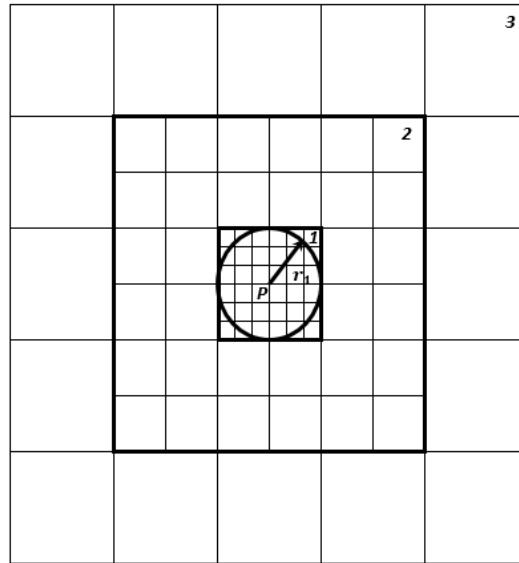


Figura 2.5.2. Sectorización en el cálculo del efecto del terreno

La superficie de referencia sirve como filtro de paso alto, eliminando las características de longitud de onda larga de los datos SRTM. Los datos SRTM/DTM 2006.0 RTM se transforma en alturas geoidales N^{RTM} usando el método de modelado directo de integración de prisma (Forsberg 1984, Nagy et al., 2000).

La elevación residual entre SRTM y superficie de referencia, es decir, $z^{RTM} = z^{SRTM} - z^{Sup.Ref}$ de cada punto de la malla representa un prisma rectangular de densidad constante ρ_0 para el cual se calcula el potencial gravitacional V del punto P que se obtiene por medio de la integración del volumen (triple) sobre el cuerpo en cuestion (en este caso el prisma ABCDEFGH; ver figura 2.5.3) Con las coordenadas de esquina (x_1, y_1, z_1) y (x_2, y_2, z_2) de un solo prisma, la expresión para V se lee (Nagy et al., 2000):

$$V = G\rho_0 \left[\int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} xy \ln(z+r) + yz \ln(x+r) + zx \ln(y+r) - \frac{x^2}{2} \tan^{-1} \frac{yz}{xr} - \frac{y^2}{2} \tan^{-1} \frac{zx}{yr} - \frac{z^2}{2} \tan^{-1} \frac{xy}{zr} \right]_{x_1}^{x_2} \Big|_{y_1}^{y_2} \Big|_{z_1}^{z_2} \quad (2.4.5)$$

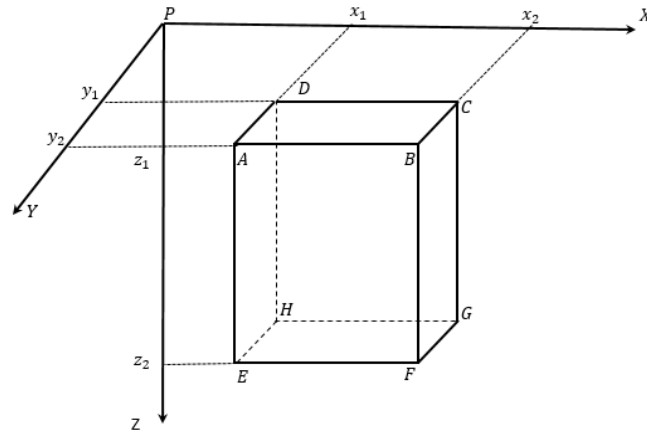


Figura 2.5.3. Notación usada para la definición del prisma

Donde r es la distancia entre el punto (x, y, z) y el origen del sistema de coordenadas, y G es la constante gravitacional. Con el fin de evaluar la Ec. 2.5.5, las variables (x, y, z) son sustituidas por los límites $(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2)$, dando un total de 48 términos por prisma (Nagy et al., 2000). Se usó la densidad de masa topográfica estándar de $\rho_0 = 2,670 \text{ kgm}^{-3}$. Utilizamos $z_1 = 0$ y $z_2 = z_{RTM}$, de manera que las alturas de prisma $z_2 - z_1$ representan las elevaciones residuales. La ecuación 2.4.5 se basa en una aproximación plana (Nagy et al., 2000); Sin embargo, el efecto de la curvatura de la Tierra se tiene en cuenta aquí por un desplazamiento vertical del prisma como una función de la distancia entre cada prisma y el punto de cálculo de RTM (Forsberg, 1984). Para la conversión del potencial V del prisma a su contribución de la anomalía de la altura ζ^{prism} , se aplica una variante de la ecuación de Bruns (Heiskanen y Moritz, 1967):

2.4.2 Modelos Residuales del Terreno (RTM)-Teseroides

La modelación de datos a escala regional y global requiere tener en cuenta la curvatura de la tierra (Uieda, 2016), por lo que una alternativa es realizar la discretización por medio de teseroides en lugar de prismas rectangulares.

Un teseroide es un cuerpo elemental delimitado por líneas de cuadrícula geográfica en la superficie de referencia elipsoidal (o esférica) y superficies de altura elipsoidal (o esférica) constante (Heck et al., 2007 y Anderson, 1976).

Este tipo de elementos de masa es ideal cuando se utilizan DTM basados en coordenadas geodésicas ϕ, λ . El teseroide tiene como límites:

1. Dos superficies de altura elipsoidal constante $h_1, h_2 = Cte$ y paralelas al elipsoide de referencia.
2. Un par de planos meridionales $\lambda_1 = cte$ y $\lambda_2 = cte$;
3. Un par de conos circulares coaxiales $\phi_1 = cte$ y $\phi_2 = cte$.

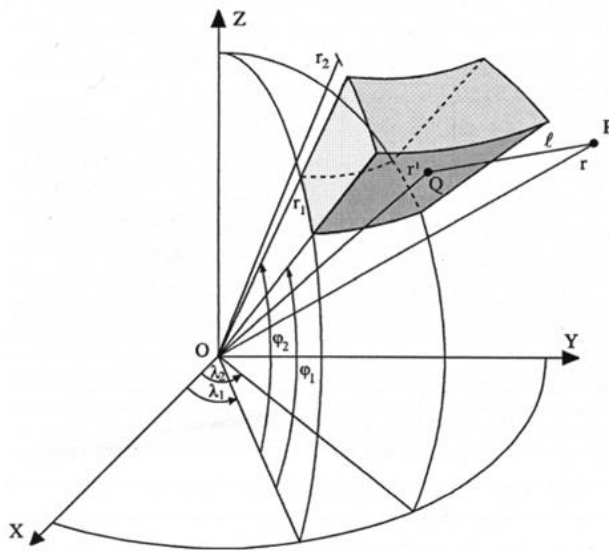


Figura 2.5.4. Geometría del Teseroide (Álvarez, 2007).

Para la mayoría el caso no es posible una solución analítica no es posible por lo que la formula integral para los efectos de la gravedad debe ser resuelta analíticamente

y se incluye para esto la expansión de la serie de Taylor y la cuadratura de Gauss-Legendre GLQ (Uieda, 2016).

En la mayoría de los casos, una aproximación esférica del teseroide elipsoidal producirá resultados suficientes buenos (Novák y Grafarend, 2005). Con aproximación esférica de la superficie de referencia, el par de superficies (1) consta entonces de esferas concéntricas con radios $r_1 = R + h_1, r_2 = R + h_2$, donde R denota el radio elegido de la esfera equivalente.

El potencial gravitacional v de un teseroide esférico de densidad de masa homogénea ρ se describe mediante la integral de Newton.

$$v(r, \phi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r'^2 \cos \phi'}{l} dr' d\phi' d\lambda' \quad (2.4.6)$$

$$l = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \psi}$$

$$\cos \psi = \sin \phi \sin \phi' + \cos \phi \cos \phi' \cos(\lambda' - \lambda)$$

Donde v es el potencial gravitacional, G es la constante gravitatoria newtoniana, r, ϕ, λ son las coordenadas esféricas del punto de cálculo P , r', ϕ', λ' son las coordenadas esféricas del punto de integración en ejecución Q , ℓ es la distancia euclidiana entre los puntos P y Q ; y ψ denota el ángulo entre los vectores de posición de los puntos P y Q , como la distancia esférica.

A diferencia del cálculo del potencial gravitacional por medio de prismas, el potencial de los teseroides no se puede resolver por integración elemental esto es debido las que se trata integrales elípticas. Sin embargo, se puede obtener una solución aproximada por integración numérica o la integral de superficie resultante de la integral sobre coordenadas radiales r' .

$$v(r, \phi, \lambda) = G\rho \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi' \times [\ell(r' + 3r \cos \psi) + r^2(3 \cos^2 \psi - 1) \times \ln(\ell + r' - r \cos \psi)] \Big|_{r'=r_1}^{r'=r_2} d\phi' d\lambda' \quad (2.4.7)$$

donde la integración sobre r' se evalúa analíticamente (Martinec, 1998).

2.5 Métodos de evaluación integral

2.5.1 Integración numérica directa

Este método de integración es muy preciso. No se requiere que la distribución de datos sea uniforme. Un problema es que, a medida que los datos aumentan en número, rápidamente se vuelven intensivos desde el punto de vista informático. Consideremos la siguiente integral sobre la esfera.

$$g_P = \iint_{\sigma} K(\psi_{PQ}) f_Q d\sigma_Q, \quad d\sigma_Q = d\phi \cos\phi_Q d\lambda \quad (2.4.8)$$

Donde:

g_P	Es la cantidad evaluada en el punto P
$K(\psi_{PQ})$	Es la Función Kernel asociada a los puntos P y Q
ψ_{PQ}	Angulo en el centro de la esfera entre los radios a la distancia en la esfera entre los puntos P y Q
f_Q	Es la función integrada en el punto Q
$d\sigma_Q$	Es un elemento diferencial de área en Q
ϕ, λ	Son las coordenadas geográficas

Definimos por $\mathbf{A}$ la matriz que representa la discretización de la integral en la ecuación (2.4.8). Considerando una malla de puntos para evaluación e integración con los valores de función correspondientes representados por vectores $\mathbf{g}$ y $\mathbf{f}$ respectivamente, escribimos simbólicamente.

$$\mathbf{g} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (2.4.9)$$

Teniendo una malla regular con intervalos constantes $\Delta\phi, \Delta\lambda$ para los puntos de solución y medición, avanzando de oeste a este y de sur a norte, un elemento de $\mathbf{A}$ estará dado por:

$$A_{i,j} = K_{i,j}(\phi_i, \lambda_i, \phi_j, \lambda_j) \Delta\phi \cos\phi_j \Delta\lambda \quad (2.4.10)$$

Con:

$$\begin{aligned} \phi_i &= \phi_1 + \left[\text{ent} \frac{i-1}{m} \right] \Delta\phi, & \lambda_i &= \lambda_1 + \left[i - \left(\text{ent} \frac{i-1}{m} \right) m - 1 \right] \Delta\lambda \\ \phi_j &= \phi_1 + \left[\text{ent} \frac{j-1}{m} \right] \Delta\phi, & \lambda_j &= \lambda_1 + \left[j - \left(\text{ent} \frac{j-1}{m} \right) m - 1 \right] \Delta\lambda \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

$$i = 1, mn, j = 1, mn$$

Siendo ϕ_i, λ_1 las coordenadas iniciales de una malla uniforme, m el numero de puntos a lo largo de los paralelos, n el número de puntos a lo largo de los meridianos y ent significa que se toma la parte entera.

2.5.2 Integración numérica esférica con 2-D FFT

Con la ayuda de FFT (Fast Fourier Transform), el teorema de convolución permite evaluar algunas integrales de una manera mucho más eficiente que con la integración numérica directa. Por definición, una convolución entre dos funciones $k(t)$ y $f(t)$ viene dada por

$$g(t) = (k * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t - t') f(t') dt' \quad (2.4.12)$$

Esta integral se puede evaluar fácilmente utilizando el teorema de convolución (Brigham, 1988): El espectro (transformada de Fourier) de la convolución es igual al producto de los espectros de las funciones convolucionadas. Es decir, de

$$\hat{F}(g(t)) = \hat{F}((k * f)(t)) \quad (2.4.13)$$

Tenemos que, utilizando la representación espectral en el dominio de la frecuencia, cuya variable es ω

$$G(\omega) = k(\omega)F(\omega) \quad (2.4.14)$$

donde $\hat{F}$ representa el operador de la transformada de Fourier, G, K, F es la representación de Fourier de las funciones $g(t), k(t), f(t)$, respectivamente y ω es la variable en el dominio de la frecuencia. Aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación (2.5.14), obtenemos.

$$g(t) = \hat{F}^{-1}(K(\omega)F(\omega)) \quad (2.4.15)$$

Hay casos en los que se conocen $g(t)$ y $k(t)$ y se necesita la solución para $f(t)$. La aplicación de una deconvolución puede hacer esto. De la ecuación (2.5.14) tenemos

$$f(t) = \hat{F}^{-1}\left(\frac{G(\omega)}{K(\omega)}\right) = \hat{F}^{-1}(G(\omega)H(\omega)) \quad (2.4.16)$$

Con $H(\omega) = 1/K(\omega)$. El mismo concepto puede extenderse para la situación bidimensional donde podemos escribir, similar a la ecuación (2.4.14), la versión 2-D de la integral de convolución dada por

$$g(t_1, t_2) = (k * f)(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k(t_1 - t'_1, t_2 - t'_2) f(t'_1, t'_2) dt'_1 dt'_2 \quad (2.4.17)$$

Y en representación espectral

$$G(\omega_1, \omega_2) = K(\omega_1, \omega_2)F(\omega_1, \omega_2) \quad (2.4.18)$$

donde ω_1, ω_2 son las dos variables en el dominio de frecuencia 2-D. Similar a la ecuación (4.8), la deconvolución 2-D correspondiente será

$$f(t_1, t_2) = \hat{F}^{-1}\left(\frac{G(\omega_1, \omega_2)}{K(\omega_1, \omega_2)}\right) = \hat{F}^{-1}(G(\omega_1, \omega_2)H(\omega_1, \omega_2)) \quad (2.4.19)$$

Está claro que las integrales de convolución requieren que la función del kernel se exprese en términos de diferencias de coordenadas. Tenemos que la función kernel

de integrales utilizadas en geodesia como las de Poisson, Hotine y Stokes, que pueden escribirse como funciones de latitud y longitud, se expresan en términos de diferencias con respecto a la longitud, pero no con respecto a la latitud. Para alcanzar la forma requerida es necesario aproximar los kernel, lo que introduce errores debido a la convergencia de los meridianos que crecen con la extensión del área de integración.

Las funciones que deben aproximarse son: $\cos(\psi)$ y $\tan(\alpha)$ que se pueden escribir como

$$\cos(\psi) = \cos(\phi) \cos(\phi' - \phi + \phi) \cos(\lambda' - \lambda) + \sin(\phi) \sin(\phi' - \phi + \phi) \cos(\lambda' - \lambda)$$

$$\tan \alpha = \frac{\cos(\phi' - \phi + \phi) \sin(\lambda' - \lambda)}{\cos(\phi) \sin(\phi' - \phi + \phi) - \sin \phi \cos(\phi' - \phi + \phi) \cos(\lambda' - \lambda)} \quad (2.4.20)$$

Necesitamos fijar el segundo valor de ϕ en $\phi' - \phi + \phi$ a un cierto valor, digamos ϕ_0 en (2.4.20) para que las funciones se expresen como funciones de diferencias de coordenadas. Dejando

$$\Delta\phi = \phi' - \phi, \quad \Delta\lambda = \lambda' - \lambda \quad (2.4.21)$$

Podemos escribir

$$\cos(\psi) \cong \cos(\phi_0) \cos(\phi_0 + \Delta\phi) \cos(\Delta\lambda) + \sin(\phi_0) \sin(\phi_0 + \Delta\phi) \cos(\Delta\lambda)$$

$$\tan \alpha \cong \frac{\cos(\phi_0 + \Delta\phi) \sin(\Delta\lambda)}{\cos(\phi) \sin(\phi_0 + \Delta\phi) - \sin \phi \cos(\phi_0 + \Delta\phi) \cos(\Delta\lambda)} \quad (2.4.22)$$

Esta fórmula dará resultados exactos solo cuando $\phi = \phi_0$. Los errores de convergencia de meridianos aumentarán a medida que aumente la distancia entre el punto de cálculo y el paralelo con latitud ϕ_0 . Una buena elección para ϕ_0 es la latitud media del área. Ahora podemos escribir integrales, a la manera de una convolución bidimensional con respecto a la latitud y la longitud. Supongamos que las funciones de latitud y longitud g , k y f están relacionadas de la siguiente manera

$$g(\phi, \lambda) = \iint_{\sigma} k(\Delta\phi, \Delta\lambda) f(\phi', \lambda') \cos(\phi') d\phi d\lambda \quad (2.4.23)$$

que puede considerarse una convolución 2-D con respecto a las coordenadas ϕ y λ . Usando el operador de convolución $*$ podemos escribir

$$g = k * (f \cos(\phi)) \quad (2.4.24)$$

Entonces, de acuerdo con el teorema de convolución, sus espectros están relacionados por

$$G(\omega_1, \omega_2) = K(\omega_1, \omega_2) \bar{F}(\omega_1, \omega_2) \quad (2.4.25)$$

Con $\bar{F} = \hat{F}(f \cos(\phi))$

Para evaluar integrales que involucran diferencias, utilizando el teorema de convolución, se deben hacer las siguientes suposiciones: Las diferencias deben darse a lo largo de meridianos y con una distancia angular constante entre ambos satélites. Luego, usando la propiedad de desplazamiento espacial de las transformadas de Fourier (ver Brigham, 1988)

$$f(t_1 - t_{1.0}, t_2 - t_{2.0}) \Leftrightarrow F(\omega_1, \omega_2) e^{-i2\pi[\omega_1 t_{1.0} + \omega_2 t_{2.0}]} \quad (2.4.26)$$

2.5.3 Integración numérica esférica combinando integración directa y 1-D FFT

Se sabe que la integración numérica es computacionalmente intensiva para un gran número de puntos. Por otro lado, la evaluación de convolución esféricas con 2D-FFT tiene el problema de la convergencia de meridianos, que hace que el intervalo espacial correspondiente a lo largo de los paralelos cambie con la latitud diferente. Otra forma de evaluar integrales sobre la esfera usando aproximación esférica, con más eficiencia que la integración numérica directa y evitando el error de convergencia de meridianos, es usando transformada de Fourier 1-D combinada con integración numérica (Haagmans et At., 1993). Aun así, el intervalo de

muestreo debe ser uniforme a lo largo de los paralelos. Suponga que las funciones g y f se dan en una cuadrícula de m puntos de oeste a este y n puntos a lo largo de los meridianos de sur a norte y sea k el kernel que relaciona ambos como en la ecuación (2.4.8). Los valores de g para puntos a lo largo de un paralelo de latitud ϕ_P están dados por

$$g_{\phi_P}(\lambda_p) = \Delta\phi\Delta\lambda. \hat{F}_1^{-1} \left(\sum_{\phi_Q=\phi_1}^{\phi_n} \hat{F}_1(k(\Delta\lambda_{PQ})) \hat{F}_1(f_{\phi_Q}(\lambda_Q) \cos \phi_Q) \right) \quad (2.4.27)$$

Donde

$\hat{F}_1$ Representa la transformada de Fourier 1-D.

$g_{\phi_P}(\lambda_p)$ Es el vector 1xm de g a lo largo del paralelo del punto P con latitud ϕ_P .

f_{ϕ_Q} Es el vector 1xm de f a lo largo del paralelo del punto Q con latitud ϕ_Q .

$k_{\phi_Q}(\Delta\lambda_{PQ})$ Es el vector 1xm de k a lo largo del paralelo del punto Q con latitud ϕ_P .

Es decir, la ecuación (2.4.27) arrojará la evaluación de la integral en la ecuación (2.4.8), después de la discretización apropiada, para todos los puntos con latitud ϕ_P .

2.5.4 Errores de convolución cíclica

La convolución como se muestra en las ecuaciones (2.4.12) y (2.4.17) se definen en todo el plano o la recta. En realidad, normalmente solo se dispone de una cantidad finita de datos discretos. Este hecho introduce errores de discretización, truncamiento y efecto de borde (errores en los límites). Además, para la eficiencia computacional, se desea emplear la Transformada de Fourier discreta, lo que implica un supuesto de periodicidad en los datos y el kernel que se utilizará. Esto produce el llamado error de convolución cíclico. Los errores de discretización solo pueden reducirse reduciendo el intervalo de muestreo. Los errores de truncamiento se reducen con una mayor cobertura de área o aplicando modificaciones del kernel. Los errores de efecto de borde se evitan descartando la solución cerca de los bordes. Una forma de eliminar el error de convolución es agregar ceros a los datos y extender el kernel periódicamente al doble del área. Por otra parte, el error por

efecto de borde y el error de convolución cíclica tienen características similares, los dos son más grandes cuando el punto de cálculo de la convolución está cerca a la orilla (Figura 4.1).

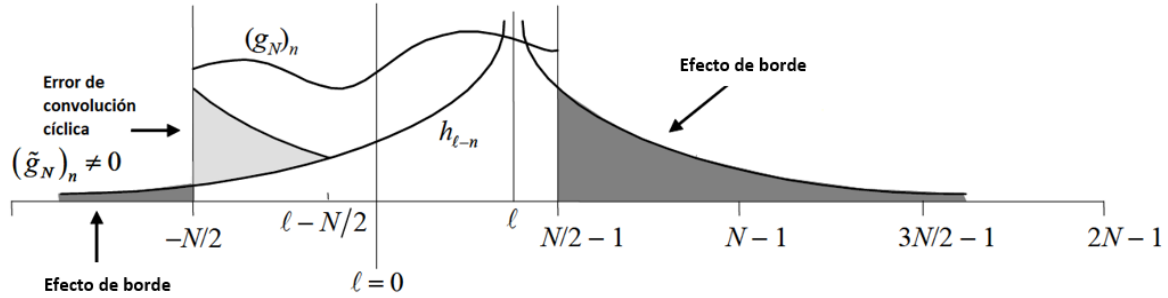


Figura 2.5.5. Efecto de borde en la convolución $(g_N)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ . También se muestra el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{g}_N)_\ell \# (\tilde{h}_N)_\ell$. (Jekeli, 2009).

Es posible construir una convolución cíclica discreta de la secuencia de datos dados que sea exactamente igual a una convolución lineal discreta. Esto no elimina el efecto de borde, solo el error de convolución cíclica. La Figura 2.5.6 muestra como el error de convolución cíclica desaparece para $(\tilde{g}_{2N}^0)_\ell \# (\tilde{h}_{2N})_\ell$ con $-N/2 \leq \ell \leq N/2 - 1$. Se descartan los valores de la convolución cíclica de secuencias extendidas para otros valores de $\ell \dots$

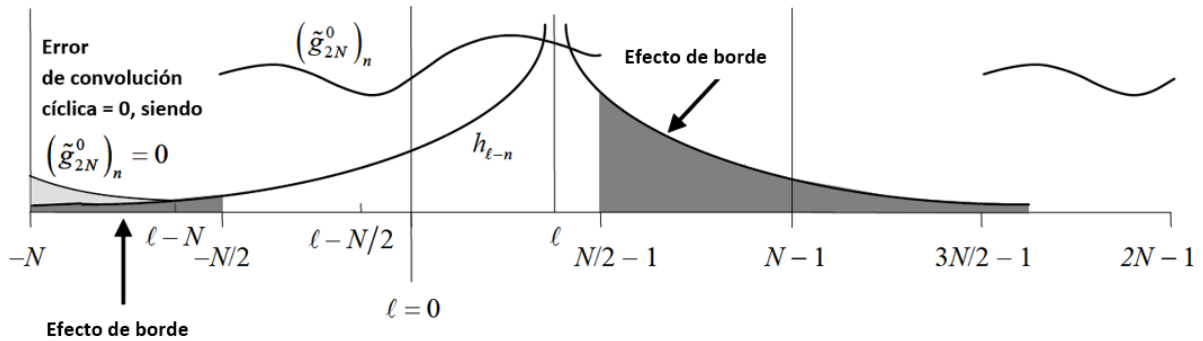


Figura 2.5.6. Error de *truncamiento* y *efecto de borde* en la convolución $(g_N)_\ell \# h_\ell$ evaluada en ℓ , y el error de convolución cíclica obtenida por el cálculo de esta convolución como $(\tilde{g}_{2N}^0)_\ell \# (\tilde{h}_{2N})_\ell$ (Jekeli, 2009).

2.5.5 Inversión de integral esférica con el método directo

Llamamos inversión del dominio del espacio a la inversión asociada a la integración numérica directa. Teniendo en cuenta los errores de medición, podemos reescribir la ecuación (2.4.9) de la siguiente manera

$$\mathbf{g}_{n \times 1} = \mathbf{A}_{n \times m} \mathbf{f}_{m \times 1} + \mathbf{e}_{n \times 1} \quad (2.4.28)$$

donde n es el número de mediciones y m es el número de incógnitas, con $n \geq m$. Siguiendo el principio de mínimos cuadrados, el valor del vector $\mathbf{f}$ viene dado por

$$\tilde{\mathbf{f}} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{g} \quad (2.4.29)$$

Se sabe que la integración numérica directa es computacionalmente intensiva para grandes cantidades de datos. Además de eso, el proceso de inversión es muy exigente para la memoria de la computadora, ya que $\mathbf{A}$ se convierte en una matriz muy grande. Aun así, esta inversión es muy precisa en relación con los otros dos métodos que se explicarán aquí.

2.5.6 Inversión de integral esférica empleando 1-D FFT

Con respecto a la velocidad computacional para una computadora personal, la integración numérica usando 1-D FFT está en medio entre la integración numérica directa y el método 2-D FFT. Si bien puede dar exactamente los mismos resultados en precisión, es más rápido que la integración numérica directa. Para la inversión parece haber una situación similar, como veremos. Es posible realizar inversión 2-D utilizando 1D-FFT que también nos permite procesar más datos que con una inversión del dominio espacial (García, 2002). De cualquier forma, como en el caso de 2D-FFT aún permanece el problema de la falta de incógnitas de los datos imaginarios producto de la deconvolución 1-D, esto genera errores de deconvolución 1-D. Se espera que este problema sea menor debido a que solo se presenta a lo largo de los paralelos. De esta manera, empezamos con la ecuación

(2.5.28) la cual cuando resolvemos para todos los paralelos puede ser expresada como:

$$Y = AX \quad (2.4.30)$$

donde de la ecuación (4.21)

$$Y = \text{vec} \left(\hat{F}_1(g_{\phi_1}), \hat{F}_1(g_{\phi_2}), \hat{F}_1(g_{\phi_3}), \dots, \hat{F}_1(g_{\phi_n}) \right) \quad (2.4.31)$$

$$X = \text{vec} \left(\hat{F}_1(f_{\phi_1} \cos \phi_1), \hat{F}_1(f_{\phi_2} \cos \phi_2), \hat{F}_1(f_{\phi_3} \cos \phi_3), \dots, \hat{F}_1(f_{\phi_n} \cos \phi_n) \right)$$

Considerando que los datos están sobre n paralelos y m meridianos

$$A = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \dots D_{1m} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \dots D_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \dots \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & D_{n3} \dots D_{nm} \end{bmatrix}, D_{i,j} = \text{diag} \left(\hat{F}_1 \left(k_{\phi} \left(\Delta \lambda_{\phi_i, \phi_j} \right) \right) \right) \quad (2.4.32)$$

Y contendrá todos los vectores del espectro del potencial para cada paralelo en el radio r, mientras que X tendrá el mismo, pero en el radio R. Por lo tanto, serán vectores que contengan nm elementos. El tamaño de cada matriz D será m por m y la matriz A tiene un tamaño nm por nm.

Esta matriz será muy grande para un mayor número de medidas, por lo que será más difícil resolver para X. Por ejemplo, con una cuadrícula de 100x100 medidas, el tamaño de A sería 10000x10000. Además, los elementos de A son números complejos ya que son componentes del espectro de Fourier. Aun así, dado que las matrices D son matrices diagonales, la matriz A será una matriz de bandas dispersas con 2 millones de elementos distintos de cero.

Alternativamente, puede intentar resolver el mismo componente (i) de cada vector espectral del potencial a lo largo de los paralelos correspondientes. Es decir,

$$Y_i = A_i X_i \quad (2.4.33)$$

Donde

$$Y_i = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(g_{\phi_1})_i \\ \hat{F}_1(g_{\phi_2})_i \\ \hat{F}_1(g_{\phi_3})_i \\ \vdots \\ \hat{F}_1(g_{\phi_n})_i \end{bmatrix}, X_i = \begin{bmatrix} \hat{F}_1(f_{\phi_1} \cos \phi_1)_i \\ \hat{F}_1(f_{\phi_2} \cos \phi_2)_i \\ \hat{F}_1(f_{\phi_3} \cos \phi_3)_i \\ \vdots \\ \hat{F}_1(f_{\phi_n} \cos \phi_n)_i \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} D_{11}^i & D_{12}^i & D_{13}^i & \dots & D_{1m}^i \\ D_{21}^i & D_{22}^i & D_{23}^i & \dots & D_{2m}^i \\ D_{31}^i & D_{32}^i & D_{33}^i & \dots & D_{3m}^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1}^i & D_{n2}^i & D_{n3}^i & \dots & D_{nm}^i \end{bmatrix} \quad (2.4.34)$$

Y , $D_{j,k}^i$ es un solo elemento y la matriz A_i es de tamaño n por m . De esta manera podemos resolver X_i , que contiene la componente espectral (i) para cada vector potencial a lo largo del paralelo correspondiente en la superficie de la tierra.

Otra forma de ver este sistema de ecuaciones es la siguiente. Deje que X e Y contengan todos los X_i y Y_i de la siguiente manera

$$X = \text{vec}(X_1, X_2, X_3, \dots, X_m) \quad (2.4.35)$$

$$Y = \text{vec}(Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_m)$$

Entonces tenemos el sistema como la ecuación (2.4.30) con A (con el mismo tamaño) siendo una matriz diagonal de bloques formada por matrices A_i .

2.5.7 Errores de deconvolución

La operación inversa de las integrales de convolución, como las ecuaciones (2.4.12) y (2.4.17), también se denomina deconvolución. Este proceso también puede verse como una convolución por sí sola; con $h = \hat{F}^{-1}(H)$ podemos escribir, usando el teorema de convolución.

$$f(t) = h(t) * g(t) \quad (2.4.36)$$

Por lo tanto, conociendo $g(t)$ y el kernel de deconvolución $h(t)$, podríamos resolver fácilmente $f(t)$ usando la ecuación (2.4.13). Como se mencionó anteriormente, tenemos que ocuparnos del error de convolución cíclica si queremos tener

resultados más precisos y eso se puede hacer utilizando la estrategia de relleno adecuada. Sin embargo, existe un problema si solo conocemos la expresión analítica para el kernel de convolución $k(t)$ en el dominio del espacio. Solo podemos obtener una representación discreta de $h(t)$, para el área donde se dan los datos. Al parecer, dado que no tenemos acceso a su expresión analítica, no podemos utilizar ninguna técnica de relleno para evitar los errores de convolución cíclica. Una forma común de evitar este problema es utilizar algunos métodos iterativos para el que no necesitamos conocer los datos ficticios que implica el proceso de convolución. Además, para el caso de FFT 1-D, si podemos usar datos a lo largo de todos los paralelos, no tenemos que preocuparnos sobre errores de deconvolución cíclica. La extensión de datos a lo largo de paralelos no aumentará el tamaño de las matrices A_i que se invertirán, ver ecuación (2.4.33), solo el número de ellas. Como beneficio adicional, no habrá efecto de borde a lo largo

CAPITULO III METODOLOGÍA

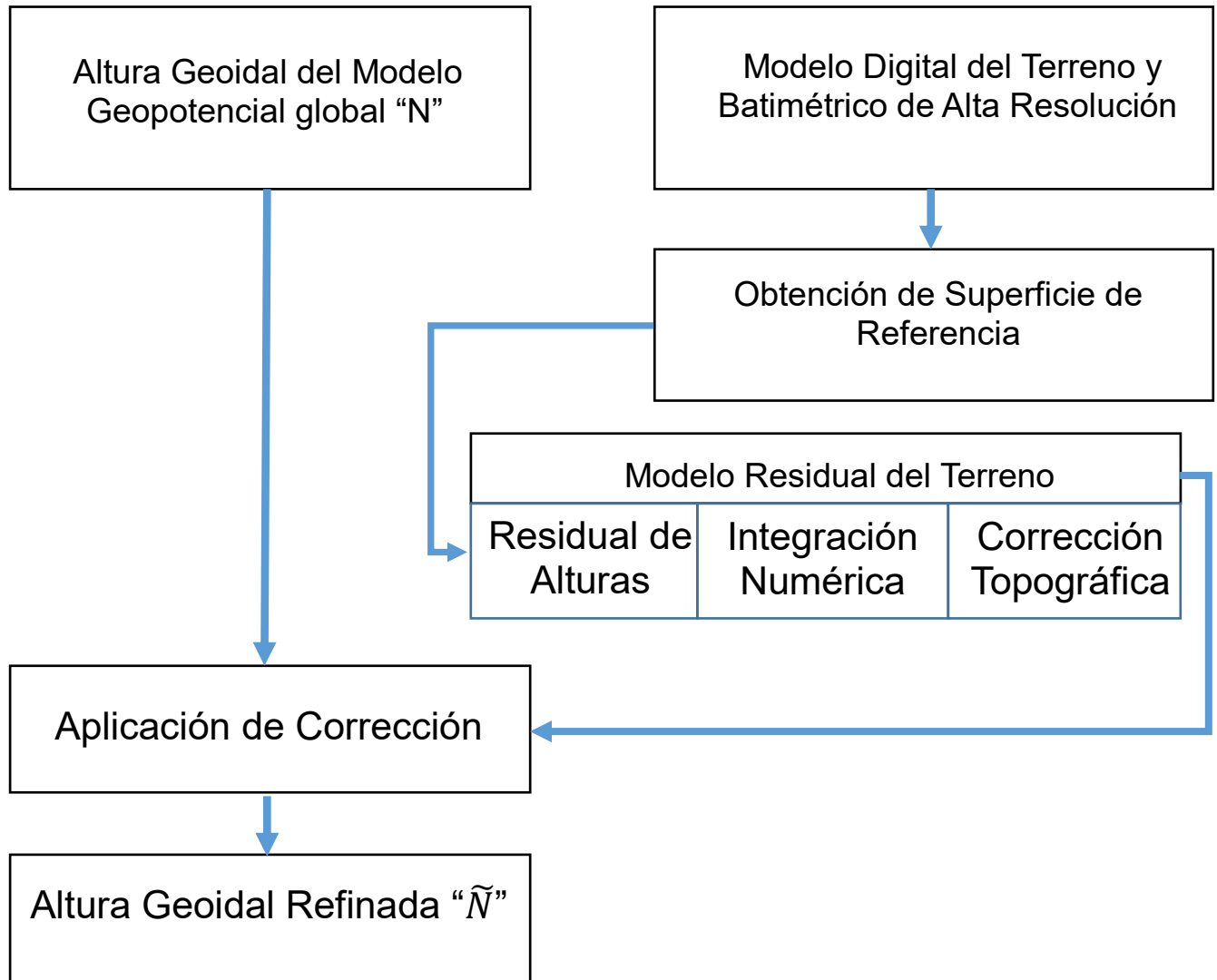


Figura 3.1 Metodología de obtención de un Geoide Refinado

1 Determinación de alturas geoidales de GGM

Las alturas geoidales del Modelo Geopotencial global, se obtienen a través del software HARMONIC_SYNTWGS84, teniendo como dato de entrada los coeficientes armónicos esféricos y las coordenadas de los puntos requeridos, otra opción es descargar el modelo correspondiente en forma de malla de la página del

International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Para esto es necesario reformatear los datos para poderlos utilizar esto se realizó por medio de programa DATOICEGEM_GLOBAL.F90.

2 Obtención de los modelos digitales del terreno de alta resolución

Los Modelos Digitales del Terreno y Batimétrico de Alta Resolución (MDE) SRTM90m se encuentran disponibles en: <http://srtm.csi.cgiar.org/>.

3 Obtención de superficie de referencia.

Como superficie de referencia se consideró El modelo Earth2014.RET2014.5min.geod.grd desde el siguiente sitio web http://ddfe.curtin.edu.au/models/Earth2014/data_5min/GMT/

4 Generación del modelo residual del terreno

Se obtienen las alturas residuales restando del MDE SRTM 90 m las alturas del modelo Earth2014.RET2014.5min. Para esto se utilizó el programa Global Mapper v12, sin embargo, es necesario generar, previamente, una malla geográfica para definir los puntos a calcular, esto se realizó por medio del programa MALLAGEO.F90.

Las alturas residuales sirven de entrada para el programa TC-1DFFT.F90 que integra numéricamente y se evalúa el efecto RTM sobre el Geoide obteniendo la corrección correspondiente a altura geoidal del modelo geopotencial global

5 Aplicación de Corrección y Obtención de Alturas Refinadas.

Se aplica la corrección correspondiente a los modelos Geopotencial del Geoide obteniendo las alturas geoidales refinadas. Se utilizaron bancos de nivel GPS, para realizar una comparativa.

CAPITULO IV PRUEBAS Y RESULTADOAS

4.1 Análisis de precisión de los modelos

4.1.1 Comparación de alturas ortométricas BNGPS, SRTM, CEM

Para este análisis se utilizaron 10,482 puntos de la red geodésica nacional pasiva de INEGI, con datos de nivelación y GPS simultáneamente (figura 4.1).



Figura 4.1 localización de BN-GPS en el territorio de México

Con la localización de los puntos GPS (latitud y longitud) se determinó la altura correspondiente en el Modelos Digital del Terreno SRTM, CEM Y ETOPO (figura. 4.2a, 4.2b, 4.2c).

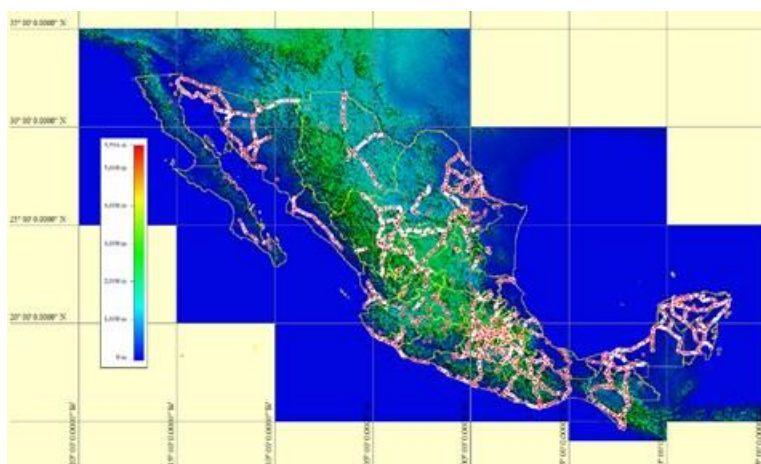


Figura 4.2a. Modelo Digital del Terreno SRTM con BN-INEGI

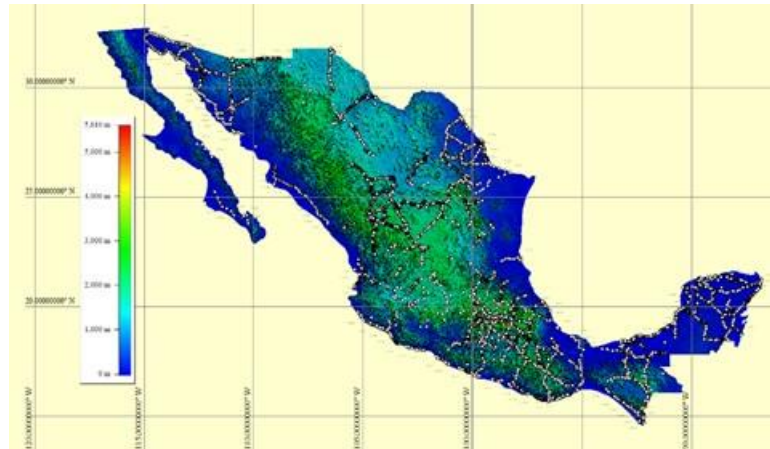


Figura 4.2b. Modelo Digital del Terreno CEM con BN-INEGI

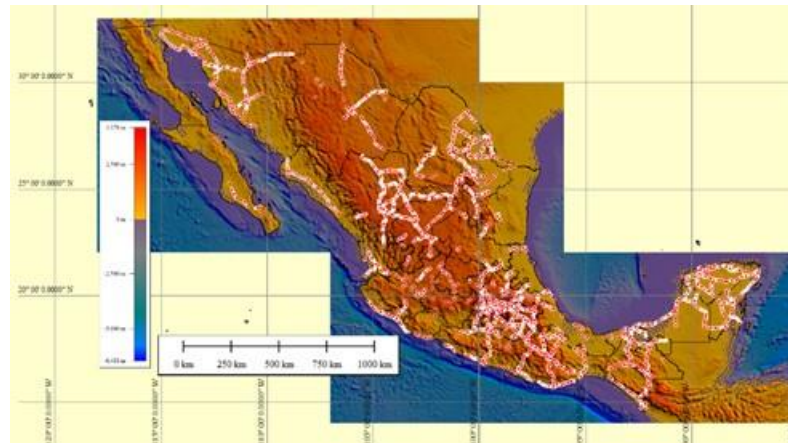


Figura 4.2c. Modelo Digital del Terreno ETOPO con BN-INEGI

Con la siguiente estadística (Tabla 4.1):

	BNGPS (m)	SRTM (m)	CEM (m)	ETOPO (m)
MÁXIMO	3485.350	3497.278	3489.0	3422.299
MÍNIMO	0.584	0.0	0.0	0.0
MEDIA	972.901	975.834	972.362	997.875
DESV. ESTANDAR	893.746	894.603	893.721	895.235

Tabla 4.1 Estadística de los modelos digitales elevaciones (MDE) SRTM, CEM y ETOPO y BN-INEGI

Finalmente, al comparar las elevaciones del MDE con los bancos de nivel GPS se obtuvieron los siguientes resultados (tabla 4.2):

	BNGPS-SRTM (m)	BNGPS-SRTM (m)	BNGPS-SRTM (m)
MÁXIMO	65.245	156.212	588.655
MÍNIMO	-60.150	-73.567	-684.452
MEDIA	-2.933	0.538	-24.974
DESV. ESTANDAR	4.851	4.881	82.339

Tabla 4.2 Estadística de la diferencia entre los (MDE) SRTM, CEM y ETOPO con respecto a los BN-

INEGI

4.1.2 Comparación entre los Modelos Geopotenciales Globales EGM2008, EIGEN_6C4, GECO, SSG_UGM_1 y el modelo geoidal GGM10

Se realizó una comparativa entre los GGM's:

- EGM2008 (Figura 4.3)
- EIGEN_6C4
- GECO
- SSG_UGM_1

El área de estudio está comprendida entre los paralelos 14°N y 33°N y los meridianos 85°W y 118°W con una resolución de 0.005° (~540m) para los modelos geopotenciales globales EGM2008 (Figura 4.3), EIGEN-6C4, GECO Y SSG-UGM-1, así como el modelo GGM10 de INEGI.

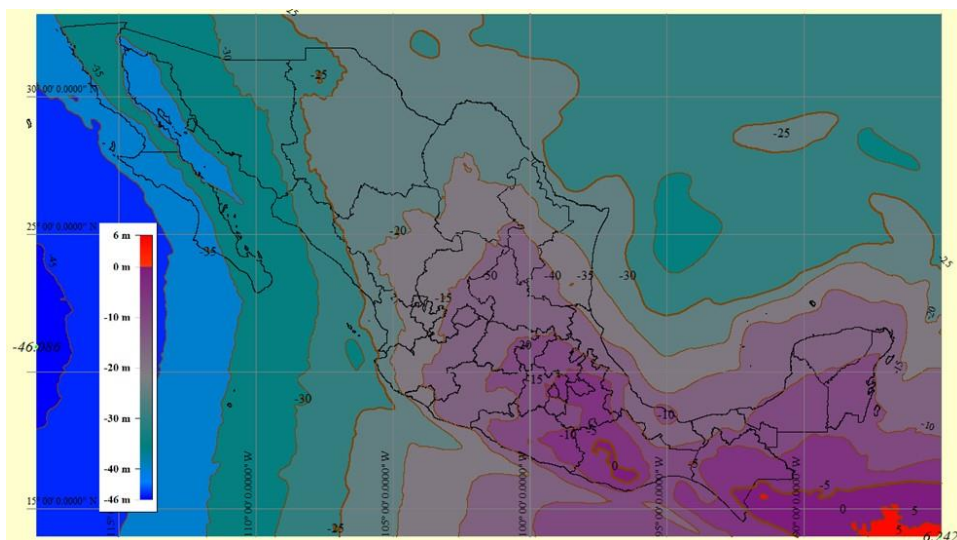


Figura. 4.3 Modelo Geopotencial Global EGM2008

Se calculó la diferencia entre cada uno de los modelos y se determinaron sus medias, desviaciones estándar, máximas y mínimas discrepancia (tabla 4.3) y sus localizaciones.

DIF. DE MODELOS	# DE DATOS	MÍNIMO (m)	MÁXIMO (m)	MEDIA (m)	DESV. ESTANDAR (m)
EGM2008-EIGEN6C4	25,086,600	-0.886	0.580	0.001	0.095
EGM2008-GECO	25,090,401	-1.094	0.690	0.001	0.087
EGM2008-SSG_UGM_1	25,090,401	-0.635	0.455	0.001	0.069
EIGEN6C4-GECO	25,086,600	-0.474	0.535	0.001	0.057
EIGEN6C4-SSG_UGM_1	25,086,600	-0.304	0.360	0.0	0.049
GECO-SSG_UGM_1	25,090,401	-0.331	0.567	0.0	0.044
GGM10-EGM2008	25,086,600	-2.938	1.414	-0.345	0.203
GGM10-EIGEN6C4	25,086,600	-2.953	1.578	-0.346	0.206
GGM10-GECO	25,086,600	-2.946	1.495	-0.345	0.202
GGM10-SSG_UGM_1	25,086,600	-2.952	1.593	-0.345	0.201

Tabla 4.3 Estadística de la Diferencia entre los modelos EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, SSG-UGM-001 y GGM10.

Se localizó geográficamente la diferencia entre los modelos Geopotenciales Globales EGM2008 y el EIGEN-6C4 (Figura.4.4)

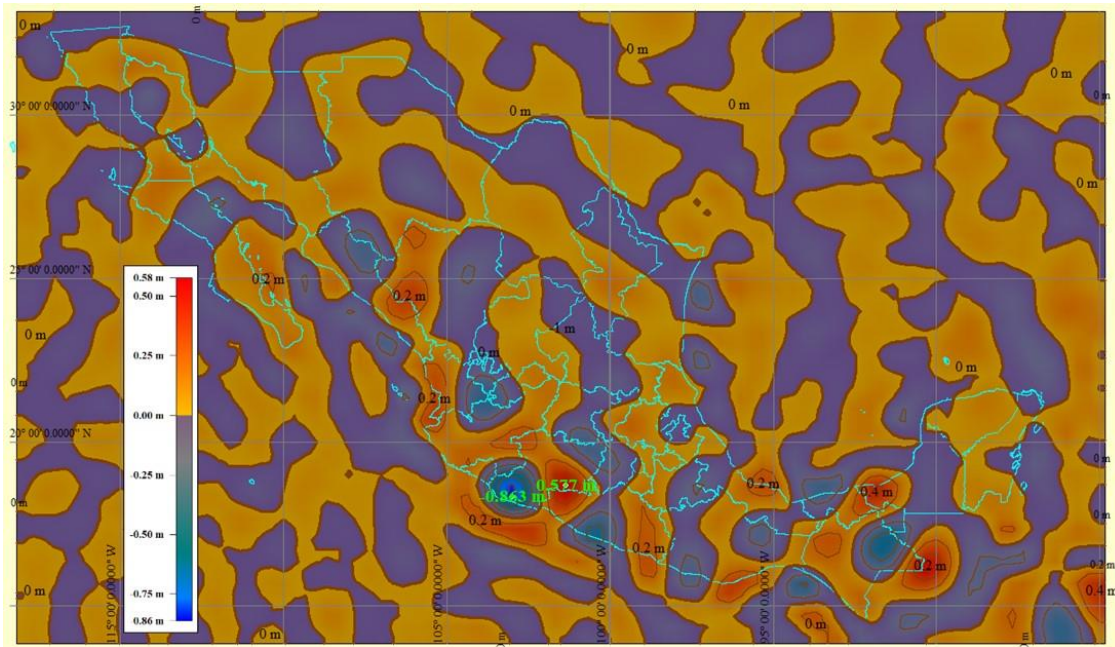


Figura. 4.4. Diferencia entre el EGM2008 y el EIGEN-6C4, con un valor mínimo de -0.886 m y un máximo de 0.580 m ambos localizados en el estado de Michoacán, una media de 0.001 m y una desviación estándar de 0.095 m.

La diferencia entre los modelos Geopotenciales Globales EGM2008 y el GECO (Figura 4.5)

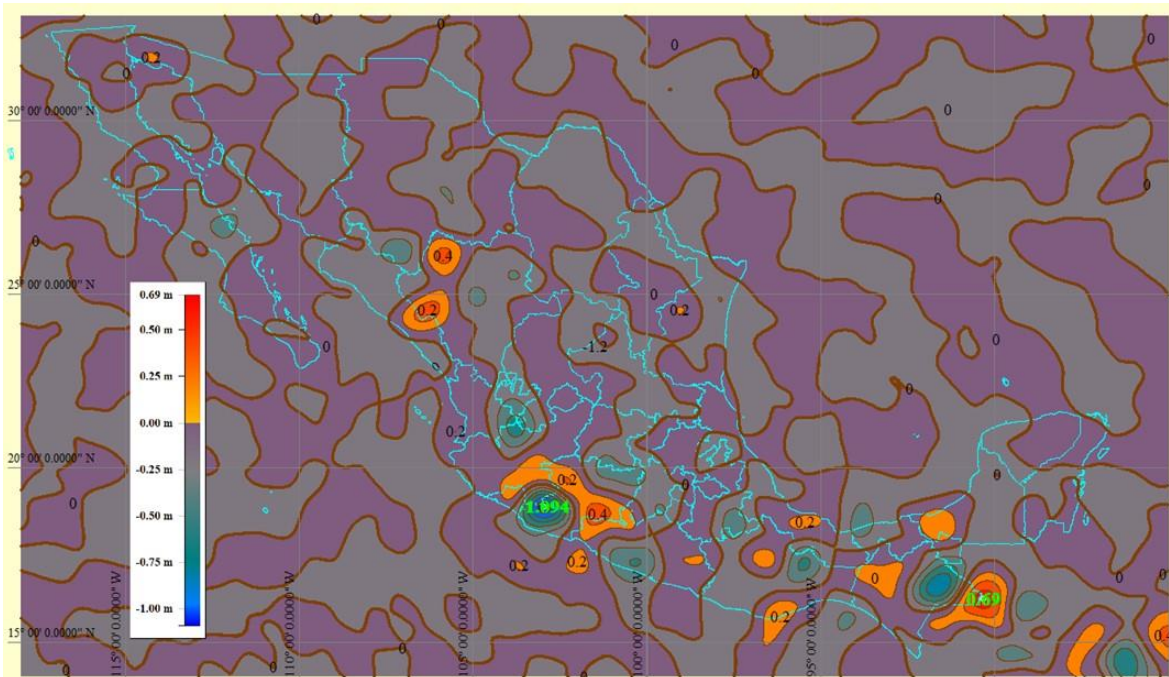


Figura 4.5 Diferencia entre el EGM2008 y el GECO con un valor mínimo de -1.094 m, localizados en el estado de Michoacán y un máximo de 0.690 m ubicado en el estado de Chiapas, una media de 0.001 m y una desviación estándar de 0.087 m.

La diferencia entre los modelos Geopotenciales Globales EGM2008 y el SSG-UGM-001 (Figura 4.6)

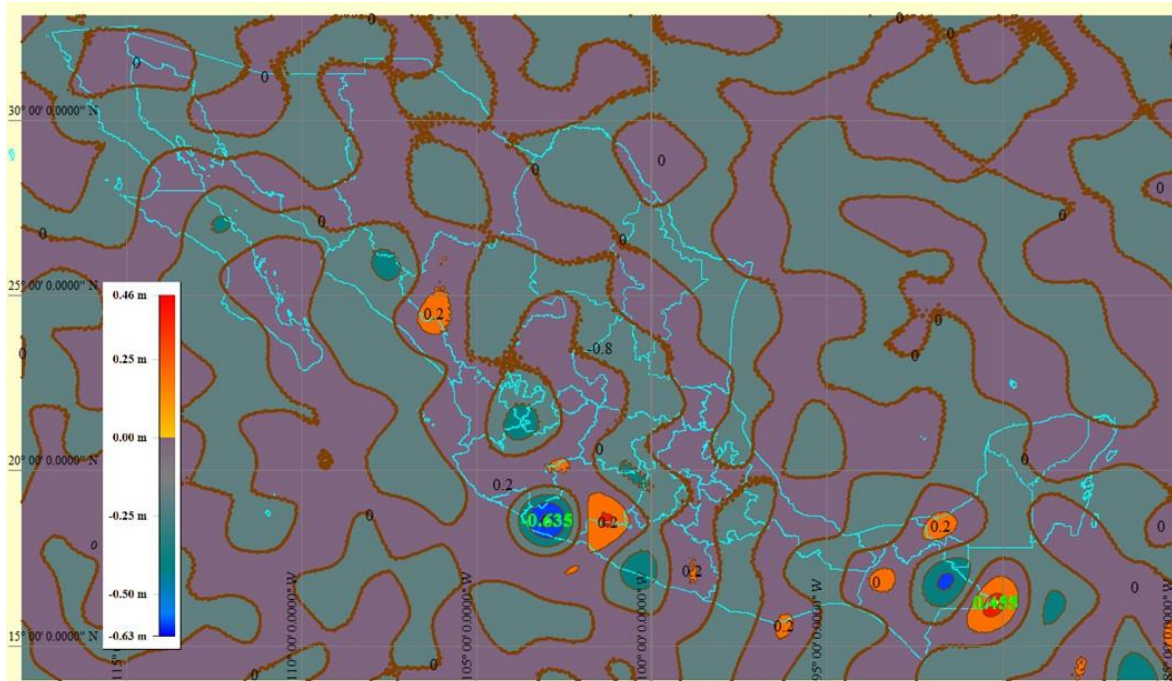


Figura 4.6. Diferencia entre el EGM2008 y el SSG-UGM-001 con un valor mínimo de -0.635 m, localizados en el estado de Michoacán y un máximo de 0.455 m ubicado en el estado de Chiapas, una media de 0.001 m y una desviación estándar de 0.069 m.

De esta comparativa resulta que las diferencias entre el EGM2008 y los otros tres GGMs, prácticamente coincide con la media, mientras que en la derivación estándar existe una discrepancia máxima de 0.095 m con el EIGEN6c4, de 0.087 m con el GECO y de 0.069 m para el SSG_ugm_1.

La figura 4.7 muestra la diferencia entre los modelos Geopotenciales Globales EGM2008 y el GGM10 de INEGI, la media es de -0.345 m y la desviación estándar de 0.203 m.

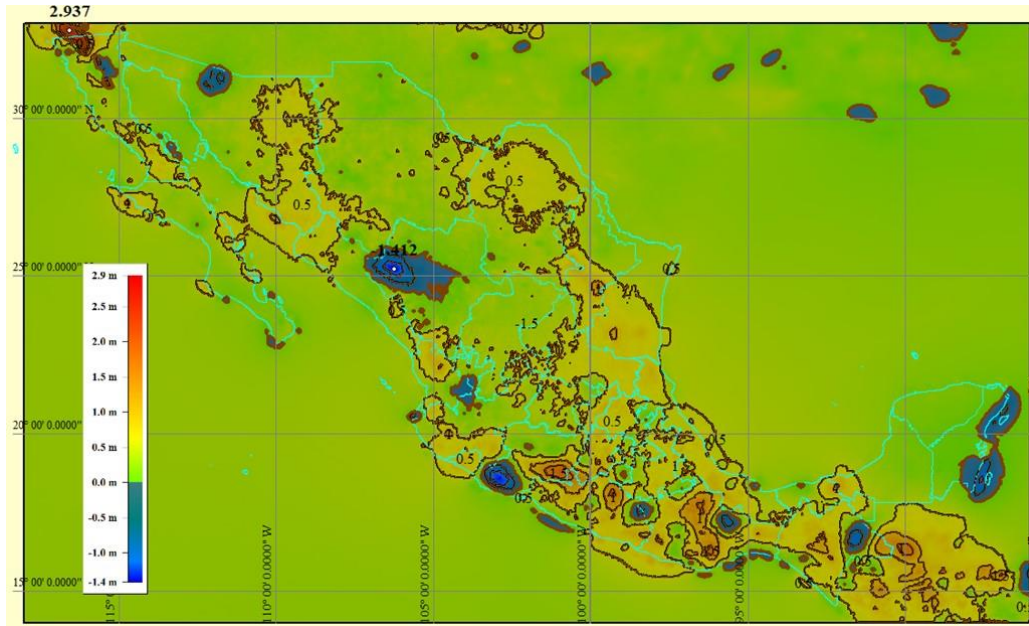


Figura 4.7. Diferencia entre el EGM2008 y el GGM10, con un valor mínimo de -2.938 m, localizados en Baja California y un máximo de 1.414 m ubicado en el estado de Durango, una media de -0.345 m y una desviación estándar de 0.203 m.

4.1.3 Comparativa de las diferencias de alturas geoidales entre BNGPS y los modelos Geopotenciales Globales EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, SSC_UGM_001 y GGM10

Para este análisis se utilizaron 10,482 puntos de la red geodésica nacional pasiva de INEGI, con datos de nivelación y GPS simultáneamente. Con la altura elipsoidal de los puntos GPS y con la altura ortométrica de la nivelación Geométrica se calculó la ondulación del geoide ($N^{niv-gps}$). Para los mismos puntos se determinó la ondulación del geoide (N^{mod}) de los modelos EGM2008, EIGEN-6C4, GECO, SSC_UGM_001 y GGM10 y se realizó la comparación entre ambas cantidades obteniéndose los siguiente resultados:

	BNGPS- GGM10 (m)	BNGPS- EGM2008 (m)	BNGPS- EIGEN_6C4 (m)	BNGPS- GECO (m)	BNGPS- SSG_UGM_001 (m)
MÁXIMO	1.992	1.987	1.991	2.004	2.026
MÍNIMO	-1.963	-3.11	-3.011	-2.832	-3.043
MEDIA	0.38	-0.052	-0.054	-0.049	-0.054
DES. EST.	0.53	0.445	0.419	0.427	0.422

Tabla 4.4. Estadística de la Diferencia entre las ondulaciones geoidales de los Bancos de Nivel GPS con respecto a las ondulaciones geoidales de los modelos EGM2008, EIGEN-6C4, GECO SSG-UGM-001 y GGM10.

4.2 Cálculo de la contribución de las masas Topográficas (Área de estudio Hermosillo.)

En un área de 2°x2° localizado en el estado de Sonora entre los paralelos 30°30'N y 28°30'N y los meridianos 109°30'W y 111°30'W (figura.4.8 y 4.9)

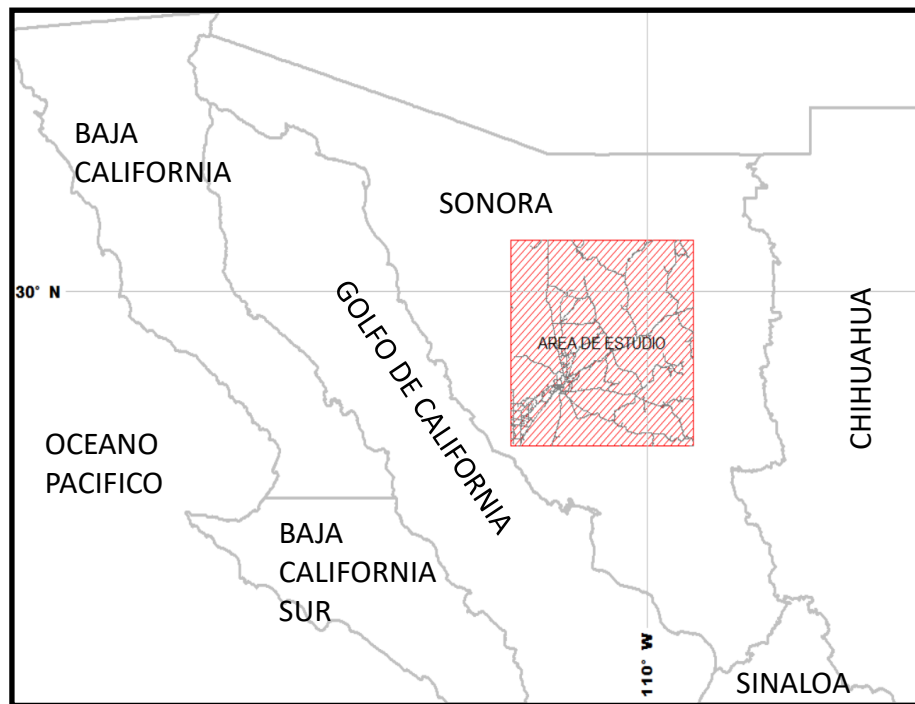


Figura 4.7. Ubicación general del área de estudio Hermosillo

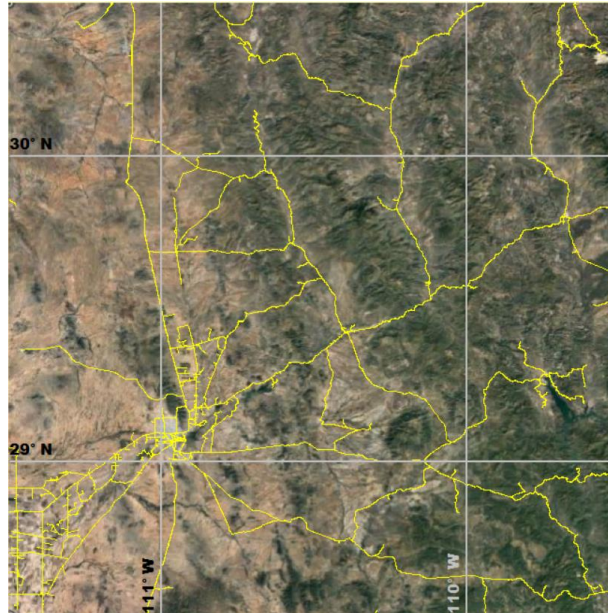


Figura 4.9. Ubicación particular del área de estudio Hermosillo

Como datos de entrada tenemos los modelos digitales del terreno

- Earth2014.RET2014.5min.geod.grd y
- SRTM V4.1

El modelo Earth2014.RET2014.5min.geod.grd se descargó desde el siguiente sitio web http://ddfe.curtin.edu.au/models/Earth2014/data_5min/GMT/ (fig. 4.10a y 4.10b.)

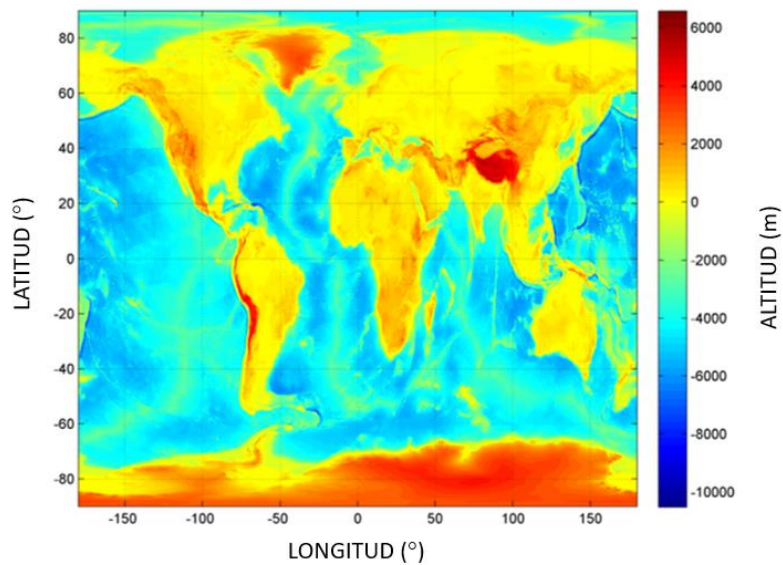


Figura 4.10a. Modelo Earth2014.RET2014.5min.geod.grd

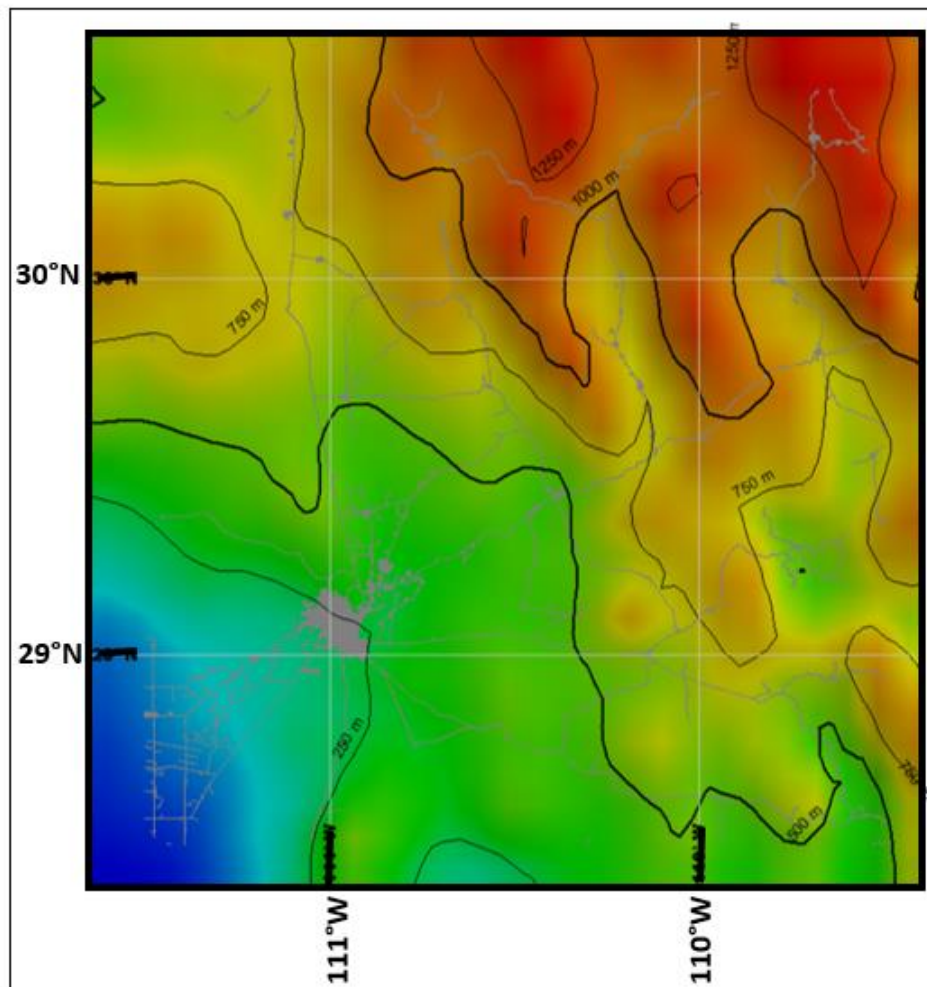


Figura 4.10b. Modelo Earth2014-RET2014.5min.geod.grd para el área de estudio con valores máximo: 1513.075 m, mínimo: 1.300 m, media: 666.558 m y desviación estándar: 345.829 m.

Para el caso del modelo SRTM, se puede descargar del sitio: <http://srtm.csi.cgiar.org/srtmdata/> (Figura 4.11)

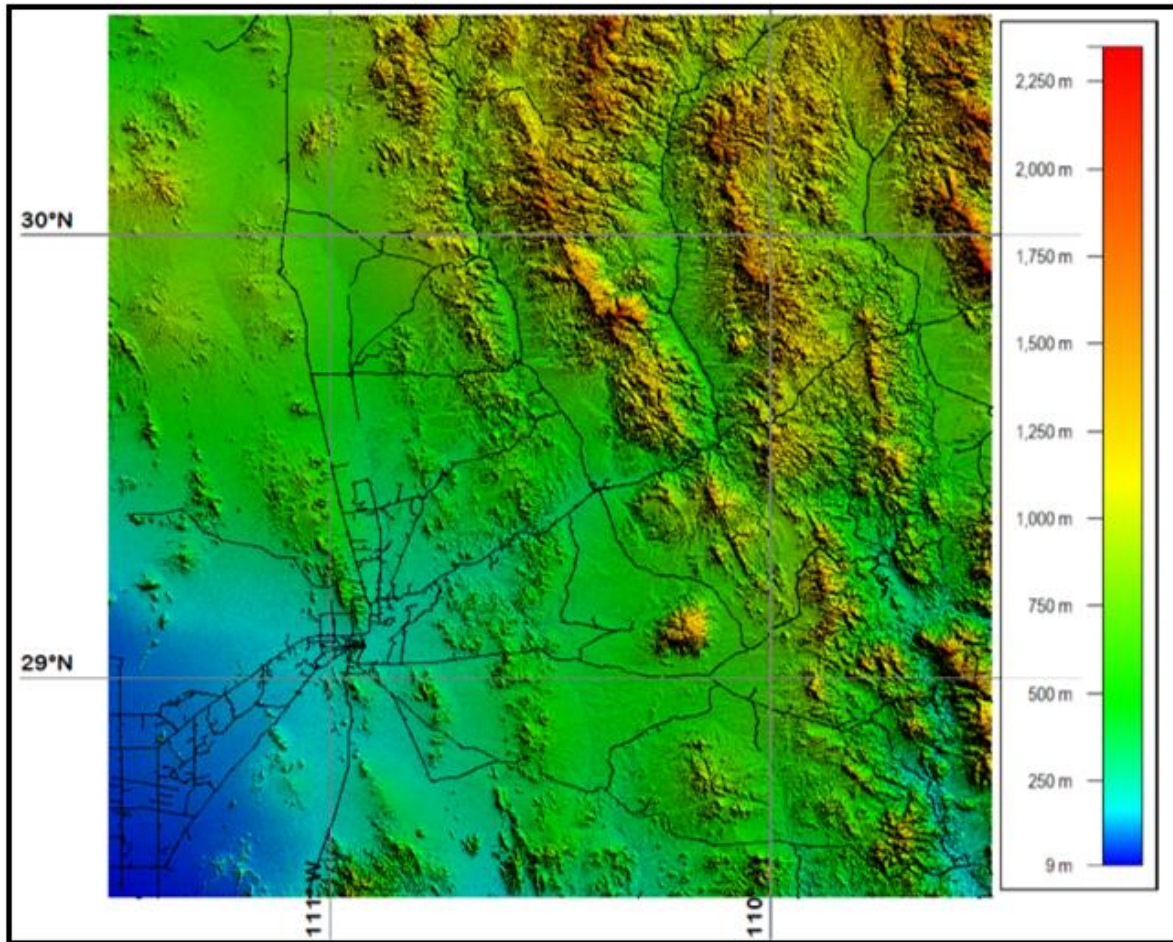


Figura 4.11. Modelo SRTM 90m., para el área de estudio, con valores máximo: 2407 m, mínimo: 0.5 m, media: 665.343 m y desviación estándar: 369.838 m.

Con el objeto de eliminar la topografía que representa la baja frecuencia de longitud de onda, a las alturas del modelo digital de elevaciones SRTM 90m se le resta las alturas del modelo Earth2014.RET2014.5min.geod.grd, obteniendo alturas topográficas residuales (ver figura 4.12).

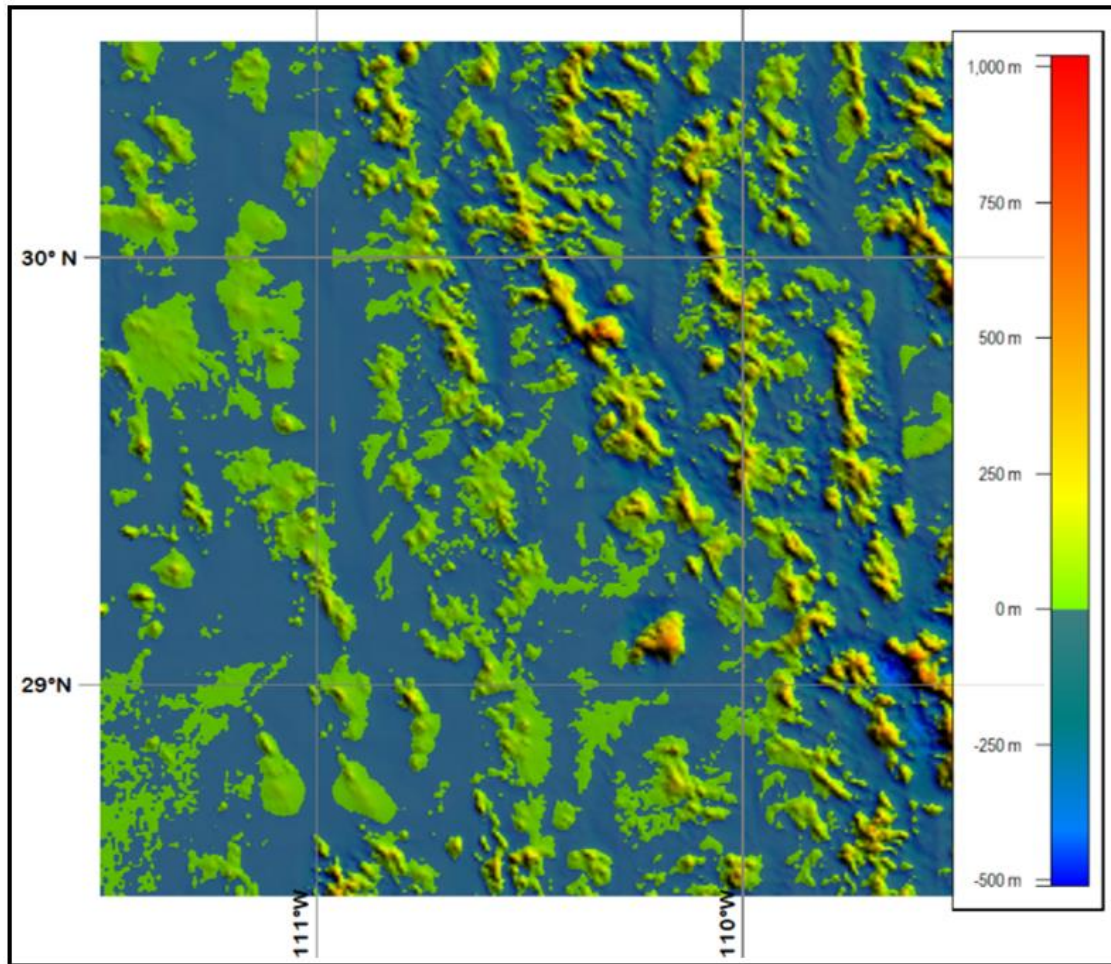


Figura 4.12 Alturas topográficas residuales con valores máximo: 1118.65 m, mínimo: -465.180 m, media: 0.917 m y desviación estándar: 109.453 m.

Para la aplicación del programa TC-1DFFT.F90 se requieren datos de altura topográficas residuales, por lo que se generó una malla geográfica del área de estudio a cada 30", utilizando el programa mallageo3.F90, esta malla se sobrepuso sobre los datos de alturas topográficas residuales (fig. 4.13), para extraer los datos correspondientes.

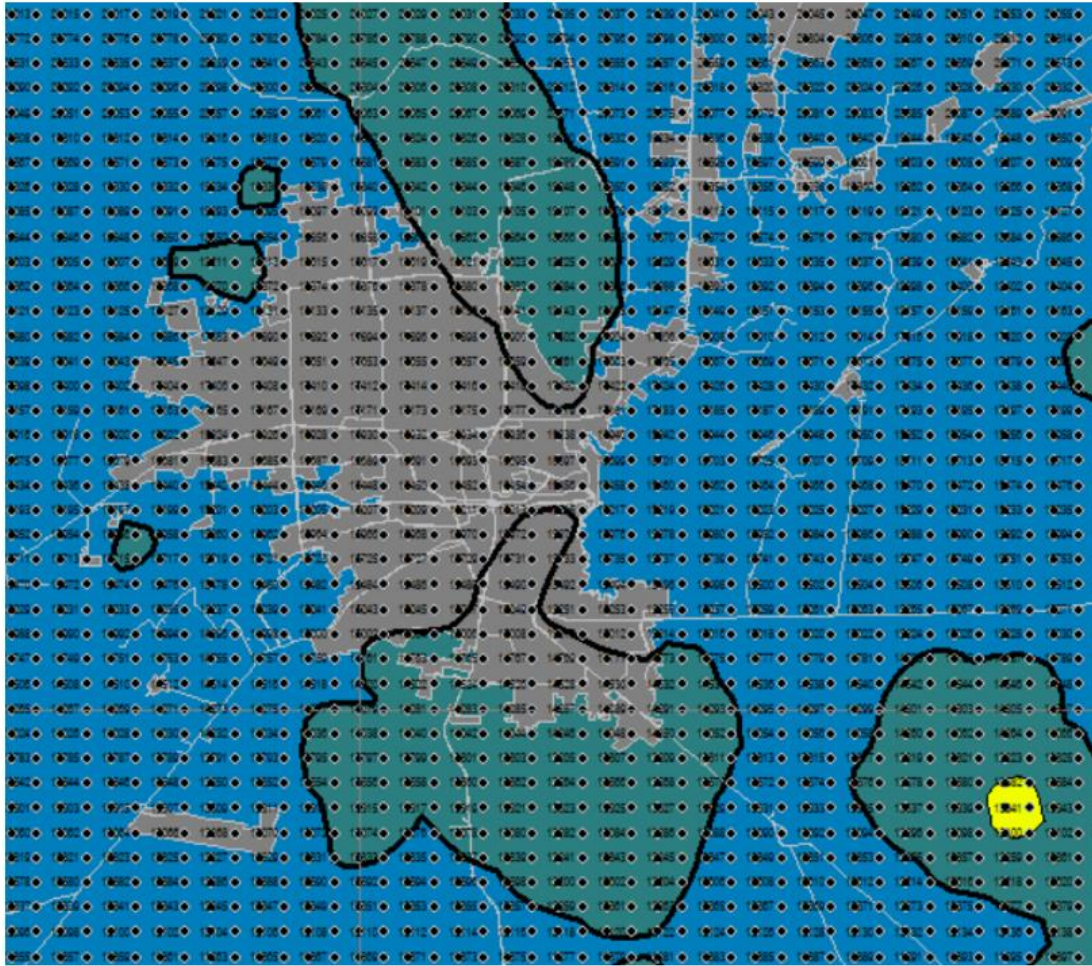


Figura 4.13. Malla sobrepuesta en el modelo de alturas topográficas residuales.

La extracción de los datos de alturas topográficas residuales por medio de la malla geográfica se realizó a través del programa Global Mapper, generando el archivo ALTURAS RESIDUALES.csv, el cual ya se encuentra ordenado de oeste a este y de sur a norte, el cual es el mismo orden en que se ejecuta el programa TC_1DFFT.F90.

El archivo de entrada del programa TC_1DFFT.F90, es un archivo de texto que contiene solo alturas y debe llamarse H.DAT por lo que fue necesario darle el formato correspondiente.

Una vez utilizado el programa C_1DFFT.F90 se obtuvo el archivo DN_TC1D.DAT el cual contiene las correcciones del terreno residual, los cuales se representan a continuación (Figura 4.14).

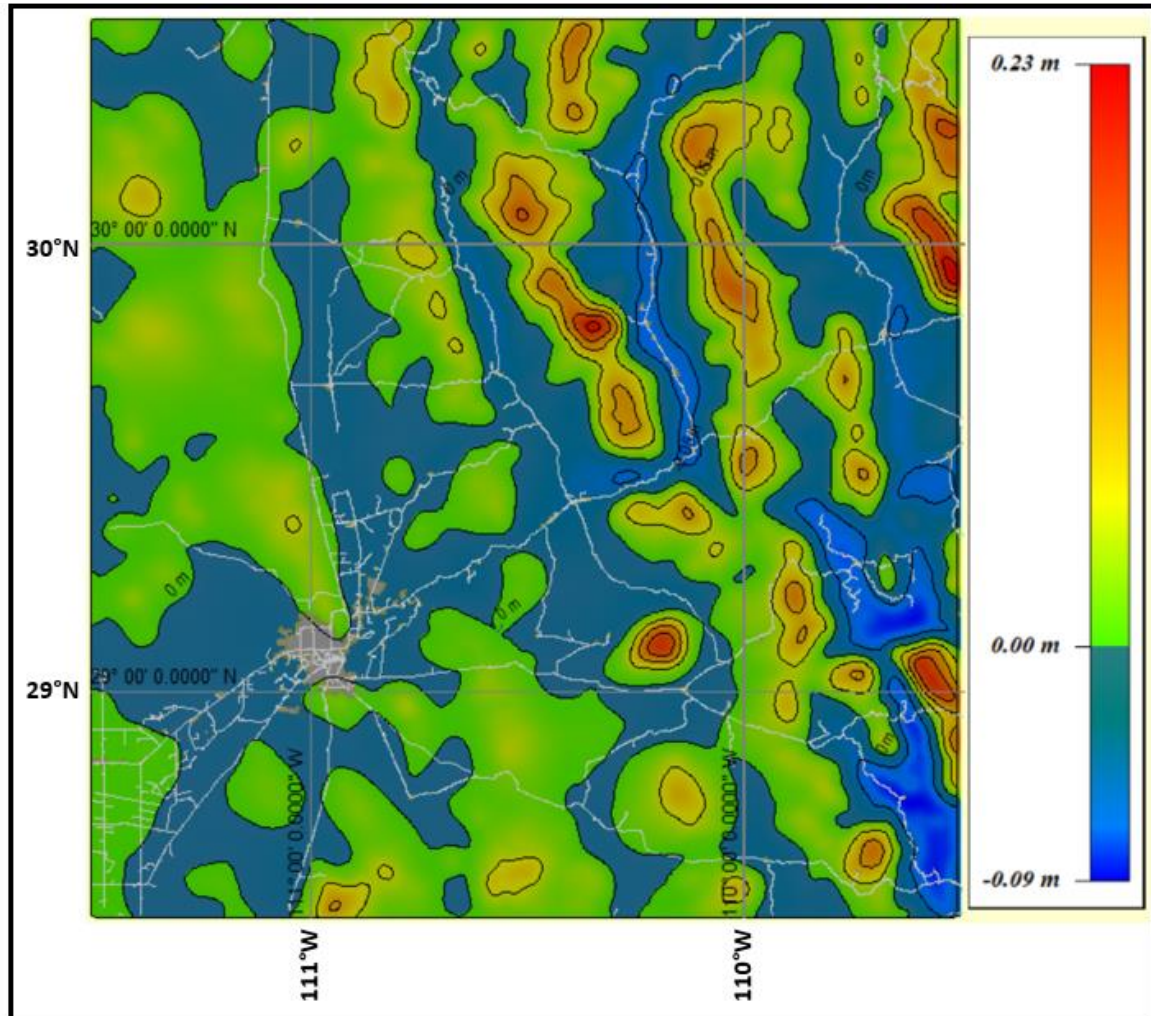


Figura 4.14 correcciones del terreno residual.

Se realizaron perfiles sobre el meridiano y paralelo central de la zona de estudio, correspondientes a 29°N y 111°W (Figura 4.15 y 4.16).

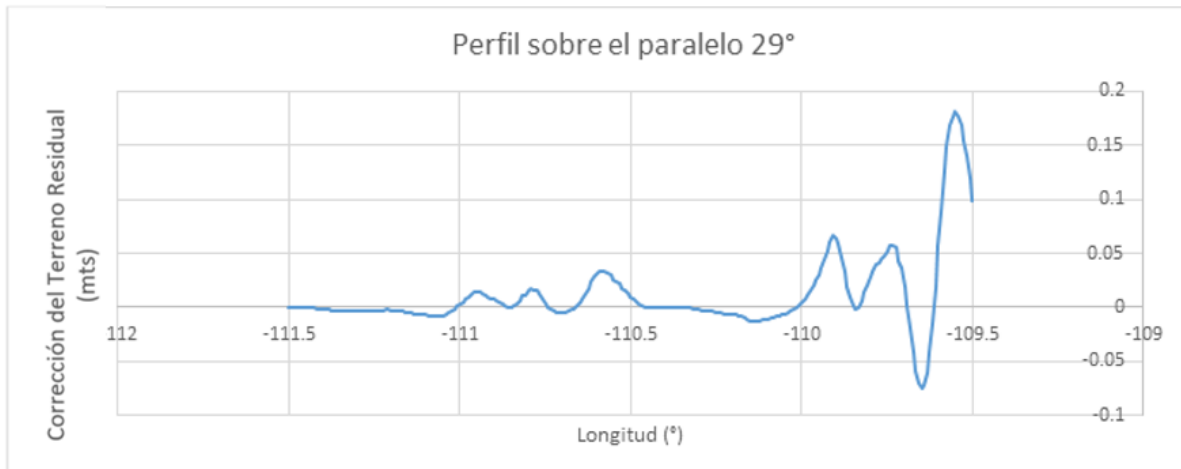


Figura 4.15. Perfil sobre el paralelo central de la zona de estudio (29° N)

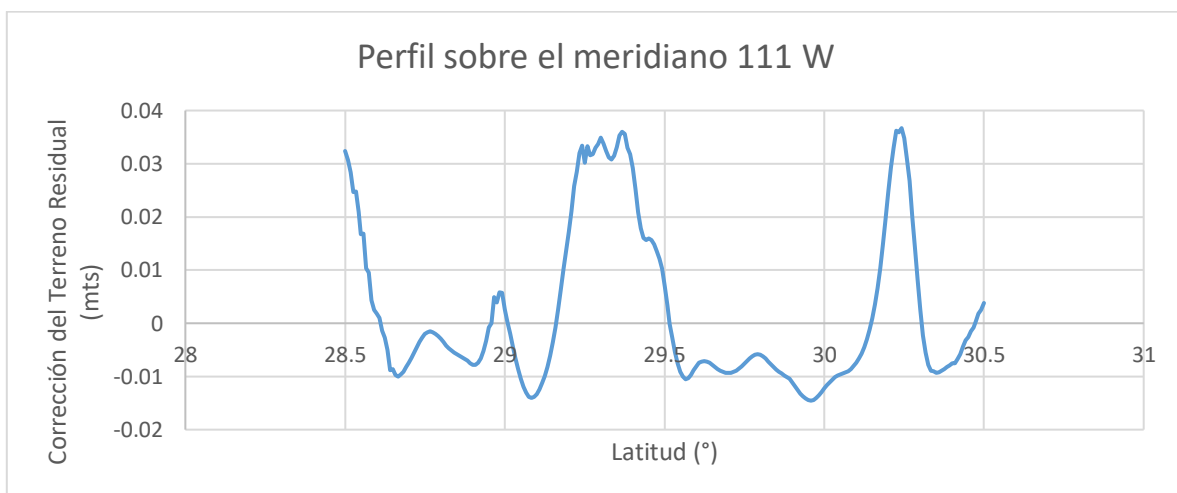


Figura 4.16. Perfil sobre el meridiano central de la zona de estudio (111° W)

De la estadística correspondiente a la corrección del terreno residual (tabla 5), se observa una media de 8 mm con una desviación estándar de 3.6 cm, con un máximo de 22.8 cm y un mínimo de -9.2 cm.

	CRT (m)	CTR PERFIL 29° N (m)	CTR PERFIL 111° W (m)
MÁXIMO	0.228	0.182	0.037
MÍNIMO	-0.092	-0.075	-0.015
MEDIA	0.008	0.012	0.002
DESVIACIÓN ESTANDAR	0.036	0.037	0.015

Tabla 4.5. Estadística correspondiente a la corrección del terreno residual

4.2.1 Comparativa entre las ondulaciones del geoide de bancos de nivel GPS-INEGI (N_{BNGPS}) y los modelos EGM2008($N_{EGM2008}$), EIGEN6C4($N_{EIGEN6C4}$), GECO(N_{GECO}) Y XGN2019($N_{XGN2019}$) y GGM10 (N_{GGM10}) (área de estudio Hermosillo.)

Los datos de entrada son:

- BN-GPS (Bancos de nivel y GPS), en los sistemas NAVD27.
- Valores de ondulación del Geoide, para los modelos EGM2008 ($N_{EGM2008}$), EIGEN6C4($N_{EIGEN6C4}$), GECO(N_{GECO}), XGN2019($N_{XGN2019}$).
- Valores de ondulación del Geoide, para el modelo GGM10-INEGI (N_{GGM10})

BN-GPS

Los datos de los bancos de nivel GPS se pueden descargar de manera puntual del siguiente enlace

<https://www.inegi.org.mx/app/geo2/rgnp/>

Para esto hay que seleccionar el estado, el municipio (del área de estudio) y los puntos que contengan simultáneamente nivelación y GPS.

Los valores de la ondulación de geoide de los modelos EGM2008, EIGEN6C4, GECO, XGN2019 (para el área de estudio Figura 3) se puede descargar del siguiente enlace:

<http://icgem.gfz-potsdam.de/calcgid>

Se utilizaron los parámetros de descarga siguientes:

Model Selection: Longtime model – EGM2008

Functional selection: geoid

Grid selection: Norte:30.5, sur:28.5, Oeste: -111.5,este:-109.5, grid step:0.0025

Reference system: WGS84

Tide system: free tide, Figura 24

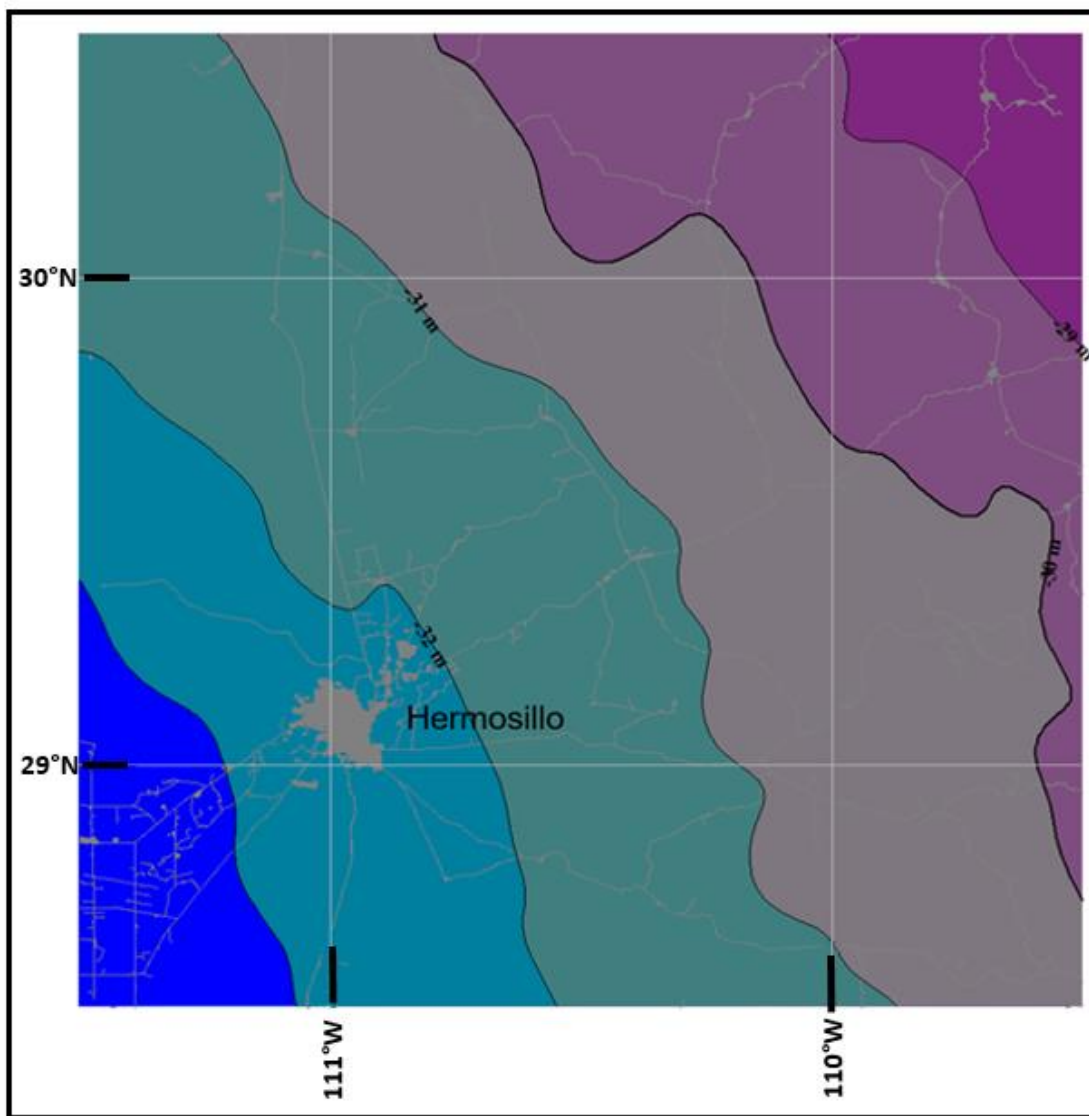


Figura 4.17. Curvas de nivel de alturas geoidal del modelo EGM2008 ($N_{EGM2008}$), con la siguiente estadística: Máximo: -28.319 m, mínimo: -33.982 m, media: -30.997 m, desviación estándar: 1.194 m.

Los valores de la ondulación de geoide del modelo GGM10 se puede descargar del siguiente enlace

<https://www.inegi.org.mx/app/geo2/alturasgeoidales/inicio.jsp>

La página da la opción de descargar los datos de manera puntual, como una serie de puntos y como una malla regular (Figura 4.18).

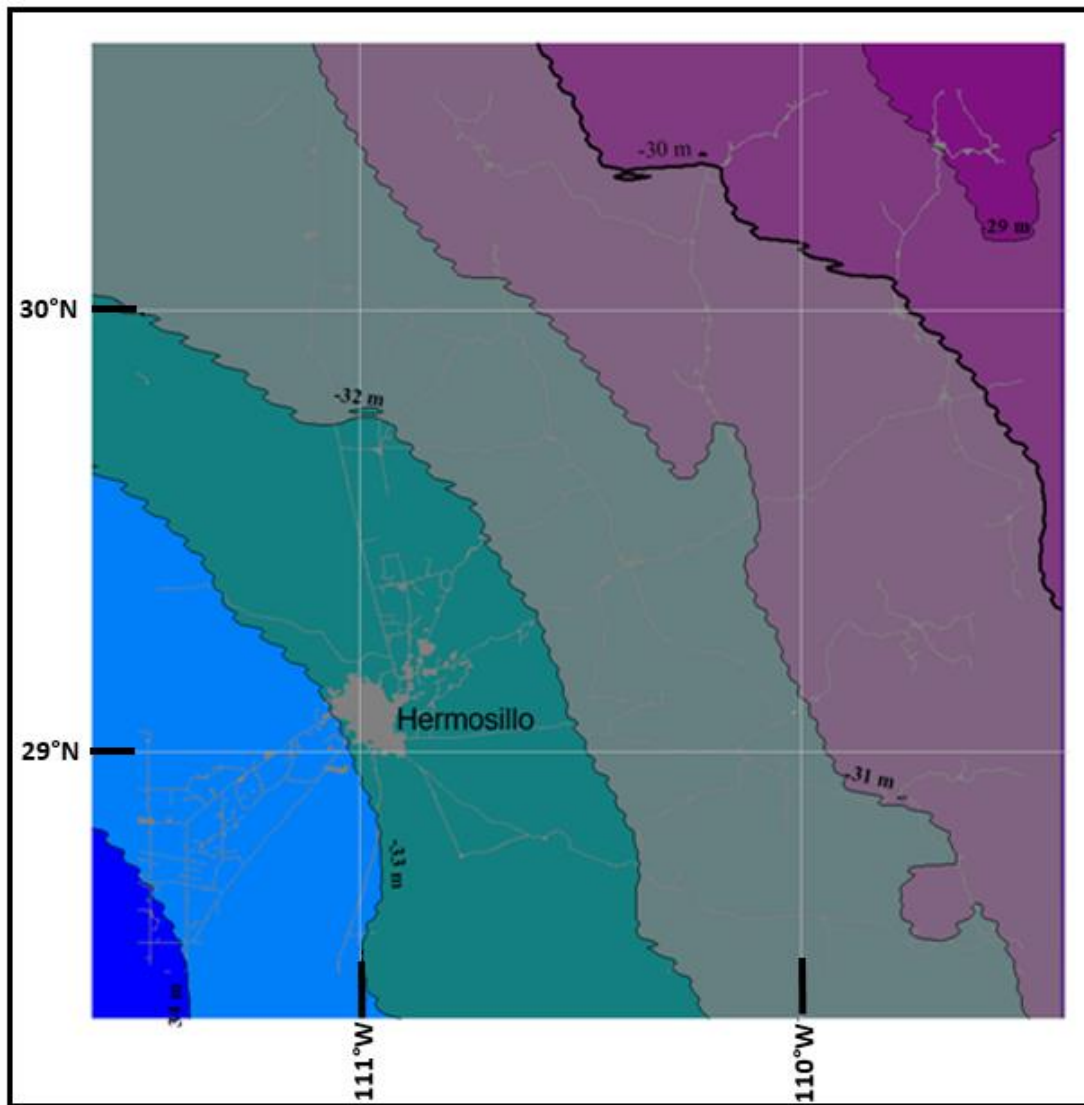


Figura 4.18. Curvas de nivel de alturas geoidales de modelo GGM10 (N_{GGM10}), con la siguiente estadística: Máximo: -28.560 m, mínimo: -34.430 m, media: -31.437 m, desviación estándar: 1.233 m.

Se descargaron un total de 407 puntos con datos de bancos de nivel y GPS simultáneamente con los (SRV) sistemas de referencia vertical NAVD27. De la diferencia entre en la altura elipsoidal (GPS) y el altura ortométrica (BN) se obtiene la ondulación del geode N_{BNGPS} , en la misma localización buscamos la ondulación del geode de los modelo $EGM2008$ ($N_{EGM2008}$), $EIGEN6C4$ ($N_{EIGEN6C4}$), $GECO$ (N_{GECO}), $XGM2019$ ($N_{XGM2019}$), $GGM10$ (N_{GGM10}), figura 4.19

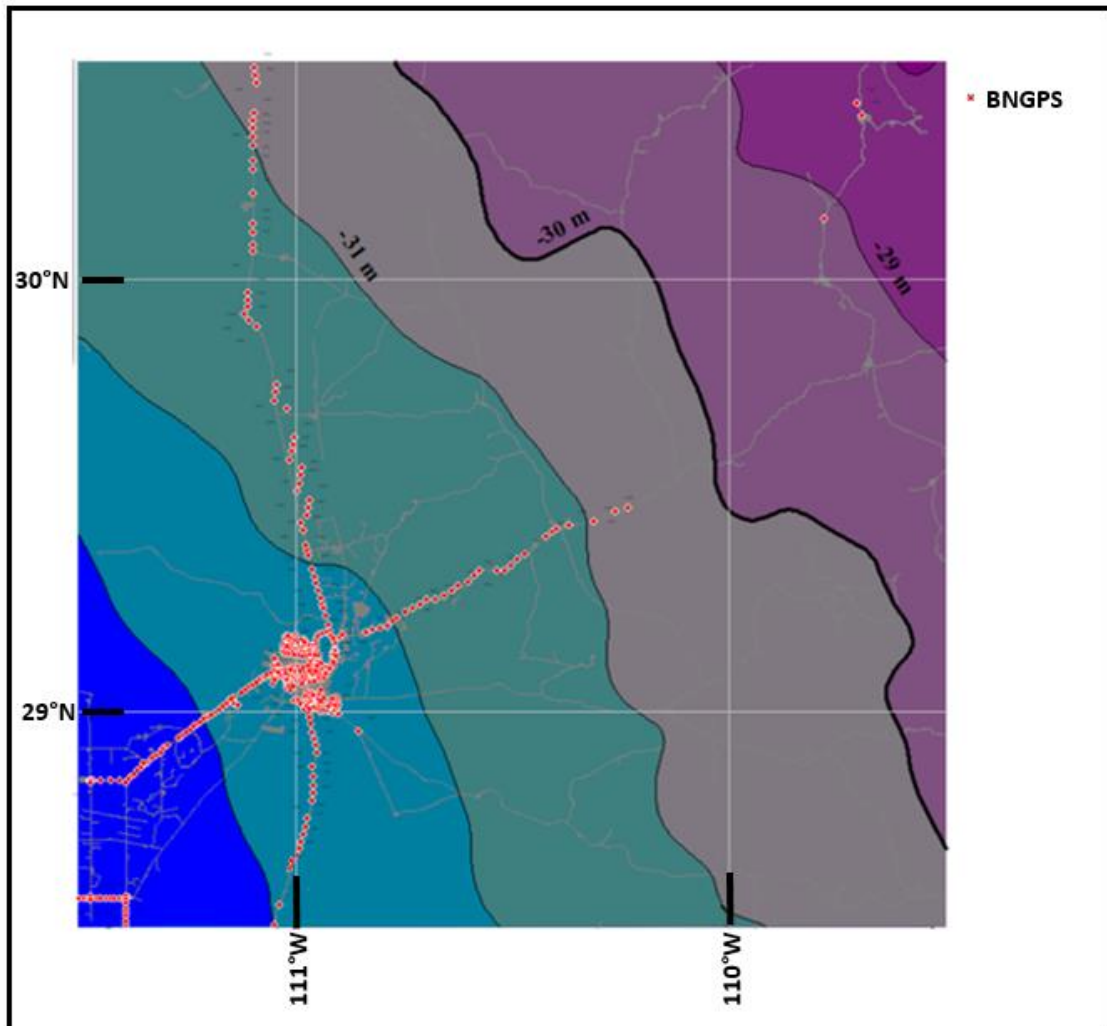


Figura 4.19. Localización de BN-GPS, en el área de estudio, sobre el modelo XGM2019e-2160, con la estadística: Máximo: -28.303 m, mínimo: -33.9220 m, media: -32.4351 m, desviación estándar: 0.6884 m.

Posteriormente se restaron ambas ondulaciones del geoide dando los siguientes resultados (tabla 4.6).

	NAVD29- EGM2008 (m)	NAVD29- EIGEN6C4 (m)	NAVD29- GECO (m)	NAVD29- XGM2019 (m)	NAVD29- GGM10 (m)
MEDIA	-0.1157	-0.1255	-0.1127	-0.0821	0.2646
DESV. EST.	0.0785	0.0778	0.0797	0.0825	0.0951

Tabla 4.6. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} SRV NAVD29 y del modelo EGM2008 ($N_{EGM2008}$), EIGEN6C4 ($N_{EIGEN6C4}$), GECO (N_{GECO}), XGM2019 ($N_{XGM2019}$), GGM10 (N_{GGM10}).

De los 407 puntos localizados en la zona de estudio se calculó la ondulación del geoide N_{BNGPS} . Para la misma localización buscamos la ondulación del geoide de los modelo $EGM2008$ ($N_{EGM2008}$), $EIGEN6C4$ ($N_{EIGEN6C4}$), $GECO$ (N_{GECO}), $XGM2019$ ($N_{XGM2019}$), $GGM10$ (N_{GGM10}), y se sumamos la corrección del terreno calculadas, se compararon ambas ondulaciones dando los siguientes resultados para sus diferencias (tabla 4.7).

	NAVD29- (EGM2008+CT) (m)	NAVD29- (EIGEN6C4+CT) (m)	NAVD29- (GECO+CT) (m)	NAVD29- (XGM2019+CT) (m)	NAVD29- (GGM10+CT) (m)
MEDIA	-0.1149	-0.1247	-0.1119	-0.0829	0.2654
DESV. EST.	0.0732	0.0725	0.0741	0.0773	0.0902

Tabla 4.7. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} (NAVD29) y de los modelo $N_{EGM2008+CT}$, $N_{EIGEN6C4+CT}$, $N_{GECO+CT}$, $N_{XGM2019+CT}$, $N_{GGM10+CT}$.

4.3 Cálculo de la contribución de las masas topográficas (Durango, Mérida, Toluca y Monterrey)

Se seleccionaron cuatro áreas de estudio en el país:

1. Durango en el estado de Durango, localizado entre los paralelos $24^{\circ}20'N$ y $23^{\circ}40'N$ y los meridianos $104^{\circ}45'W$ y $104^{\circ}20'W$ (Figura 4.20).

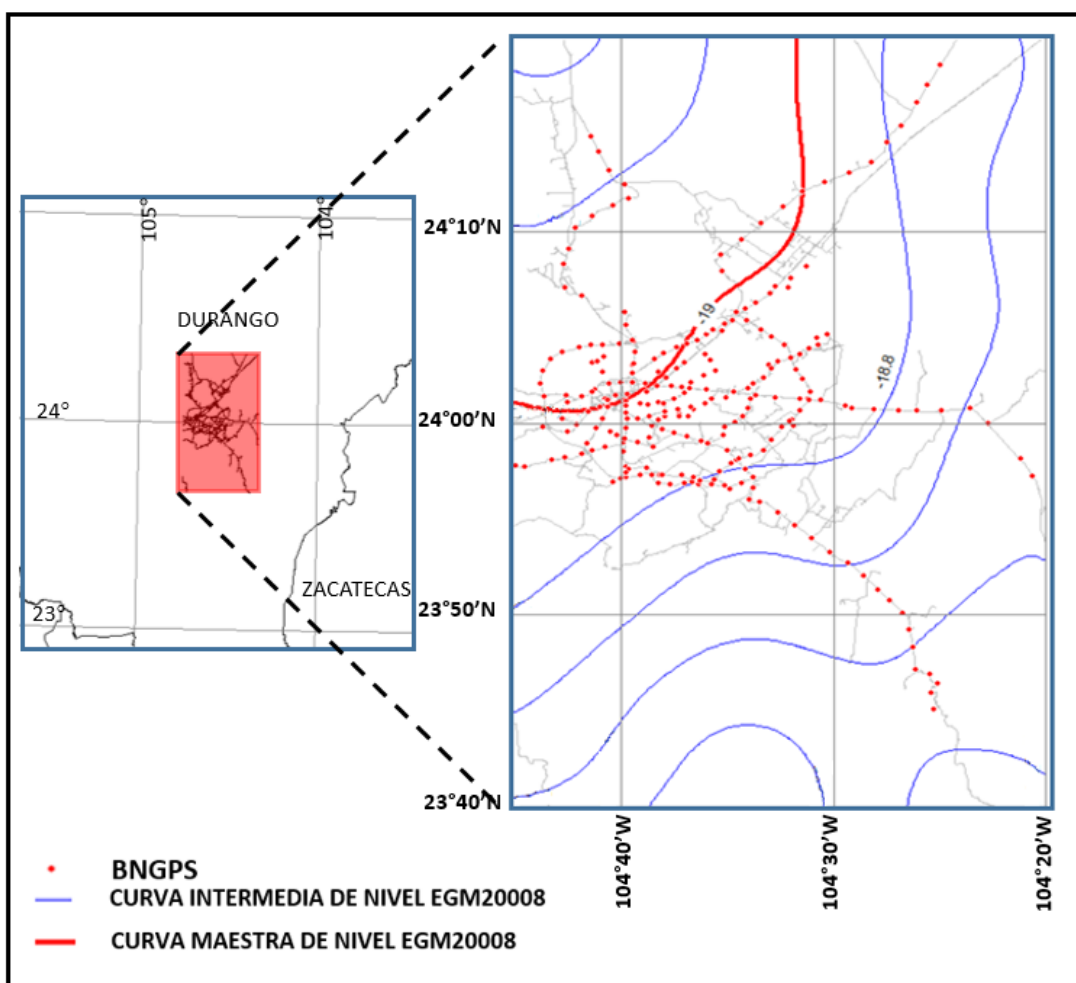


Figura 4.20. Área de Estudio Durango

2. Mérida en el estado de Yucatán, localizado entre los paralelos $21^{\circ}12'N$ y $20^{\circ}48'N$ y los meridianos $89^{\circ}48'W$ y $89^{\circ}24'W$ (figura.4.21).

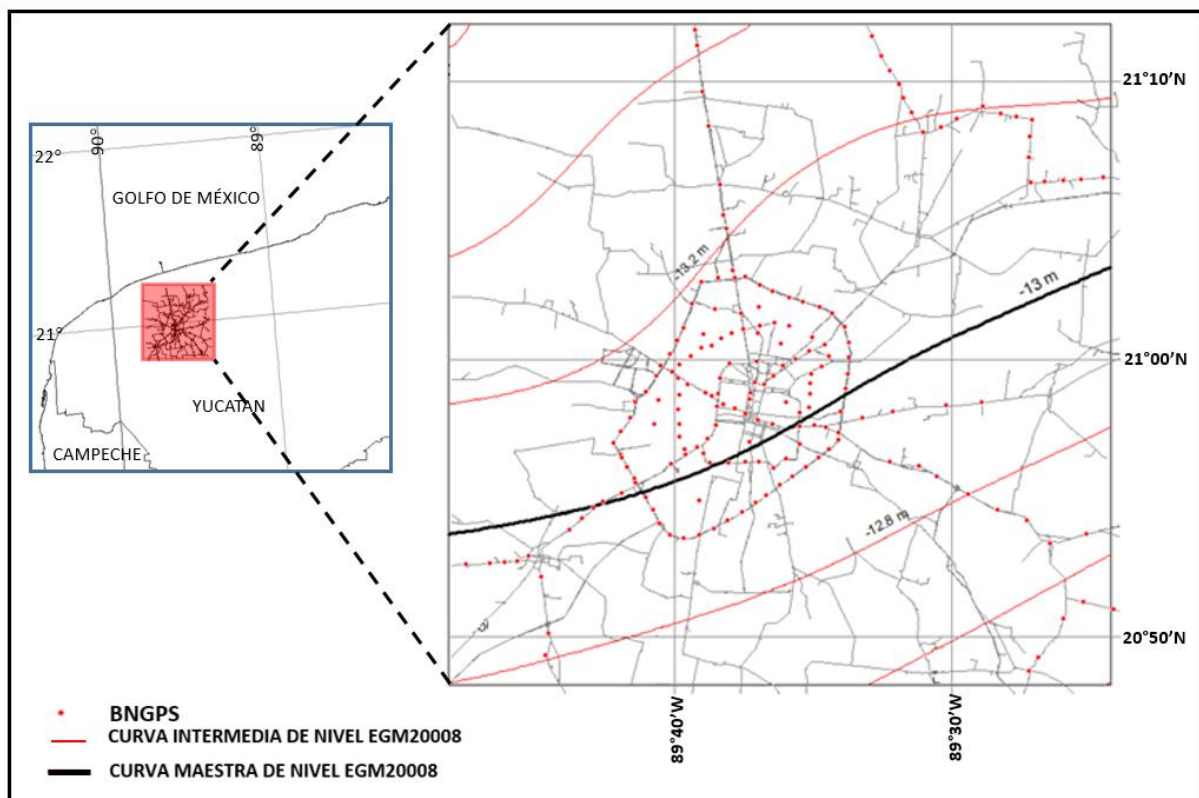


Figura 4.21. Área de Estudio Mérida.

3. Toluca en el Estado de México, localizado entre los paralelos $20^{\circ}06'N$ y $17^{\circ}54'N$ y los meridianos $100^{\circ}18'W$ y $98^{\circ}06'W$ (Figura.4.22).

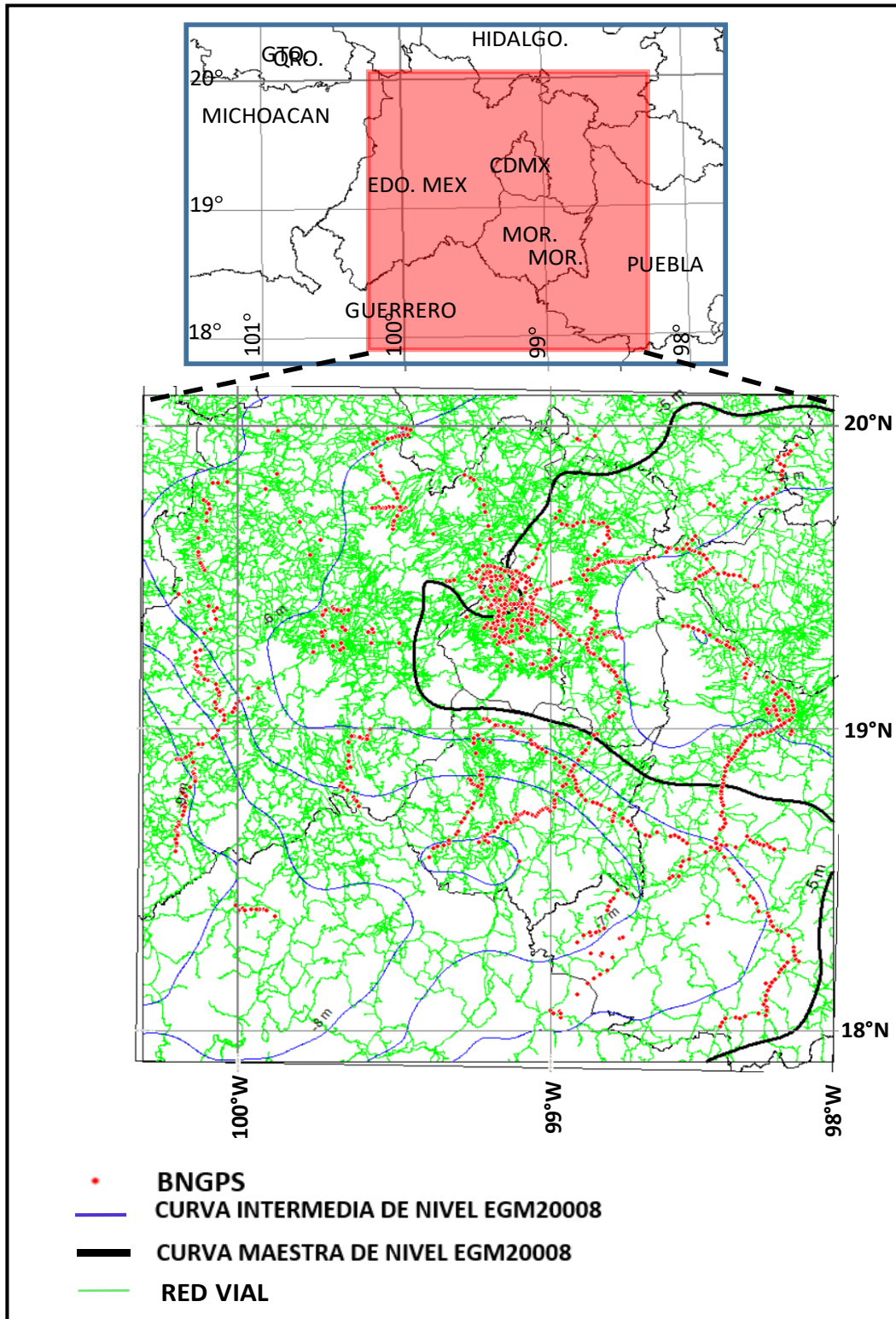


Figura 4.22. Área de Estudio Toluca.

4. Monterrey en el Estado de Nuevo León, localizado entre los paralelos $26^{\circ}18'N$ y $25^{\circ}12'N$ y los meridianos $100^{\circ}50'W$ y $99^{\circ}45'W$ (Figura.4.23).

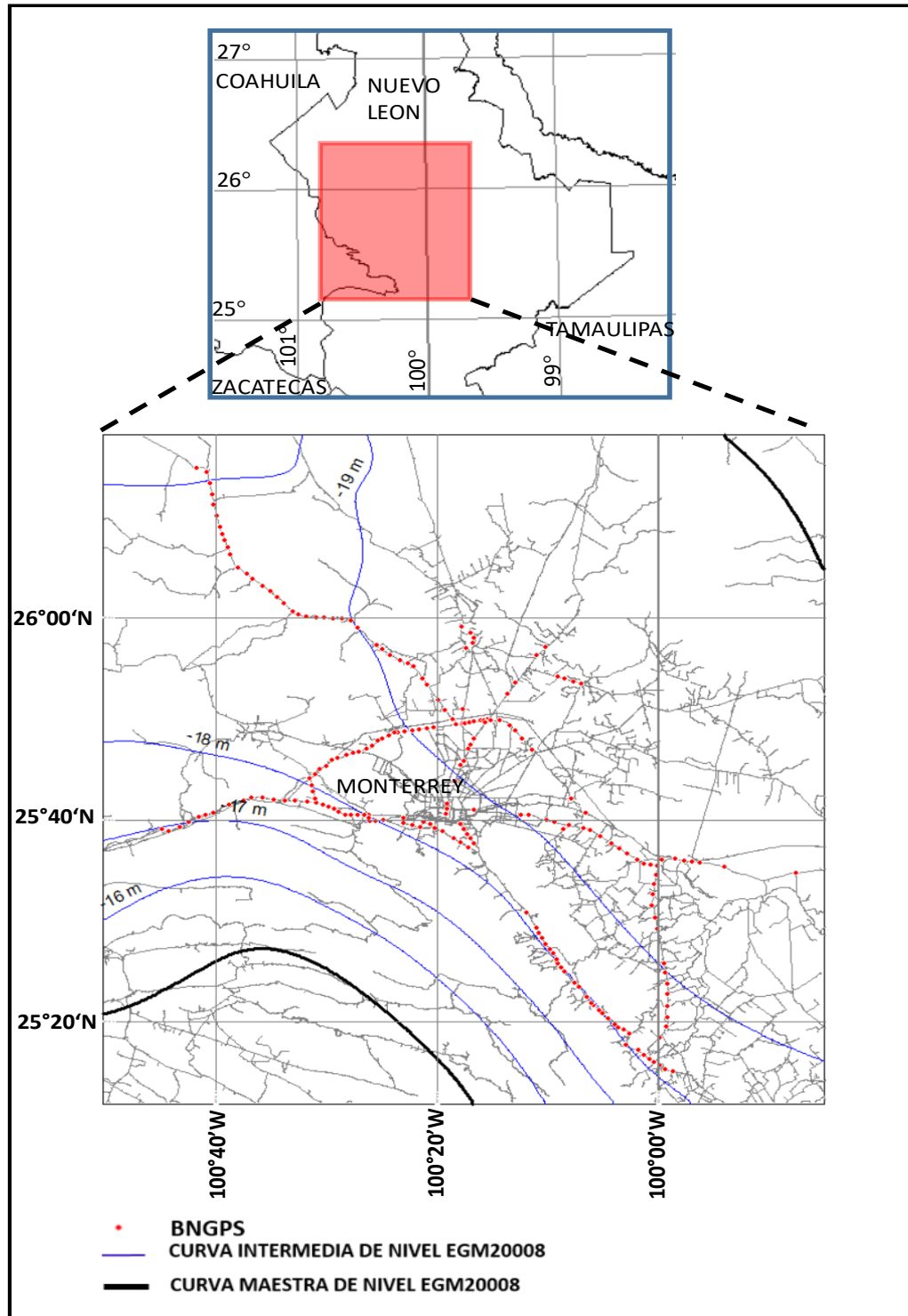


Figura 4.23. Área de Estudio Monterrey.

En las cuatro zonas de estudio, se localizaron puntos de la nivelación GPS, en la tabla 4.8 se muestra el número de bancos de nivel para cada zona de estudio, estos puntos se encuentran graficados en las figuras 4.20, 4.21, 4.22 y 4.23 en esas mismas figuras se pueden ver las curvas que representan las alturas geoidales del modelo EGM2008 en la región correspondiente.

Zona de Estudio	BNGPS
Durango	259
Merida	184
Toluca	938
Monterrey	179

Tabla 4.8. Bancos de Nivel GPS para cada zona de estudio

Siguiendo el procedimiento para el cálculo de la contribución de las masas topográfica se descargaron los modelos digitales: Earth2014.RET2014.5min.geod.grd y SRTM V4.1 para las regiones antes mencionadas, esto nos sirvió de base para el cálculo de las alturas topográficas residuales del terreno por medio de la aplicación del programa Global Mapper en combinación con el programa mallageo3.F90.

Se obtuvo como resultado el archivo H.DAT que sirve como entrada para el programa TC-1DFFT.F90, obteniéndose como resultado el archivo DN_TC1D.DAT el cual contiene las contribuciones de las masas topográficas. La representación de los resultados los podemos ver en las figuras 4.24 Durango, 4.25 Mérida, 4.26 Toluca y 4.27. Monterrey.

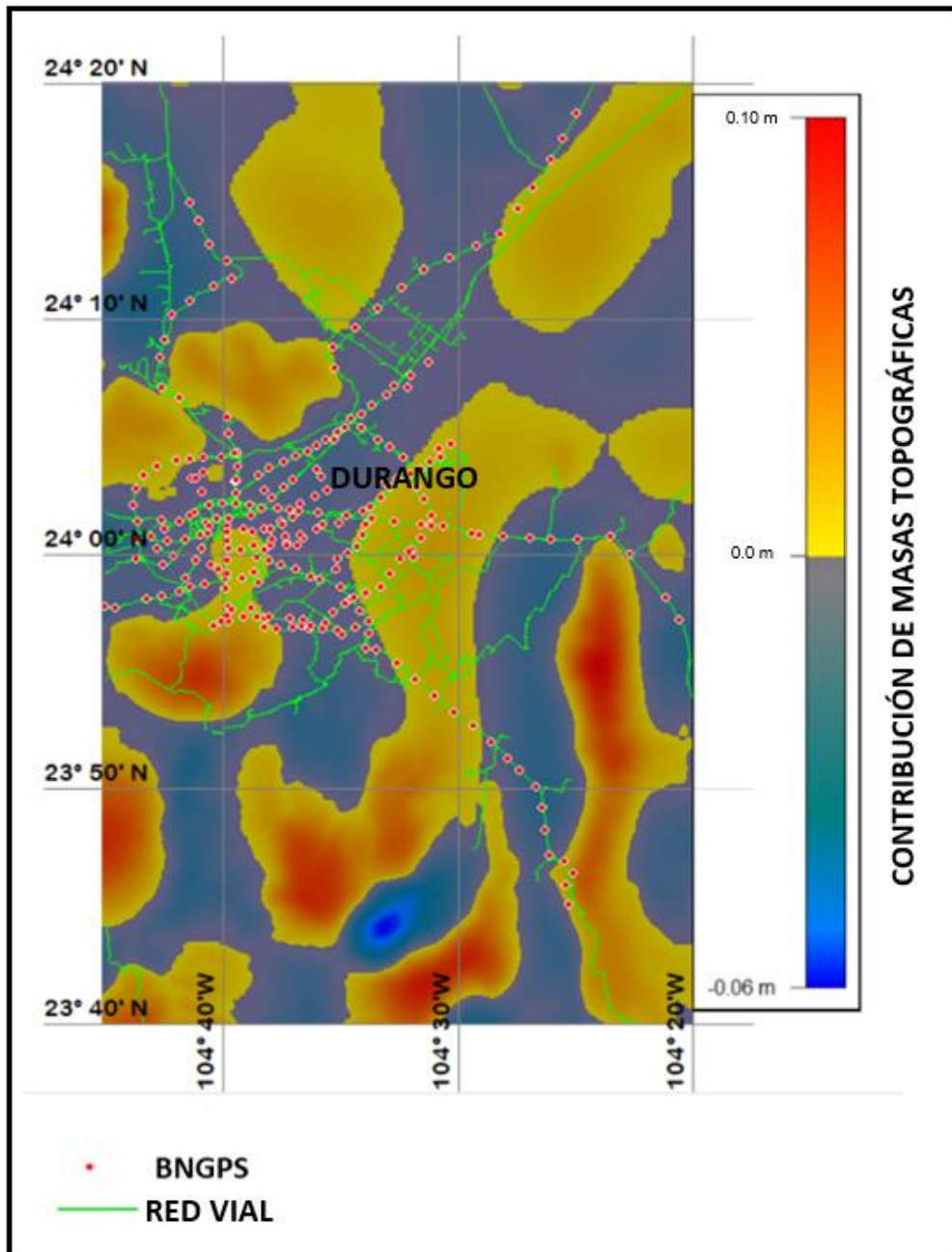


Figura 4.24. Contribución de las masas Topográficas para la región de Durango

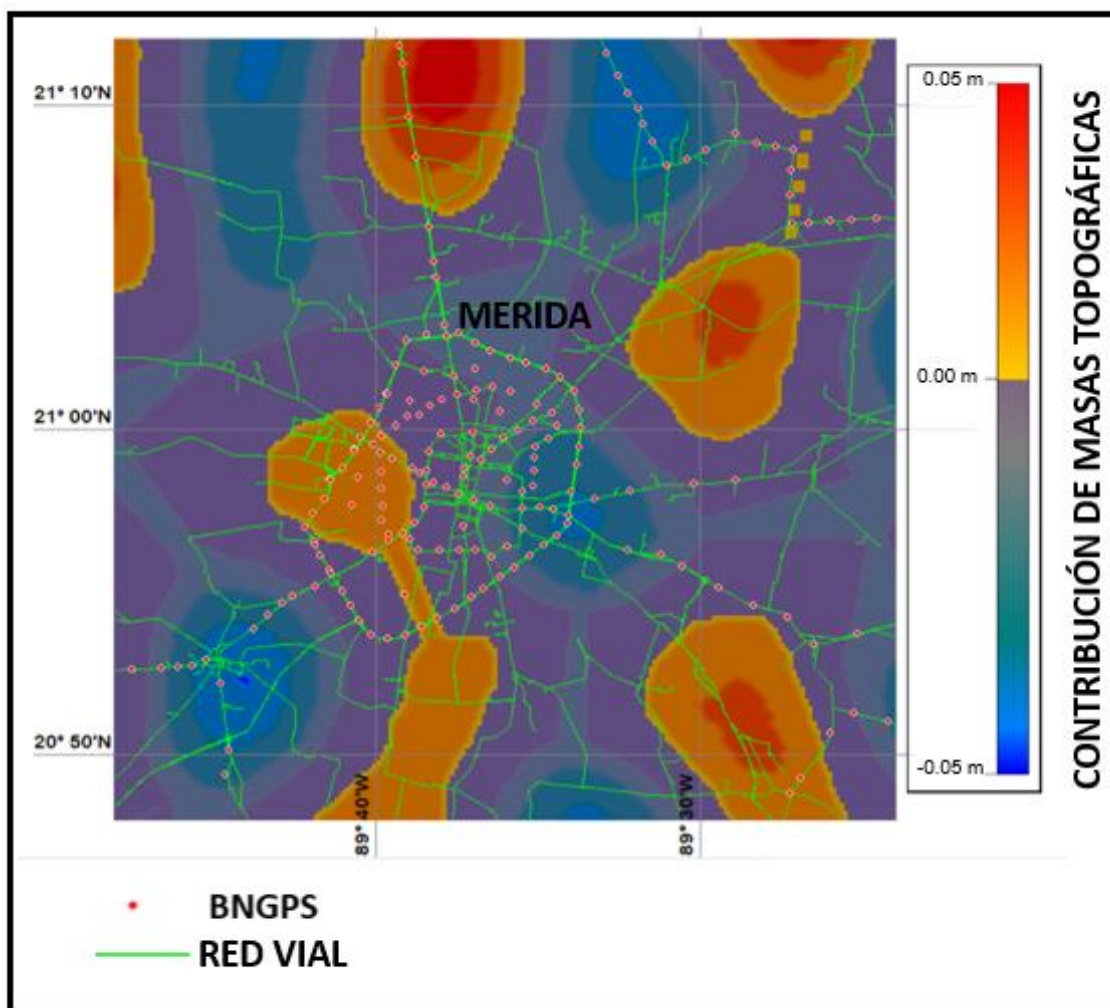


Figura 4.25. Contribución de las masas Topográficas para la región de Mérida

figura

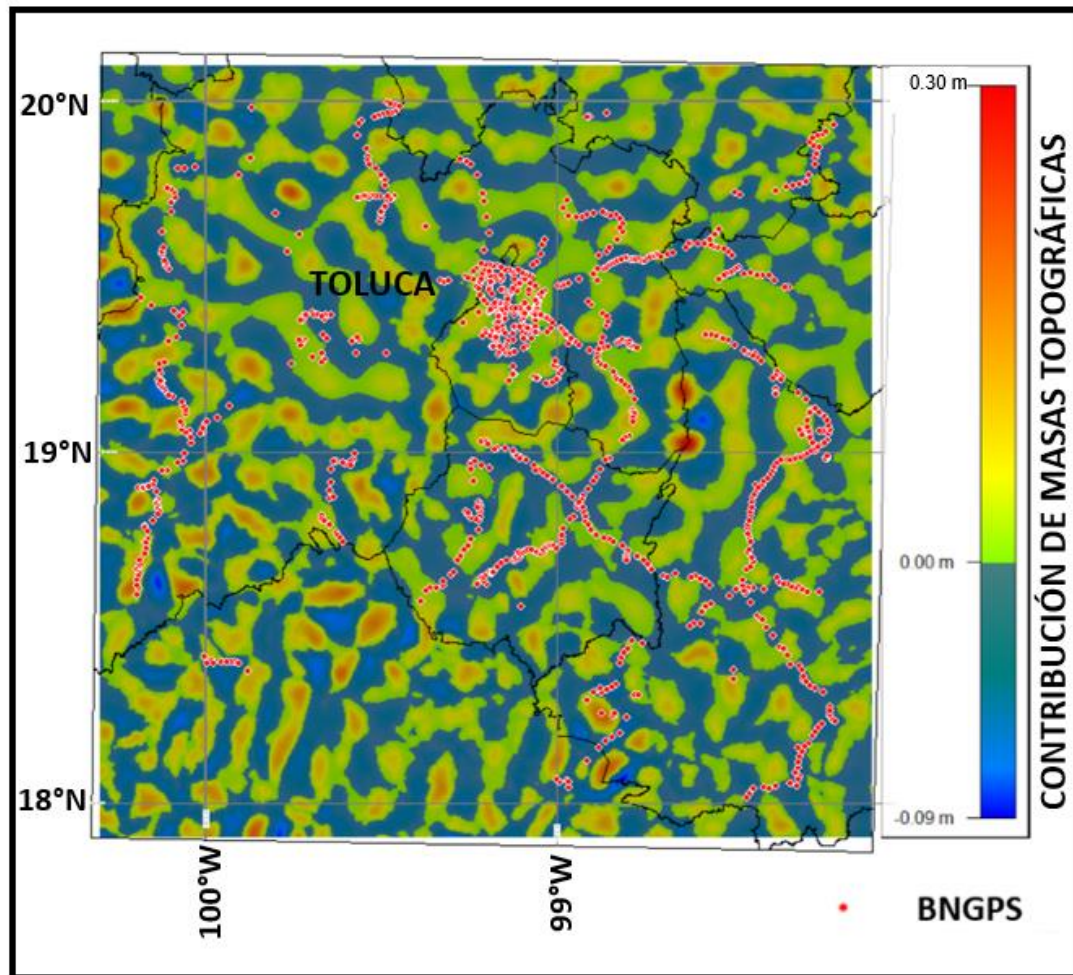


Figura 4.26. Contribución de las masas Topográficas para la región de Toluca

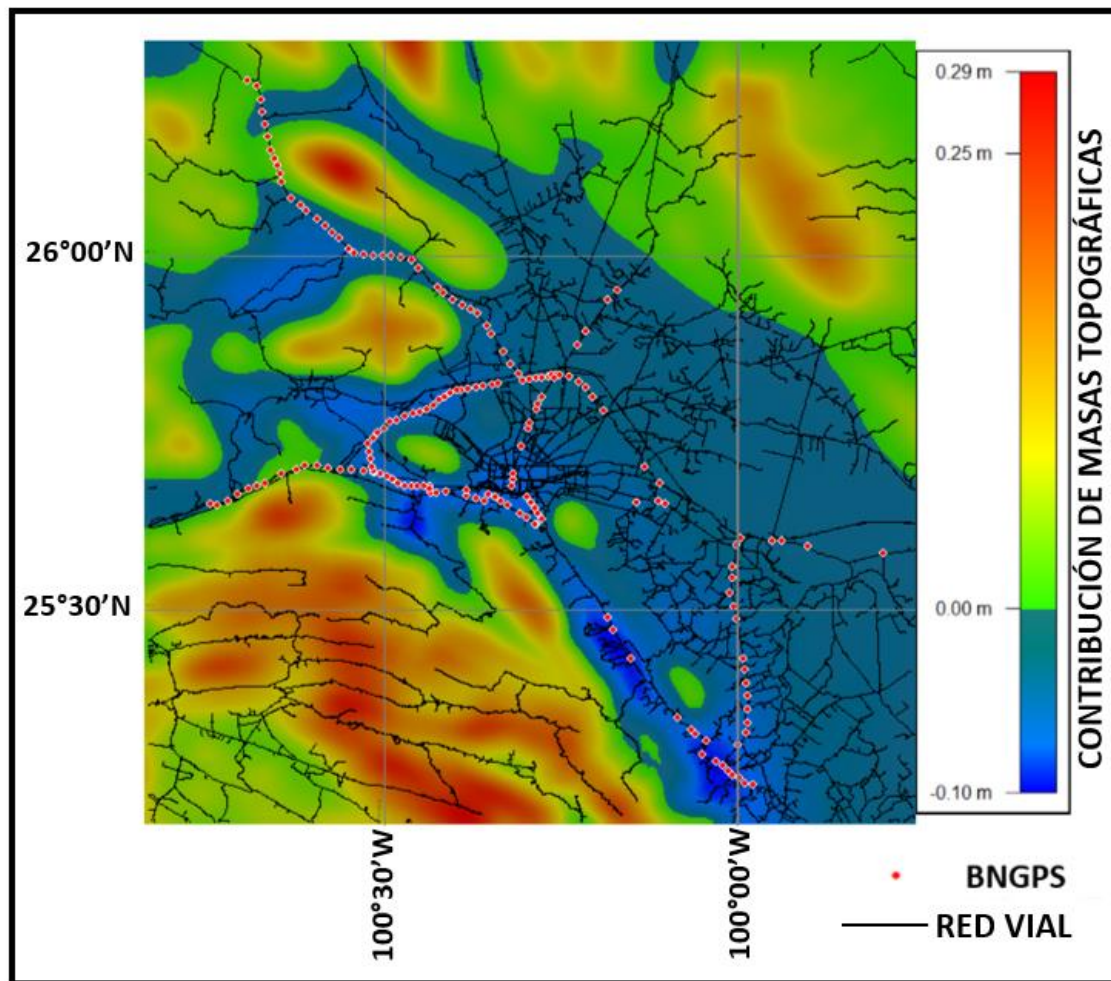


Figura 4.27. Contribución de las masas Topográficas para la región de Monterrey

Para los bancos de nivel GPS se determinaron las alturas geoidales (N) restando de la altura elipsoidal determinada con GPS la altura ortométrica, además para esta misma localización se determinó a la altura geoidal de los modelos EGM2008 y EIGEN6c4 y se realizó la comparativa de ambos valores de N.

Posteriormente sumamos el valor de la contribución de las masas topográficas a los valores de las alturas geoidales de los modelos EGM2008 y EIGEN6c4 y realizamos otra comparación con la altura geoidal determinada con los bancos de nivel GPS obteniéndose los siguientes resultados:

DURANGO		NIVGPS-EGM2008 (m)		NIVGPS-EIGEN C64(m)	
		SIN-CT	CON-CT	SIN-CT	CON-CT
	MEDIA	0.525	0.528	0.396	-0.399
	D.ESTANDAR	0.0629	0.0418	0.0625	0.0413
			0.0211		0.0212

MERIDA		NIVGPS-EGM2008 (m)		NIVGPS-EIGEN C64(m)	
		SIN-CT	CON-CT	SIN-CT	CON-CT
	MEDIA	-0.5890	-0.5886	-0.5939	-0.5934
	D.ESTANDAR	0.1023	0.0970	0.1021	0.0970
			0.0053		0.0051

MONTERREY		NIVGPS-EGM2008(m)		NIVGPS-EIGEN C64(m)	
		SIN-CT	CON-CT	SIN-CT	CON-CT
	MEDIA	-0.017	0.03	0.039	0.059
	D.ESTANDAR	0.0662	0.0471	0.0683	0.0482
			0.0191		0.0201

TOLUCA		NIVGPS-EGM2008(m)		NIVGPS-EIGEN C64(m)	
		SIN-CT	CON-CT	SIN-CT	CON-CT
	MEDIA	0.4158	0.4192	0.4206	0.4240
	D.ESTANDAR	0.1685	0.1343	0.1706	0.1354
			0.0342		0.0352

Tabla 4.9. Estadística de las diferencias entre la ondulación geoidal de los bancos de nivel GPS N_{BNGPS} (SVR NAVD29) y de los modelo $N_{EGM2008}$ y $N_{EIGEN6C4}$, y comparación ya incluyendo la contribución de masas topográficas (CT).

CAPITULO V

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En el presente trabajo se realizó un primer análisis de los modelos digitales de elevaciones SRTM, ETOPO y CEM-INEGI con 10,482 puntos de la red geodésica nacional pasiva de INEGI, con datos de nivelación y GPS simultáneamente.

Se obtuvieron desviaciones estándar del orden de 4.851 m para el SRTM, valor que es inferior al 9.0 determinado por Norteamérica por parte de Rodríguez (2005). Para el modelo CEM-INEGI se obtuvo una desviación estándar de 4.881 m la cual es ligeramente superior a lo indicado por INEGI que es de 4.5 m. En cuanto al modelo ETOPO las desviaciones Estándar alcanzan los 82.339 m.

Para el análisis se utilizó el modelo digital de elevaciones SRTM, ya que tiene una desviación estándar menor MDE CEM-INEGI y ETOPO, y los datos para generarlo se obtuvieron de una misión satelital de carácter global al igual que los modelos geopotenciales globales.

Se realizó también una comparativa entre modelos geopotenciales globales de resolución comparables al EGM2008 (grado y orden 2160), entre los que podemos mencionar el EIGEN_6C4, GECO y SSG_UGM_1, a nivel nacional, con una resolución de 0.005° (~540 m).

Se obtuvieron medias muy cercanas a 0 en todos los casos y la desviación estándar de las diferencias es máximas para el caso de los modelos EGM2008-EIGEN_6C4 de 0.095 m y en el caso de los modelos GECO-SSG_UGM_1. la desviación estándar de las diferencias es mínima del orden de 0.044 m.

Considerando las diferencias entre el GGM EGM2008, con respecto a los otros modelos tenemos las siguientes desviaciones estándar EGM2008-EIGEN_6c4: 0.095 m, EGM2008-GECO: 0.087 m y EGM2008-SSG_ugm_1: 0.069 m. Por lo que podemos considerar que las mayores diferencias se encuentran entre los modelos

EGM2008 y EIGEN6c4, conforme a lo esperado, ya que los modelos GECO y SSG-ugm-1, se basaron en el EGM2008 para su elaboración.

De la comparación de los GGM's con el modelo Gravimétrico GGM10 se tiene que en la mayoría de los casos la media es de -0.345 m. con una desviación estándar cercana a los 0.20 m.

Se obtuvieron mínimos del orden de -2.953 m y máximos de hasta 1.59 m. con un patrón muy específico en los que respecta a su localización ya que en todos los casos la localización del punto máximo fue en la sierra madre occidental, entre los estados de Durango y Sinaloa y el mínimo se localizó en Baja California cerca de la ciudad de Mexicali.

Del análisis de 10482 BNGPS se obtuvo que las alturas geoidales comparadas con los GGM's, mostraron los siguientes resultados: desviaciones estándar de las diferencias entre los modelos geopotenciales globales y los bancos de nivel GPS, son: para el EGM2008 es de 0.445 m, EIGEN_6C4 de 0.419 m, GECO de 0.427 m. y SSG_UGM_001 de 0.422 m, resultando las menores discrepancias en el modelo EIGEN-6C4.

Del análisis de las diferencias entre las alturas geoidales de los BNGPS y los modelos EGM2008, EIGEN_6C4, GECO y SSG_UGM_001, para una zona de estudio de 2°x2° en Hermosillo, se obtuvieron los siguientes desviaciones estándar: para el EGM2008 0.0785 m, EIGEN_6C4 0.0778 m, GECO 0.0797 m, XGM2019 (m) 0.0825 m y SSG_UGM_001 0.0951 m, posteriormente se calculó la contribución de las masas topográficas la cual se sumó a las alturas geoidales de los GGM's calculando de nuevo las desviaciones estándar dando los siguientes resultados EGM2008 0.0732 m, EIGEN_6C4 0.0725 m, GECO 0.0741 m, XGM2019 (m) 0.0773 m y SSG_UGM_001 0.0902 m, lo que implica una disminución en la dispersión de los resultados de EGM2008 0.0053 m, EIGEN_6C4 0.0053 m, GECO 0.0056 m, XGM2019 (m) 0.0052 m y SSG_UGM_001 0.0049 m, por lo que el efecto de las masas topográficas en la dispersión de los resultados está dentro del rango de 5 mm para esta zona de estudios.

En las zonas de Monterrey, Durango, Toluca y Mérida, analizando los modelos geopotenciales globales EGM2008 y EIGEN6c4, en comparación con los BNGPS de la zona correspondiente, se obtuvieron los siguientes resultados:

En la zona de estudio de Mérida, después de aplicar la contribución de las masas topográficas, se encontró una disminución en la dispersión de los resultados de EGM2008 0.0053 m, EIGEN_6C4 0.0051 m.

En Monterrey, después de aplicar la contribución de las masas topográficas, se logró una disminución en la dispersión de los resultados de EGM2008 0.0191 m, EIGEN_6C4 0.0201 m.

Con respecto a Durango, después de aplicar la contribución de las masas topográficas, se encontró una disminución en la dispersión de los resultados de EGM2008 0.0211 m, EIGEN_6C4 0.0212.

Por ultimo en la zona de Toluca, después de aplicar la contribución de las masas topográficas, se encontró una disminución en la dispersión de los resultados de EGM2008 0.0342 m, EIGEN_6C4 0.0352.

Se puede observar, una relación directa en la disminución de la dispersión de los datos al aplicar la contribución de las masas topográficas a los modelos Geopotenciales globales y compararlos con los BNGPS.

Se observa también una relación directa entre un mayor efecto de la contribución de las masas topográficas y las condiciones topográficas de las zonas de estudio, ya que en zonas planas como el caso de Mérida y Hermosillo el efecto es menor (~ 5 mm) que en las zonas más escarpadas (2-3 cm).

Finalmente, este trabajo demuestra que la metodología utilizada ayuda a mejorar la precisión de las alturas geoidales en zonas analizadas y que es susceptible de aplicación en otras áreas del país.

REFERENCIAS

- Agarwal, V., Bolch, T., Syed, T. H., Pieczonka, T., Strozzi, T., & Nagaich, R. (2017). Area and mass changes of Siachen glacier (East Karakoram). *Journal of Glaciology*, 63(237), 148-163.
- Álvarez, O., Gimenez, M., & Braitenberg, C. (2013). Nueva metodología para el cálculo del efecto topográfico para la corrección de datos satelitales. *Revista de la Asociación Geológica Argentina*, 70(4), 499-506.
- Amante, C., & Eakins, B. W. (2009). ETOPO1 arc-minute global relief model: procedures, data sources and analysis.
- Anderson, E. G. (1976): The effect of topography on solutions of Stokes' problem. Unisurv S-14, Report. School of Surveying, University of New South Wales, Australia.
- Barthelmes, F. (2014). Global models. *Encyclopedia of Geodesy*, Springer International Publishing, 1-9.
- Bolkas, D., Fotopoulos, G., & Sideris, M. G. (2012). Referencing regional geoid-based vertical datum's to national tide gauge networks. *Journal of Geodetic Science*, 2(4), 363-369.
- Bosch, M., & McGaughey, J. (2001). Joint inversion of gravity and magnetic data under lithologic constraints. *The leading edge*, 20(8), 877-881.
- Bosch, W., & Savcenko, R. (2010). On estimating the dynamic ocean topography—a profile approach. In *Gravity, Geoid and Earth Observation* (pp. 263-269). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Colombo, O. L. (1981). Numerical methods for harmonic analysis on the sphere. Ohio State Univ Columbus Dept of Geodetic Science And Surveying.
- Chao, B. F. (2005). On inversion for mass distribution from global (time-variable) gravity field. *Journal of Geodynamics*, 39(3), 223-230.

Farr, T. G., & Kobrick, M. (2001). The shuttle radar topography mission. AGUFG, 2001, G22B-0214.

Forsberg, R., & Tscherning, C. C. (1981). The use of height data in gravity field approximation by collocation. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 86(B9), 7843-7854.

Forsberg, R. (1984). A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling (No. OSU/DGSS-355). Ohio State Univ Columbus Dept Of Geodetic Science and Surveying.

Forsberg, R. and Tscherning, C. C. (2008): An overview manual for the GRAVSOF geodetic gravity field modelling programs. 2nd ed. Contract report for JUPEM. url: <http://cct.gfy.ku.dk/publ/cct/cct1792.pdf>.

Förste, C., Bruinsma, S., Abrikosov, O., Flechtner, F., Marty, J. C., Lemoine, J. M., ... & Biancale, R. (2014). EIGEN-6C4-The latest combined global gravity field model including GOCE data up to degree and order 1949 of GFZ Potsdam and GRGS Toulouse. EGUGA, 3707.

García, R. V. (2002). Local geoid determination from GRACE mission. Department of Civil and Environmental Engineering and Geodetic Sciences, The Ohio State University, Columbus, Report, 460.

Gerlach, C., & Rummel, R. (2013). Global height system unification with GOCE: a simulation study on the indirect bias term in the GBVP approach. *Journal of geodesy*, 87(1), 57-67.

Gilardoni, M., Reguzzoni, M., & Sampietro, D. (2016). GECO: a global gravity model by locally combining GOCE data and EGM2008. *Studia Geophysica et Geodaetica*, 60(2), 228-247.

Gorokhovich, Y., & Voustianiouk, A. (2006). Accuracy assessment of the processed SRTM-based elevation data by CGIAR using field data from USA and Thailand and

its relation to the terrain characteristics. *Remote Sensing of Environment*, 104(4), 409-415.

Grombein, T. (2017). Gravity forward modeling with a tesseroïd-based Rock-Water-Ice approach—Theory and applications in the context of the GOCE mission and height system unification. KIT Scientific Publishing.

Heiskanen WA, Moritz H (1967) Physical geodesy. Freeman, San Francisco

Hengl, T., Gruber, S., & Shrestha, D. P. (2003). Digital terrain analysis in ILWIS. International Institute for Geo-Information Science and Earth Observation Enschede, The Netherlands, 62.

Hirt, C., Featherstone, W. E., & Marti, U. (2010). Combining EGM2008 and SRTM/DTM2006. 0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data. *Journal of Geodesy*, 84(9), 557-567.

Heck, B., & Seitz, K. (2007). A comparison of the tesseroïd, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, 81(2), 121-136.

ICGEM (2015) International Centre for Global Earth Models (ICGEM). Available at: <http://icgem.gfz-potsdam.de>. Accessed 7 May 2015

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) Reporte Nacional de México (2017), Iniciativa Sobre la Gestión Global de la Información Geoespacial Dirección General de Geografía y Medio Ambiente.

Instituto Nacional de Estadística y Geografía (Inegi) (2013). Continuo de Elevaciones Mexicano. (CEM 3.0).

Jarvis, A., Reuter, H. I., Nelson, A., & Guevara, E. (2008). Hole-filled SRTM for the globe Version 4. available from the CGIAR-CSI SRTM 90m Database (<http://srtm.csi.cgiar.org>), 15, 25-54.

Jekeli C (2005) Spline representations of functions on a sphere for geopotential modeling. Reports of the department of geodesy science and survey, vol 475. Ohio State University, Columbus

Jekeli, C. (2009). Fourier geodesy. Lecture notes, Department of Civil Environmental Engineering and Geodetic Science, Ohio State University, Columbus, Ohio.

JLP, Shuttle Radar Topography Mission 2009, Technical Fact Sheet; <http://www2.jlp.nasa.gov/srtm/index.html>

Jordan, R., E. Caro, Y. Kim, M. Kobrick, Y. Shen, and F. Stuhr, Shuttle radar topography mapper (SRTM), Proc, SPIE, 2958, 412 – 422, 1996.

Karwel, A. K., & Ewiak, I. (2008). Estimation of the accuracy of the SRTM terrain model on the area of Poland. The international archives of the photogrammetry, remote sensing and spatial information sciences, 37(B7), 169-172.

Kostelecky, J., Klokocník, J., Bucha, B., Bezdek, A., & Förste, C. (2015). Evaluation of gravity field model EIGEN-6C4 by means of various functions of gravity potential, and by GNSS/levelling. Geoinformatics FCE CTU, 14(1), 7-28.

Lemoine FG, Kenyon SC, Factor JK, Trimmer RG, Pavlis NK, Chinn DS, Cox CM, Klosko SM, Luthcke SB, Torrence MH, Wang YM, Williamson RG, Pavlis EC, Rapp RH, Olson TR (1998) The development of the joint NASA GSFC and the National Imagery and Mapping Agency (NIMA) geopotential model EGM96. NASA/TP-1998-206861. Goddard Space Flight Center, Greenbelt

Liang, W., & Reißland, S. (2018). SGG-UGM-1: the high resolution gravity field model based on the EGM2008 derived gravity anomalies and the SGG and SST data of GOCE satellite.

Mader, K. (1951): Das Newtonsche Raumpotential prismatischer Körper und seine Ableitungen bis zur dritten Ordnung. Österreichische Zeitschrift für Vermessungswesen, Sonderheft 11.

Martinec Z (1998) Boundary value problems for gravimetric determination of a precise geoid. Lecture notes in Earth Sciences, vol 73. Springer, Berlin Heidelberg New York

Mayer-Gürr, T. (2007, October). ITG-Grace03s: The latest GRACE gravity field solution computed in Bonn. In Joint International GSTM and DFG SPP Symposium (Vol. 15).

Meissl P (1981) The use of finite elements in physical geodesy. Reports of the department of geodesy science and survey, vol 313. Ohio State University, Columbus

Mouratidis, A., Briole, P., & Katsambalos, K. (2010). SRTM 3 "DEM (versions 1, 2, 3, 4) validation by means of extensive kinematic GPS measurements: a case study from North Greece. International Journal of Remote Sensing, 31(23), 6205-6222.

Nagy, D., Papp, G., and Benedek, J. (2000): The gravitational potential and its derivatives for the prism. Journal of Geodesy 74(7–8):552–560. doi: 10.1007/s001900000116.

NGS, 2001. MEXICO and DMEX97, 2006. URL: <https://geodesy.noaa.gov/GEOID/MEXICO97/>

Novák, P., & Grafarend, E. W. (2005). Ellipsoidal representation of the topographical potential and its vertical gradient. Journal of Geodesy, 78(11-12), 691-706.

Pail, R., Fecher, T., Barnes, D., Factor, J. K., Holmes, S. A., Gruber, T., & Zingerle, P. (2016). The experimental gravity field model XGM2016. In International Symposium on Gravity, Geoid and Height System 2016-1st Joint Commission 2 and IGFS Meeting.

Pavlis, N. K., Factor, J. K., & Holmes, S. A. (2007). Terrain-related gravimetric quantities computed for the next EGM. In Proceedings of the 1st International Symposium of the International Gravity Field Service (IGFS), Istanbul (pp. 318-323).

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2008, June). EGM2008: An overview of its development and evaluation. In IAG Int. Symp. GGEO (Vol. 2327).

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2012). The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008). *Journal of geophysical research: solid earth*, 117(B4).

Pavlis, N. K., Holmes, S. A., Kenyon, S. C., & Factor, J. K. (2013). Correction to “The development and evaluation of the Earth Gravitational Model 2008 (EGM2008)”. *Journal of geophysical research: solid earth*, 118(5), 2633-2633.

Rapp, R. H., Wang, Y. M., & Pavlis, N. K. (1991). The OSU91 potential coefficient and sea surface topography models. Report, Dept. of Geodetic Science and Surveying, The Ohio State University, Columbus.

Rapp RH (1998) Past and future developments in geopotential modeling. In: Forsberg R, Feissel M, Dietrich R (eds) *Geodesy on the move – gravity, geoid, geodynamics and antarctica*, IAG Symposia, vol 119. Springer, Berlin

Rexer, M., & Hirt, C. (2014). Comparison of free high resolution digital elevation data sets (ASTER GDEM2, SRTM v2. 1/v4. 1) and validation against accurate heights from the Australian National Gravity Database. *Australian Journal of Earth Sciences*, 61(2), 213-226.

Reigber, C., Schwintzer, P., & Lühr, H. (1999). The CHAMP geopotential mission. *Boll. Geof. Teor. Appl*, 40, 285-289.

Rodriguez, E., C.S. Morris, J.E. Belz, E.C. Chapin, J.M. Martin, W. Daffer, S. Hensley, 2005, An assessment of the SRTM topographic products, Technical Report JPL D-31639, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, 143 pp.

Rummel, R., Yi, W., & Stummer, C. (2011). GOCE gravitational gradiometry. *Journal of Geodesy*, 85(11), 777.

Sansò, F., & Sideris, M. G. (Eds.). (2013). *Geoid determination: theory and methods*. Springer Science & Business Media

Shako, R., Förste, C., Abrikosov, O., Bruinsma, S., Marty, J. C., Lemoine, J. M., ... & Dahle, C. (2014). EIGEN-6C: A high-resolution global gravity combination model

including GOCE data. In Observation of the System Earth from Space-CHAMP, GRACE, GOCE and future missions (pp. 155-161). Springer, Berlin, Heidelberg.

Slater, J., J. Haase, B. Heady, G. Kroenung, J. Little, and C. Pessagno, NIMA's SRTM Data Processing Plans and Preliminary Data Assessments, Eos Trans. Amer. Geophys. Union, 82, 47, 2001.29/2002GL016643, 2003.

Sneeuw, N., & Van Gelderen, M. (1997). The polar gap. In Geodetic boundary value problems in view of the one centimeter geoid (pp. 559-568). Springer, Berlin, Heidelberg.

Sünkel H (1984) Splines: their equivalence to collocation. Reports of the department of geodesy science and survey, vol. 357. Ohio State University, Columbus

Sünkel H (1983). The generation of a mass point model from surface gravity data. Reports of the department of geodesy science and survey, vol. 353. Ohio State University, Columbus

Sünkel H (1981b) Point mass models and the anomalous gravitational field. Reports of the department of geodesy science and survey, vol. 328. Ohio State University, Columbus

Tapley, B. D., Bettadpur, S., Ries, J. C., Thompson, P. F., & Watkins, M. M. (2004). GRACE measurements of mass variability in the Earth system. Science, 305(5683), 503-505.

Torge, W., & Geodesy, W. (1991). de Gruyter. Berlin-New York.

Torge, W. (2001). Geodesy, Walter de Gruyter, Hawthorne.

Tscherning CC (1983). The role of high degree spherical harmonic expansions in solving geodetic problems. In: Proceedings of the international association of geodesy symposia, IUGG XVII general assembly, vol. 1. Reports of the department of geodesy science and survey. Ohio State University, Columbus, pp 431–441

Uieda, L., Barbosa, V., & Braitenberg, C. (2016). Tesseroids: forward-modeling gravitational fields in spherical coordinates. Geophysics 81: F41–F48.

USGS, NASA and METI Release ASTER Global DEM Version 3 URL:
<https://lpdaac.usgs.gov/news/nasa-and-meti-release-aster-global-dem-version-3/>
<https://lpdaac.usgs.gov/products/astgtmv003/>

y

Wenzel, G. (1998). Spherical harmonic models. WWW-Publication, Hannover.

Wieczorek, M. A. (2007). Gravity and topography of the terrestrial planets. *Planets and Moons*, 165-206.

Wildermann, E., Royero, G., Bacaicoa, L., Cioce, V., Acuña, G., Codallo, H., ... & Hoyer, M. (2012). Combining High Resolution Global Geopotential and Terrain Models to Increase National and Regional Geoid Determinations, Maracaibo Lake and Venezuelan Andes Case Study. In *Geodesy for Planet Earth* (pp. 901-907). Springer, Berlin, Heidelberg.

Wei, L. I. A. N. G., Xinyu, X. U., Jiancheng, L. I., & Guangbin, Z. H. U. (2018). The determination of an ultra-high gravity field model SGG-UGM-1 by combining EGM2008 gravity anomaly and GOCE observation data. *Acta Geodaetica et Cartographica Sinica*, 47(4), 425.

Wang, H., Wu, L., Chai, H., Hsu, H., & Wang, Y. (2016). Technology of gravity aided inertial navigation system and its trial in South China Sea. *IET Radar, Sonar & Navigation*, 10(5), 862-869.

Zingerle, P., Pail, R., Gruber, T., & Oikonomidou, X. (2019). The experimental gravity field model XGM2019e.