UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

DOCTORADO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

MODELADO LÓGICO DE RELACIONES DE PREFERENCIA BÁSICAS A PARTIR DE ARGUMENTOS

TESIS

como requisito para obtener el grado de

DOCTOR EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

presentada por:

M.C. JULIO CÉSAR PICOS PONCE

DIRECTORES:

DR. EDUARDO RENÉ FERNÁNDEZ GONZÁLEZ

DR. JORGE ADALBERTO NAVARRO CASTILLO

Culiacán, Sinaloa, México. **Junio de 2017**

Dedicatoria

A Vivian y Julio César

Agradecimientos

El camino que he recorrido para la culminación de esta tesis ha sido de grandes sacrificios para mí y mi familia, pero a la vez me ha dejado grandes enseñanzas, experiencia y me ha permitido conocer personas que me han guiado, motivado e inspirado a ser alguien de bien. La realización de este trabajo de tesis no hubiese sido posible sin el apoyo de respetables personas e instituciones.

Expreso mi reconocimiento y enorme gratitud a mis directores de tesis: al Dr. Eduardo René Fernández González y al Dr. Jorge Adalberto Navarro Castillo, por su enseñanza, profesionalismo, paciencia, dedicación y amistad. Dr. Fernández, le debo mucho, gracias.

De igual manera agradezco al Dr. Rafael Alejandro Espín Andrade, por su gran amistad, por su profesionalismo, sus sugerencias y consejos que coadyuvaron al desarrollo de este trabajo de tesis.

Agradezco a la Universidad Autónoma de Sinaloa, a su Facultad de Informática y al personal del Posgrado en Ciencias de la Información, por aceptarme como estudiante de doctorado y por proveerme de las condiciones y facilidades necesarias para mi desarrollo académico. De manera particular, expreso mi gratitud al Dr. Inés Fernando Vega López, por ser el primer contacto que tuve con este posgrado, por su apoyo y consejos desinteresados que me motivaron e inspiraron para entrar al doctorado.

También quiero agradecer al Instituto Tecnológico de Culiacán, por el apoyo laboral y por permitirme dedicarme de manera exclusiva a este doctorado. Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por el apoyo económico que me brindó durante el curso de mis estudios.

Agradezco al Dr, Oswaldo Cuén Téllez, al M.C. Juan Carlos Cabanillas Noris, al Dr. Diego Alonso Gastélum Chavira y al M.C. Omar Iván Gaxiola Sánchez, compañeros en este camino, por su apoyo, amistad y motivación. A mis amigos y compañeros del doctorado, gracias a todos.

Un especial agradecimiento a mi esposa Vivian Regalado y a mi hijo Julio César, por ser mi pilar. Fueron muchos los momentos que no pude estar con ellos. Les tocó también el sacrificio en este camino, sin embargo, estuvieron siempre apoyándome y motivándome para continuar con este compromiso. De igual manera, un especial agradecimiento a mi madre, hermanos y a la familia de mi esposa.

Índice

Lista de tablas

Lista de figuras

Notación y símbolos principales

		Página de primera aparición
MAUT	Multiple Attribute Utility Theory	1
AHP	Analytic Hierarchy Process	1
ANP	Analytic Network Process	1
MACBETH	Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique	1
ELECTRE	ELimination Et Choix Traduisant la REalité (ELimination and Choice Expressing REality)	2
PROMETHEE	Preference Ranking Organization Methods for Enrichment Evaluations	2
QUALIFLEX	QUALItative FLEXible method	2
ORESTE	Organization, Rangement Et Synthese De Donnes Relationnelles	2
EVAMIX	EVAluation MatrIX method	2
NAIADE	Novel approach to imprecise assessment and decision environments	2
MELCHIOR	Méthode d'Élimination et de CHoix Incluant les relation d'ORder	2
MAPPAC	Multicriterion Analysis of Preferences by means of Pairwise Alternatives and Criterion Comparisons	2
PRAGMA	Preference Ranking Global frecuencies in Multicriterion Analysis	2
IDRA	Intercriteria Decision Rule Approach	2
$\gtrsim$	Relación de preferencia débil en el enfoque normativo	2
DM	Decision maker	2
aSb	Relación de no inferioridad	3
$\mu(aSb)$	Función de membresía de S	3
$\sigma(a,b)$	Índice de credibilidad	3
$a\mathrm{S}_\sigma b$	Relación de no inferioridad difusa	5
$a\mathrm{P}b$	Relación de preferencia estricta	8
aIb	Relación de indiferencia	8
$\wedge$	Conjunción	9
N	Negación	9

aQb	Relación de preferencia débil	10
aRb	Relación de incomparabilidad	10
$\vee$	Disyunción	11
$\neg$	Negación	11
B	Backup (Respaldo)	21
D	Data (Datos)	21
W	Warrant (Garantía)	21
Q	Qualifier (Cualificador)	21
C	Claim (Pretensión)	21
R	Rebuttal (Refutación)	21
$\mu_{\bar{A}}(\,.\,)$	Función de pertenencia	23
$\bar{A}$	Conjunto difuso	24
Support(.)	Soporte de un conjunto difuso	24
A^{α}	α-corte	24
$\lvert\bar{A}\rvert$	Cardinalidad del conjunto difuso $\bar{A}$	24
$\lVert\bar{A}\rVert$	Cardinalidad relativa del conjunto difuso $\bar{A}$	24
H	Nombre de la variable lingüística	29
T(H)	Conjunto de términos de H	29
U(H)	Universo de discurso de H	29
X(H)	Variable difusa de la variable lingüística H	29
G(H)	Regla sintáctiva para H	29
M(X)	Regla semántica	29
$\cap$	Intersección	31
$\cup$	Unión	31
A^{C}	Complemento	31
$n_{\mathrm{i}}(x)$	Negación intuicionista	35
$n_{\mathrm{id}}(x)$	Negación intuicionista dual	35
N(x)	Negación estricta o fuerte	35
$N_{\lambda}(x)$	Negación complemento λ	35
Min( )	Función Mínimo	36
Max( )	Función Máximo	36

$\Pi(\,.\,)$	Función Producto	36
W(.)	Función de Lukasiewicz	36
$\mathrm{Min}_0(\,.\,)$	Función mínimo nilpotente	36
$M_f(\,.\,)$	Función Media cuasi aritmética	41
QAMBCL	Quasi Arithmetic Mean Based Compensatory Logic	41
GMBCL	Geometric Mean Based Compensatory Logic	42
$A \times B$	Producto cartesiano	46
MA	Matriz de adyacencia	48
$\preccurlyeq$	Relación de orden débil	49
$\prec$	Relación de orden estricto	49
$[a]$	Clase de equivalencia de *a*	51
MCDM	Multicriteria Decision Making	54
MCDA	Multicriteria Decision Aid	54
$a \succ b$	Relación de preferencia estricta en el enfoque normativo	59
$a \sim b$	Relación de indiferencia en el enfoque normativo	59
A'	Familia de acciones o alternativas	63
J	Familia consistente de criterios	63
$g_i(a_j)$	Evaluación de la alternativa a_j en el criterio g_i	63
$J^+(a,b)$	Coalición de criterios con preferencia estricta a favor de *a*	65
$J^=(a,b)$	Coalición de criterios indiferentes	65
$J^-(a,b)$	Coalición de criterios con preferencia estricta a favor de *b*	65
w_j	Peso del criterio j	65
$c(a,b)$	Concordancia	66
$d_j(a,b)$	Índice de discordancia	66
$\delta_j(a,a')$	Índice de concordancia	67
p_j	Umbral de preferencia estricta	67
q_j	Umbral de indiferencia	67
$\sigma(a,a')$	Índice del grado de credibilidad	68
J^*	conjunto de criterios donde $d_j(a,a') > c(a,a')$	68

Resumen

Dentro del marco de la ayuda a la toma de decisiones multicriterio (MCDA, por sus siglas en inglés), existen métodos de análisis basados en un enfoque relacional, como por ejemplo, la familia de métodos ELECTRE y PROMETHEE. Este tipo de métodos ofrecen como resultado una recomendación de solución para ciertos problemas que se presentan en el área de la toma de decisiones, como pueden ser el problema de elección (choice), clasificación (sorting) y ordenamiento (ranking) de alternativas. Para resolver este tipo de problemas, estos métodos dividen el problema a resolver en dos fases. La primera es la etapa de construcción, que consiste en modelar la integración de las preferencias del tomador de decisiones a partir de relaciones de preferencia. La información resultante de esta etapa sirve como información de entrada a la siguiente, llamada etapa de explotación del modelo. El resultado de esta última etapa, es la recomendación final particular dependiendo del problema de decisión que se esté abordando.

El método ELECTRE III se utiliza para ofrecer una recomendación para el problema de ordenamiento de las alternativas. En la etapa de construcción de este método, se construyen relaciones de no-inferioridad difusas $aS_{\sigma}b$ entre cada par de alternativas. Se ha observado que en ciertas situaciones el modelo que utiliza ELECTRE III para construir estas relaciones de no-inferioridad calcula valores de credibilidad que no se apegan al sentido común, lo cual puede llevar a que la recomendación resultante en la etapa de explotación no refleje el sentido común del decisor.

Basado en lo anterior, en este trabajo de tesis se crea un modelo para calcular el grado de credibilidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas, basado en argumentos que reflejan la manera intuitiva en la que un DM real lo haría, mediante el uso de la teoría de la decisión, la ayuda a la decisión multicriterio, teoría de la argumentación y lógica difusa. Para lograr a cabo este cometido, se diseñaron y aplicaron varios experimentos, cuyos resultados sirvieron como información de entrada y validación del modelo.

El modelo resultante genera resultados positivos, pero depende de una buena cantidad de parámetros iniciales que representan al decisor de cierta manera. Para evitar que en la práctica la utilización de este método requiera de cierto tiempo y esfuerzo cognitivo por parte del decisor, se plantea la obtención indirecta de los parámetros totales del modelo como un problema de optimización multiobjetivo, el cual puede resolverse con algoritmos evolutivos.

1 Introducción

1.1 Generalidades

La toma de decisiones es una actividad ineludible, práctica diaria en cualquier lugar donde nos encontremos. Tomamos decisiones en casa, trabajo, deporte, en todas las esferas de la vida. Ante algún cuestionamiento, elegimos: si, no; opción uno, opción dos; azul, rojo; etc., la mayor parte de las veces tomando en cuenta uno o unos cuantos criterios, basándonos en nuestras preferencias, experiencias o instintos. Sin embargo, en los campos de la ingeniería, negocios, política y ciencias, las decisiones pueden involucrar grandes cantidades de dinero y/o tener impacto directo en el bienestar de la sociedad. Además la toma de decisiones en estos campos suele ser compleja ya que se cuenta con una buena cantidad de opciones y criterios a considerar que pueden estar en conflicto entre sí.

De acuerdo con Doumpos y Zopounidis (2002), Roy (1985), se distinguen cuatro tipos de problemas de decisión. De esos problemas, Figueira et al. (2010) consideran como principales, a los tres últimos de la lista siguiente:

- Identificación y descripción de alternartivas por sus características
- Ordenamiento de alternativas en orden de la mejor a la peor (ranking)
- Selección de las mejores alternativas (choice)
- Clasificación de las alternativas en grupos homogéneos. Como caso particular las categorías pueden estar ordenadas preferencialmente (sorting).

El análisis matemático en la teoría de la decisión proporciona dos enfoques principales para construir un modelo global de preferencia de un actor envuelto en el proceso de decisión:

1) Un enfoque normativo - funcional basado en el axioma normativo de comparabilidad perfectamente transitiva (Fishburn, 1970). Como ejemplo de métodos que utilizan a este modelo tenemos MAUT, (Multiple Attribute Utility Theory) (Dyer, 2005), AHP (Analytic

Hierarchy Process), (Saaty, 1980), ANP (Analytic Network Process) (Saaty, 1996) y MACBETH (Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique) (e Costa y Vansnick, 1994).

2) Un enfoque relacional que tiene su representación más conocida como un modelo de relaciones de tipo "outranking" (Roy, 1996a). Como ejemplo de métodos que utilizan este modelo tenemos a la familia de métodos ELECTRE y la familia de métodos PROMETHEE (Brans y Vincke, 1985). Existen además otros métodos tales como QUALIFLEX (Paelinck, 1985), REGIME (Hinloopen et. al, 1983), ORESTE (Pastjin y Ve Leysen, 1989), EVAMIX (Martel y Matarazzo, 2005) y MELCHIOR (Leclercq, 1984), entre otros, que proponen definiciones y cálculos de relaciones binarias más o menos ligadas a la idea básica de los métodos ELECTRE, así como otros métodos como MAPPAC (Matarazzo, 1990) y PRAGMA (Matarazzo, 1990), entre otros.

La palabra "*outranking*" es la traducción en inglés de la palabra en francés "*surclassement*", utilizada inicialmente por Bernard Roy en sus trabajos de investigación en la década de los 60. Una relación del tipo "outranking" es una relación binaria que establece la preferencia entre dos objetos (Roy, 1996). Se lee "*es al menos tan bueno como*". En gran cantidad de trabajos de investigación, en la traducción al español de la palabra "outranking" se utiliza comúnmente la palabra "sobreclasificación". Cabe mencionar que esta palabra no existe en el diccionario de la real academia española. También se utiliza la palabra "*superación*", sin embargo, el utilizar esta palabra infiere que la relación "outranking" es antisimétrica, cuando no lo es. Debido a esto, en este trabajo se propone utilizar la expresión "*relación de no inferioridad*" como traducción al español de la expresión en inglés "*outranking relation*" y la expresión en francés "*relation de surclassement*".

De acuerdo al método normativo – funcional (French, 1993) el tomador de decisiones (DM, por sus siglas en inglés) debe establecer una relación de preferencia débil "*es al menos tan bueno como*" ($\succsim$), imponiendo un orden débil sobre el conjunto de decisión *A*. La afirmación "*a* es al menos tan buena como *b*" ($a \succsim b$) es considerada como una proposición totalmente falsa o verdadera, y si es falsa entonces $b \succsim a$ debe ser verdadera, implicando una preferencia estricta a favor de b. Esto significa que el DM ideal debe mostrar un poder ilimitado de discriminación. Por lo tanto, si el DM considera simultáneamente $a \gtrsim b$ y $b \gtrsim c$ entonces debe aceptar que $a \gtrsim c$.

Hasta cierto punto, las relaciones difusas proveen un compromiso entre los valores o funciones de utilidad y las relaciones de preferencia. Las relaciones difusas son numéricas, pero su poder de expresividad es mucho mayor que la de los valores o funciones de utilidad, ya que son buenos modelos de fenómenos tales como intransitividad e incomparabilidad (Fodor y Roubens, 1994). Estos fenómenos resultan de las limitaciones del actor (una persona real o un grupo de interesados), o del proceso de toma de decisiones, el cual ha sido bien discutido por Roy (1990).

Como consecuencia de preferencias pobremente definidas, falta de información, incertidumbre o imprecisión, un DM real a menudo establece la proposición "*a* es al menos tan buena como *b*" con un cierto grado de verdad, menor que 1. Cuando un DM limitado y real es normativamente animado a comportarse como uno ideal y éste declara que la proposición "*a* es al menos tan buena como *b*" es verdad, significa que su grado de verdad es lo suficientemente alto para el DM. De otra manera, el DM lo juzga como falso. Ahora remplacemos $\gtrsim$ por S; aSb significa que el DM considera que tiene los suficientes argumentos a favor de la proposición "a es al menos tan buena como b" y no tiene argumentos fuertes en contra. La lógica difusa parece un buen modelo que refleja estas situaciones. Una proposición tal como "a es considerada al menos tan buena como b" (denotada aSb) es vista como una afirmación con un grado de verdad $\sigma(a,b)$ en [0,1]. La proposición aSb tiene un valor de membresía $\mu(aSb)=\sigma(a,b)$ para el conjunto difuso de afirmaciones verdaderas sobre las preferencias binarias. Hay un cierto nivel de corte λ tal que $aSb \iff \mu(aSb) \geq \lambda$.

Fenómenos como intransitividad (aSb y bSc y sin embargo $anSc$) e incomparabilidad ($anSb$ y $bnSa$) se pueden manejar fácilmente con este modelo. No se imponen condiciones sobre el actor del proceso de la toma de decisiones y por lo tanto preferencias mal definidas son modeladas fácilmente.

Ahora bien, uno de los métodos relacionales más aceptados y aplicados en problemas reales (véase Almeida, et al., (2005), Goletsis, et al., (2003) y Mavrotas, et al., (2003), por citar algunos) son los métodos ELECTRE. Esta familia fue desarrollada originalmente por Bernard Roy y sus colegas a partir de la década de los 60's y han ido anexando nuevos métodos a esta familia en las siguientes décadas. Estos métodos permiten ofrecer una recomendación que ayude en la toma de decisiones a la entidad considerada como "tomador de decisiones" o "decision maker" (DM, por sus siglas en inglés), dependiendo de la problemática que se esté analizando, ya sea un problema de selección, clasificación u ordenamiento (Roy, 1990).

El uso de esta familia de métodos es relevante bajo el siguiente contexto (Figueira, et al., 2005):

- El DM quiere incluir en el modelo al menos tres criterios
- La información puede ser ambigua, vaga o contradictoria
- Al menos una de las siguientes situaciones se tiene que cumplir:
    - Las acciones se evalúan (por al menos un criterio) en escalas ordinales
    - Existe una fuerte heterogeneidad en la naturaleza de los criterios
    - Compensación entre criterios no se acepta generalmente
    - Para al menos un criterio lo siguiente es verdadero: pequeñas diferencias en las evaluaciones no son significantes en términos de preferencia, mientras que la acumulación de muchas pequeñas diferencias se vuelven significantes

De manera general, estos métodos cuentan con dos etapas (Roy, 1990): construcción y explotación. La etapa de construcción se encarga de comparar pares de las posibles acciones o alternativas que se estén estudiando, atendiendo a un conjunto de criterios considerados importantes y que deben ser tomados en cuenta para tomar una decisión. En esta etapa se construyen las relaciones de no inferioridad de manera comprensiva entre cada par de alternativas posibles. En la etapa de explotación, la cual utiliza la información obtenida en la primera etapa, se obtiene una recomendación según la problemática que se esté tratando de resolver.

Dicho esto, tomemos como caso de estudio uno de los métodos de la familia ELECTRE: ELECTRE III. Este método se utiliza para recomendar una solución para el problema de ordenamiento de las alternativas en consideración. En la etapa de construcción de este método, se construyen relaciones de no-inferioridad difusas $aS_{\sigma}b$ entre cada par de alternativas, es decir, se asigna un valor de credibilidad σ entre [0,1] a la afirmación "la alternativa *a* es al menos tan buena como la alternativa *b*" (aSb). En un experimento que consistió en un cuestionario realizado a un conjunto de estudiantes universitarios que hicieron el papel del DM (Fernández, 2013), se observó que en ciertas situaciones el modelo que utiliza ELECTRE III para construir estas relaciones de no-inferioridad calcula valores de credibilidad que no se apegan al sentido común. Para explicar esto, veamos el siguiente ejemplo, donde se muestra el resultado que se obtuvo al preguntarle a un decisor real que respondiera que tan cierto era que el automóvil A fuera al menos tan bueno como el automóvil B atendiendo a las evaluaciones que tenía cada uno de ellos en ciertos criterios. Se le explicó que todos los criterios tienen la misma importancia y ninguno tiene capacidad de veto.

En la tabla 1 se muestra la matriz de evaluación de cada automóvil.

Tabla 1.1- Matriz de evaluación de cada automóvil

Criterio	Auto A	Auto B
Diseño exterior	2 de 5	5 de 5
Diseño interior	2 de 5	5 de 5
Costo servicio mayor	$4,900	$2,000
Rendimiento de gasolina	14.9km/l	15km/l
Color	Blanco	Blanco
Seguridad	4 de 5	4 de 5
Tecnología	3 de 5	3 de 5
Costo de refacciones	Barato	Barato
Antigüedad	6 años	6 años
Confort ocupantes	3 de 5	4 de 5

¿Qué tan cierto es que el automóvil A es al menos tan bueno como el automóvil B?

a) Falso
b) Más falso que cierto
c) Ni cierto ni falso
d) Mas cierto que falso
e) Cierto

Figura.- 1.1 - Pregunta al decisor

En la figura 1.1 se muestra la pregunta que se le hizo a la persona, que respondió con la opción "*Falso*". Al cuestionarle cual fue su razonamiento para contestar esa opción, contestó que de manera intuitiva realizó los siguientes pasos:

1.- Agrupó los criterios de la manera siguiente:

a) Criterios donde el auto A es mejor que el auto B
b) Criterios donde el Auto B es mejor que el auto A
c) Criterios donde los autos A y B son indiferentes

El resultado de su comparación fue que el automóvil B aventajaba en 3 criterios (diseño exterior, diseño interior y costos de servicio mayor), el automóvil A sólo en un criterio (confort), y en 6 criterios estaban empatados (rendimiento de gasolina, color, seguridad, tecnología, costo de refacciones y antigüedad).

2.- Analizó la cantidad de criterios que tenía cada grupo. Para que su percepción de que el auto A es al menos tan bueno como el auto B fuera cierto tendría que cumplirse cualquiera de las dos siguientes opciones:

a) La cantidad de criterios a favor del auto A fuera mayor que la cantidad de criterios a favor del auto B, o, en su defecto,
b) que la cantidad de criterios en donde estuvieran empatados fuera significativa y que el resto de criterios estuvieran balanceados unos a favor del auto A y otros a favor del auto B

Como ninguna de las dos condiciones anteriores se cumplen, el decisor determinó como "*falso*" la respuesta correcta. Otro aspecto que lo ayudó a determinar esta respuesta fue que percibió que en los criterios en que el auto B era mejor había una notable diferencia en las evaluaciones, es decir, percibió una fuerza con intensidad significativa en contra del auto A. Si se utiliza el método ELECTRE III para calcular σ(A,B) como en (Roy, 1990) para este ejemplo, se obtiene un valor de σ(A,B) = 0.7. Si asignamos valores entre cero y uno a las etiquetas lingüísticas "cierto", "casi cierto", "más cierto que falso", "ni cierto ni falso", "más falso que cierto", "casi falso" y "falso" de la manera siguiente:

- Cierto 0.95 – 1.00
- Casi cierto 0.80 – 0.95
- Mas cierto que falso 0.56 – 0.79
- Ni cierto ni falso 0.45 – 0.55
- Más falso que cierto 0.35 – 0.44
- Casi falso 0.06 – 0.34
- Falso 0.00 – 0.05,

tenemos que el valor σ(A,B) = 0.7 equivale a la etiqueta "Mas cierto que falso", lo cual difiere de la respuesta del decisor real.

Esto es debido principalmente a tres factores:

1) El cálculo de σ(a,b) con el modelo de ELECTRE III está inspirado en las reglas de conteo de votos parecidas al método de Condorcet (Fishburn, 1977). Este tipo de reglas no necesariamente modelan la manera en que un decisor real compara las alternativas (Tsoukias, et al., 2002)

2) La comparación de la fuerza de las coaliciones de criterios a favor, en contra e indiferentes para el par de alternativas juega un rol significativo y

3) Que el modelo no toma en cuenta cuando existe intensidad significativa a favor de la preferencia, ni tampoco cuando existe intensidad significativa en contra de ella producto de coaliciones de criterios, ninguno de los cuales alcanza el umbral de veto.

En (Mosseau y Dias, 2004) se propone una modificación a este modelo, pero el objetivo es simplificar los cálculos del modelo existente solamente. En (Roy y Slowinsky, 2008) se propone un nuevo modelo donde se toma en cuenta dos nuevos efectos: preferencias reforzadas y contra-veto. En esta nueva propuesta ya se toma en cuenta la intensidad a favor de la preferencia pero tiene la característica de añadir más parámetros al modelo. Además, no justifica de una manera lógica la metodología utilizada y sigue sin tomar en cuenta cuando existe una coalición de criterios que, aunque ningún criterio alcance el umbral de veto, dicha coalición cuenta con una intensidad significativa en contra de la preferencia.

Del ejemplo anterior se nota lo siguiente: El decisor evalúa la existencia de una relación de no inferioridad $a\mathrm{S}b$ intuitivamente de manera indirecta. Primero evalúa si existen argumentos sólidos que respalden la existencia de una relación de preferencia estricta $a\mathrm{P}b$ o si existen argumentos sólidos que respalden la existencia de una relación de indiferencia $a\mathrm{I}b$. Esos argumentos los valida poniendo en una balanza condiciones a favor y en contra que él mismo considera lógicas. Si cualquiera de las relaciones $a\mathrm{P}b$ o $a\mathrm{I}b$ se cumplen, considera como válida la existencia de $a\mathrm{S}b$.

Esto tiene relación con la estructura básica de relaciones de preferencia definidas por Roy (1996). Esta estructura está compuesta por las relaciones de indiferencia I, preferencia estricta P, preferencia débil Q e incomparabilidad R. De acuerdo con Roy, la existencia de cada una de ellas depende de razones claras y positivas que justifiquen ciertas condiciones. En ese mismo trabajo, Roy expresa que la existencia de una relación de no inferioridad $a\mathrm{S}b$ corresponde a la existencia de claras y positivas razones que justifiquen ya sea una relación de preferencia, preferencia débil o indiferencia a favor de a, pero sin que exista una división clara establecida entre ellas. Como puede verse, esta definición tiene mucho en común con la manera intuitiva en la que el decisor evaluó la existencia de la relación $a\mathrm{S}b$ del ejemplo anterior.

Ahora bien, en (Roy, 1990), con ELECTRE III, la evaluación de $\sigma(a,b)$ se basa en dos condiciones:

1. **Concordancia**. Para que una relación de no inferioridad $a\mathrm{S}b$ sea validada, una mayoría suficiente de criterios debe estar a favor de esta afirmación.
2. **No Discordancia**. Cuando se cumpla la condición de concordancia, ninguno de los criterios que se encuentran en la minoría se debe oponer de manera muy fuerte a la afirmación $a\mathrm{S}b$.

Para que la afirmación $a\mathrm{S}b$ sea validada, se deben de cumplir las dos condiciones anteriores. La función $\sigma(a,b)$ asigna un valor de verdad entre [0,1] a la proposición "*a* es al menos tan buena como *b*". En términos generales, se define como:

$$\sigma(a,b) = c(a,b) \wedge N(d(a,b)) \qquad (1.1)$$

Dónde:

- $c(a,b)$ se interpreta como el valor de verdad del enunciado "la coalición de concordancia es suficientemente fuerte"
- $d(a,b)$ se interpreta como el valor de verdad del enunciado "la coalición de discordancia es suficientemente fuerte"
- $\wedge$ es el operador lógico difuso de conjunción
- N es el operador lógico difuso de negación

De lo anterior se observa que los conceptos sobre los que se basa el cálculo de $\sigma(a,b)$ se alejan de la definición original de $a\mathrm{S}b$ dada por Roy (1990), es decir, no parece concordar con la manera intuitiva en la que un decisor real evalúa la existencia de la relación $a\mathrm{S}b$. Otro aspecto a considerar es que el tipo de operador lógico difuso $\wedge$ que se utiliza en (1.1) es el operador de agregación *producto*, es decir, $a\wedge b = a.b$. Ante esto surge la siguiente pregunta: ¿Es este operador el que realmente representa la manera en la que el decisor realiza la conjunción bajo este contexto? En (Roy, 1990) no se justifica el por qué, simplemente se establece. Por ejemplo, el operador de agregación *producto* no permite ningún tipo de compensación. Es interesante saber si el decisor en algún punto de la evaluación de la existencia de cualquier relación de preferencia pueda considerar algún grado de compensación. En resumen, es interesante investigar las características que deba tener el operador de agregación a utilizar como operador lógico.

Ante lo expuesto anteriormente, es evidente que lo deseable es que el valor de la función σ(*a*S*b*) refleje de manera realista la forma de evaluar del decisor. Dado que la matriz compuesta de todos los valores de las comparaciones a pares sirve como información de entrada para la etapa de explotación, esto puede llevar a que la recomendación resultante en esta última etapa no refleje el sentido común del decisor.

Dado lo anterior, surge la necesidad de buscar una nueva forma de calcular el valor de la función σ(*a*S*b*), cuyo valor refleje de manera aceptable la manera intuitiva en la que un decisor real lo haría, incluyendo operadores de agregación que representen a los operadores lógicos difusos necesarios. La teoría de la argumentación ofrece conceptos e ideas interesantes aplicables en este punto. Existen trabajos muy interesantes donde se utiliza la teoría de la argumentación en el contexto de la teoría de la decisión (Martínez, 1999, Ouerdane, 2009) en donde se utiliza la teoría de la argumentación para proveer herramientas que ayuden a resolver los problemas de decisión mencionados anteriormente.

De acuerdo con Roy (1990), las definiciones de las relaciones de preferencia débil *a*Q*b*, no inferioridad *a*S*b* e incomparabilidad *a*R*b*, se basan en las relaciones de preferencia estricta *a*P*b* e indiferencia *a*I*b*. Si se busca una forma de evaluar directamente la existencia de *a*P*b* y *a*I*b*, la evaluación de *a*Q*b*, *a*S*b* y *a*R*b* se puede realizar a partir de ellas. Con esto, en lugar de buscar la manera de calcular directamente la existencia de *a*S*b*, es más general encontrar la manera de evaluar la existencia de *a*P*b* y *a*I*b*. Al conjunto de las relaciones de preferencia *a*P*b*, preferencia débil *a*Q*b*, indiferencia *a*I*b*, incomparabilidad *a*R*b* y de no inferioridad *a*S*b*, se le denomina conjunto de relaciones de preferencia básicas (Roy, 1990).

Con esto, surgen las siguientes preguntas de investigación.

1.2 Preguntas de investigación

- ¿Cómo calcular el grado de credibilidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas de una manera lógica basado en argumentos y lógica difusa que expresen la forma en la que un DM real realiza esa tarea?

- ¿Existe un conjunto de operadores lógicos difusos (conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$)) que representen de manera general la forma en la que los DM reales los perciben en situaciones de decisión dependiendo del contexto? ¿Qué características deben cumplir?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo general

Obtener un procedimiento general para calcular el grado de credibilidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas basado en la manera intuitiva en la que un DM real lo haría, con el estudio de la ingeniería del conocimiento, teoría de la argumentación y lógica difusa.

1.3.2 Objetivos específicos

- Desarrollar una estructura de argumentos que validen la existencia de las relaciones de preferencia básicas con el estudio de la ingeniería del conocimiento y la teoría de la argumentación.

- Validar esa estructura de argumentos experimentalmente.

- Desarrollar un procedimiento para obtener valores experimentales que sirvan para determinar un conjunto adecuado de operadores lógicos difusos que representen de manera general la forma en la que los DM reales los perciben en situaciones de decisión dependiendo del contexto.

- Desarrollar un modelo para calcular el grado de credibilidad de las relaciones de preferencia básicas y de no inferioridad con el uso de la lógica difusa y la estructura de argumentos validados anteriormente.
- Desarrollar un procedimiento que permita obtener de manera indirecta los parámetros necesarios para el modelo propuesto y que representen el comportamiento del DM involucrado en el contexto de decisión.

1.4 Estructura de la tesis

En el capítulo 2 se presentan los fundamentos teóricos necesarios. En el capítulo 3 se proponen, representan y validan experimentalmente los argumentos que modelan a las relaciones de preferencia básicas. En el capítulo 4 se propone un modelo para calcular el grado de verdad de la existencia de relaciones de preferencia básicas. Al final del mismo se presentan ejemplos didácticos. En el capítulo 5 se muestra un procedimiento para instanciar parámetros del modelo para decisores específicos y en el capítulo 6 las conclusiones y trabajo futuro.

2 Fundamentos teóricos

2.1 Teoría de la argumentación

2.1.1 Introducción

El término argumentación se usa para referirse “a la actividad total de plantear pretensiones, ponerlas en cuestión, respaldarlas produciendo razones, criticando esas razones, refutando esas críticas, etc” (Atienza, 2005). El término razonamiento se usa para referirse a “la actividad central de presentar las razones a favor de una pretensión, así como para mostrar de qué manera esas razones tienen éxito en dar fuerza a la pretensión” (Atienza, 2005). Por lo que se refiere a argumento, se diferencian dos sentidos del término. En un primer sentido, un argumento es un tramo de razonamiento (a train of reasoning), esto es, “la secuencia de pretensiones y razones encadenadas que, entre ellas, establecen el contenido y la fuerza de la proposición a favor de la que argumenta un determinado hablante” (Atienza, 2005). En el segundo sentido, los argumentos o, mejor, las disputas argumentativas (en inglés argument, en una de sus acepciones, significa debate, discusión) son “interacciones humanas a través de las cuales se formulan, debaten y/o se da vuelta a tales tramos de razonamiento” (Atienza, 2005).

Desde los tiempos de los antiguos filósofos griegos, los teóricos de la argumentación han buscado los requerimientos que hacen que un argumento sea válido mediante algún método de prueba apropiado, a partir de la examinación de los errores de razonamiento cuando se utilizan dichos argumentos (Rahwan y Larson, 2009). A estos errores se les llama falacias. Los textos sobre lógica durante los últimos 2000 años han tratado de ayudar a identificar a estas falacias y de cómo lidiar con ellas cuando son encontradas. El problema fue que la lógica deductiva no parecía ser de mucha utilidad para este propósito y pareciera que no existiesen otras estructuras formales obvias que pudieran aplicarse de una manera útil (Rahwan, 2009). El enfoque radical hecho por Hamblin (1970) fue el de redefinir el concepto de argumento para pensar en él no solo como un conjunto arbitrario de proposiciones, sino los pasos que una parte hace en un diálogo para ofrecer premisas que deben ser aceptadas por otra parte que duda de la presunción del argumento. Justo después del trabajo de Hamblin (1970), creció una escuela de conocimiento llamada lógica informal, que buscaba un nuevo enfoque práctico que enseñara a los estudiantes habilidades de pensamiento crítico, yendo más allá de la lógica deductiva clásica, con el fin de buscar otros métodos para analizar y evaluar argumentos. Aproximadamente al mismo tiempo, un grupo interdisciplinario de estudiantes asociados con el término "argumentación", provenientes de campos como la comunicación oral, ayudaron a construir junto con el grupo de la lógica informal dichos métodos prácticos y aplicarlos a ejemplos reales de argumentación (Johnson, 1987). Los métodos que se han desarrollado hasta el momento todavía se encuentran en un proceso de constante evolución. Recientemente, se han hecho mejoras en ellos debido a la colaboración entre teóricos de la argumentación y científicos de la computación. Otros desarrollos recientes han adoptado modelos y técnicas de argumentación en el campo de la inteligencia artificial, como sistemas multi-agentes e inteligencia artificial para el razonamiento legal.

2.1.2 Razonamientos monótonos y no-monótonos

De acuerdo con Brewka (1991) (ver también Lukaszewicz, 1990, Horty, 2001, Ginsberg, 1987, Donini et. al., 1990, Brewka et. al., 1997) tenemos que:

Razonamiento Monótono: El razonamiento monótono es un sistema de razonamiento el cual, una vez que un hecho ha sido afirmado, este no se puede alterar a lo largo del razonamiento. Las conclusiones o afirmaciones que obtiene el razonamiento monótono son definitivas. Conforme pasa el tiempo se añaden nuevas sentencias y pueden demostrarse nuevos teoremas, pero ninguno de estos invalidará una sentencia demostrada o conocida previamente.

Una lógica monótona no puede manejar varios tipos de razonamiento tales como el razonamiento por defecto (los hechos pueden ser conocidos únicamente por la carencia de evidencia de lo contrario), el razonamiento abductivo (los hechos sólo se deducen en calidad de explicaciones probables), el razonamiento acerca del conocimiento (la ignorancia de un hecho debe ser retractada cuando el hecho sea conocido), y la revisión de creencias (nuevo conocimiento puede contradecir creencias anteriores, obligando a revisarlas). Estas limitaciones son un inconveniente en gran cantidad de problemas que se presentan en inteligencia artificial, que tienen un carácter no monótono.

Un razonamiento se llama monótono cuando a lo largo del proceso el conjunto de «cosas sabidas» es siempre creciente. Pero en la realidad suele ocurrir que, a medida que avanza el proceso de inferencias, nuevas evidencias o acciones del mismo sistema anulan premisas o conclusiones anteriores, y para formalizar esto se necesita una lógica no monótona. Un proceso frecuente es el razonamiento por defecto: suponer que algo es verdadero (o falso) mientras no haya evidencia de lo contrario. El sistema que razona debe tener en cuenta que la aparición de esa evidencia puede tener un efecto retroactivo sobre las conclusiones obtenidas anteriormente, para lo que debe incluir un sistema de mantenimiento de la verdad.

Razonamiento No-Monótono: El razonamiento No-Monótono es un sistema de razonamiento el cual, después de la adición de nuevas sentencias, se puede invalidar resultados concluidos anteriormente. Esto permite estudiar el razonamiento basado en el sentido común, modelar reglas con excepciones, actualizar creencias después de nuevos descubrimientos o tener en cuenta las omisiones.

En la tabla 2.1 se resumen las principales características de este tipo de razonamiento:

Tabla 2.1 – Características de los razonamientos monótonos y no-monótonos

Razonamiento monótono	Razonamiento no-monótono
Una vez añadida una nueva sentencia al sistema no es necesario realizar ninguna comprobación para ver si existen inconsistencias entre la nueva sentencia y el conocimiento antiguo No hay ningún peligro de que las sentencias anteriores desaparezcan	Las nuevas sentencias pueden invalidar resultados anteriores Funcionan cuando se presentan las siguientes situaciones: • Información Incompleta • Situaciones cambiantes • Generación de supuestos en el proceso de resolver problemas complejos

2.1.3 Argumentos y argumentación

De acuerdo con Walton (2001) y Rahwan, (2009) (ver también Walton, 1990, Bench-Capon y Dunne, 2005, Prakken y Sartor, 2002), la palabra Argumento proviene del latín "argumentum" y esta a su vez está compuesta por "arguere" que significa "dejar en claro" y "mentum" cuyo significado corresponde a "instrumento, medio o resultado", entonces podemos decir que argumento es dejar en claro un asunto a través de un instrumento. Un argumento es una especie de prueba o demostración acerca de un tema en específico, que debe ser basada en el razonamiento lógico para que pueda ser aseverado. Generalmente este tipo de razón es utilizada como una expresión, bien sea escrita u oral, donde se afirma o se niega algo con firmeza y determinación. Un argumento es un conjunto de enunciados o proposiciones compuesta de tres partes: una presunción, un conjunto de premisas y una inferencia de las premisas a la presunción.

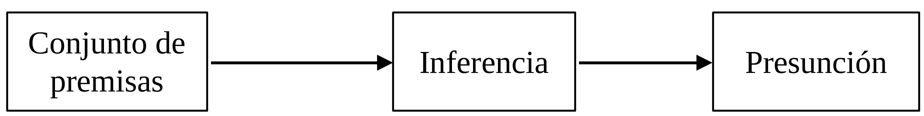


Figura 2.1. Composición de un argumento

El objetivo principal del argumento es tratar de convencer o persuadir a la persona contra la cual se expone sobre la veracidad de lo que se dice, acerca de ese tema particular que se discute en un lugar y tiempo dado. Para que esta demostración pueda cumplir con su finalidad debe contar con ciertas características esenciales de las cuales se dice que el argumento debe ser convincente, consistente, sólido y sin contradicciones, para que así no se vea afectada su credibilidad ni pueda ser rechazado. Las razones por la cuales se expone un argumento deben ser fundamentadas en el hecho de que se desea sustentar una hipótesis o idea y así poder justificar lo que se considera verdadero.

De acuerdo con Rahwan, (2009), la argumentación provee un método alternativo para mecanizar el razonamiento no-monótono. En particular, la argumentación ve el problema como el proceso de argumentar a favor o en contra de conclusiones. La no-monotonía surge cuando nuevas premisas posibilitan la aparición de conclusiones diferentes. Así, la argumentación es un modelo de razonamiento basado en la construcción y evaluación de argumentos cuyo propósito es soportar, explicar o atacar sentencias que pueden ser decisiones, opiniones o preferencias. La principal característica es que una presunción originalmente justificada, se puede volver injustificada, resultando en la derrocabilidad de argumentos.

2.1.4 Tareas que se llevan a cabo en el proceso de argumentación

Existen 4 tareas que se llevan a cabo en el proceso de argumentación o lógica informal (Besnard y Hunter, 2008):

1.- Identificación: Consiste en identificar las premisas y la presunción de un argumento en un texto de discurso. Una parte de esta tarea consiste en determinar en qué esquema de representación existente se ajustan los argumentos.

2.- Análisis: Consiste en encontrar premisas o presunciones implícitas que necesitan hacerse explícitas con el fin de evaluar apropiadamente al argumento.

3.- Evaluación: Esta tarea consiste en determinar si el argumento es débil o fuerte utilizando criterios generales que se pueden aplicar al mismo.

4.- Invención: Consiste en construir nuevos argumentos que se pueden utilizar para probar una presunción específica.

2.1.5 Esquemas de argumentación

Los esquemas de argumentación son formas de argumentos que capturan patrones estereotípicos del razonamiento humano, especialmente de los argumentos refutables (Walton y Gordon, 2005), (Ouerdane et. al., 2007, Ouerdane et. al.2008). El primer intento de ofrecer un esquema de argumentación fue el trabajo de Aristotle (1928). Existen varias propuestas de esquemas de argumentación, por ejemplo los desarrollados por Perelman y

Olbrechts-Tyteca (1969). En la actualidad, existe un interés considerable sobre los esquemas de argumentación en las ciencias de la computación, especialmente en la inteligencia artificial en campos como sistemas multi agentes, por su utilidad en el refinamiento de la capacidad de razonamiento de agentes artificiales (Reed y Norman, 2003; Verheij, 2003). Otros ejemplos de aplicaciones de esquemas de argumentación se pueden ver en (Walton Reed, 2008; Hastings, 1963; Kienpointer, 1986; Katzav y Reed, 2004). Un esquema de argumentación muy utilizado llamado Esquema de Argumentación de Toulmin (Toulmin, 2003) incorpora, contrario a los argumentos estándar consistentes de premisas y una presunción, elementos adicionales que describen diferentes roles que las premisas pueden jugar en el argumento. Esto permite formar argumentos más expresivos para ser validados.

2.1.6 Esquema de Argumentación de Toulmin

De acuerdo con Atienza (2005), el punto de partida de Toulmin es la constatación de que uno de nuestros modos de comportamiento lo constituye la práctica de razonar, de dar razones a otros a favor de lo que hacemos, pensamos o decimos. Aunque exista una gran variedad de usos del lenguaje, es posible distinguir entre un uso instrumental y un uso argumentativo. El primero tiene lugar cuando las emisiones lingüísticas consiguen directamente sus propósitos sin necesidad de dar razones adicionales; por ejemplo cuando se da una orden, se pide algo, etc. El uso argumentativo, por el contrario, supone que las emisiones lingüísticas fracasan o tienen éxito, según que puedan apoyarse en razones, argumentos o pruebas. Dicho uso tiene lugar, por ejemplo, cuando se plantea una pretensión jurídica (por ejemplo: X tiene derecho a recibir la herencia), se apoya a un candidato para un empleo, etc. Las situaciones y problemas con respecto a los cuales se argumenta pueden ser muy distintos y, en consecuencia, el razonamiento cambia en relación con las situaciones. Sin embargo, es posible plantear algunas cuestiones que son comunes: una de estas cuestiones es la de cuál es la estructura de los argumentos, esto es, de qué elementos se componen los argumentos, qué funciones cumplen dichos elementos y cómo se relacionan entre sí; otra es la de la fuerza de los argumentos, esto es, la cuestión de con qué intensidad y bajo qué circunstancias el material presentado en la argumentación suministra un apoyo en relación con la pretensión que se esgrime en la argumentación.

Así, el término argumentación se usa para referirse "a la actividad total de plantear pretensiones, ponerlas en cuestión, respaldarlas produciendo razones, criticando esas razones, refutando esas críticas, etc." (Toulmin, 2003).

Este esquema está compuesto por los siguientes elementos:

1.- Pretensión (C): Es lo que se quiere constatar en el argumento.

2.- Cualificador (Q): El cual le da la fuerza al argumento para la presunción.

3.- Datos (D): Que son como las premisas tradicionales.

4.- Garantía (W): El cual licencia la derivación de la presunción a partir de los datos.

5.- Refutación (R): El cual es una proposición que invalida la presunción, si la refutación es cierta.

6.- Respaldo (B): El cual representa la autoridad de la garantía.

En un argumento pueden distinguirse siempre cuatro elementos (Atienza, 2005): la pretensión, las razones o datos, la garantía y el respaldo. El primero de ellos, la pretensión (claim), significa tanto el punto de partida como el punto de destino de nuestro proceder en la argumentación. Al comienzo de la argumentación, pues, alguien (llamémosle proponente) plantea un problema frente a otro u otros (oponente). En caso de que el oponente cuestione de alguna forma la pretensión (en otro caso no surge la necesidad de argumentar), el proponente tendrá que dar datos (data) en favor de su pretensión inicial, que sean al mismo tiempo relevantes y suficientes. Los datos no son, pues, teorías generales, sino los hechos específicos del caso, cuya naturaleza varía de acuerdo con el tipo de argumentación de que se trate; en una argumentación jurídica típica, por ejemplo, serán los hechos que integran el supuesto de hecho de la norma aplicable al caso discutido. El oponente podrá ahora discutir de nuevo los hechos, pero incluso en caso de que los acepte puede exigir al proponente que justifique el paso de los datos a la pretensión. Los enunciados generales que autorizan dicho paso constituyen la garantía (warrant) del argumento. La naturaleza de las garantías depende también del tipo de argumento de que se trate, de manera que podrá consistir en una regla de experiencia, en una norma o principio jurídico, en una ley de naturaleza, etc. En todo caso, las garantías no son enunciados que descifran hechos, sino reglas que permiten o autorizan el paso de unos enunciados a otros. Podría decirse que mientras los hechos o datos son como los ingredientes de un pastel, la garantía es la receta general, que permite obtener el resultado o pretensión combinando los ingredientes. El proponente ha establecido ahora una garantía para su argumento, pero esto no es siempre suficiente. En ocasiones será necesario mostrar también que la garantía resulta válida, relevante y con un suficiente peso; sobre todo si hay diversas formas posibles de pasar de las razones a la pretensión, el proponente tendrá que mostrar que su garantía es superior a cualquier otra. Para ello deberá indicar el campo general de información o el respaldo (backing) que está presupuesto en la garantía aducida y que, naturalmente, variará según el tipo de argumento. Debe tenerse en cuenta que mientras que los enunciados de las garantías son hipotéticos, el respaldo puede expresarse en la forma de enunciados categóricos sobre hechos (Toulmin, 2003). La garantía no es, por tanto, una simple repetición de los hechos registrados en el respaldo, sino que tiene un carácter práctico, muestra de qué manera se puede argumentar a partir de tales hechos (ídem). Por otro lado, aunque tanto el respaldo como los datos o razones se refieran a hechos, se distinguen entre sí, entre otras cosas, porque mientras que siempre se necesita alguna razón para poder hablar de argumento, el respaldo sólo se hace explícito si se pone en cuestión la garantía.

Por supuesto, un argumento puede formar parte de una cadena de argumentos y no presentarse aisladamente. Pero ello parece que podría seguir representándose sin mayores problemas según el modelo propuesto. Así, la pretensión de un argumento puede funcionar también como una razón a favor de una nueva pretensión; las razones pueden convertirse en pretensiones que necesitan, por tanto, un nuevo argumento para ser justificadas; y la garantía puede verse también como la pretensión de un nuevo argumento, en cuyo caso lo que antes era el respaldo pasará a cumplir ahora la función de las razones, con el cual se plantea la necesidad de una nueva garantía para pasar de las razones a la pretensión, etc.

Los elementos anteriores nos permiten contar con un argumento válido o correcto. Una cuestión distinta es la de la fuerza de un argumento. Por un lado, la pretensión puede afirmarse con un grado de certeza que puede ser mayor o menor. Así, mientras que en la matemática (y en la lógica deductiva) el paso a la conclusión tiene lugar de manera necesaria, en la vida práctica no suele ser así, sino que D (de data = datos o razones), W (de warrant = garantía) y B (de backing = respaldo) prestan a C (de claim = pretensión) un apoyo más débil que suele expresarse mediante cualificadores modales (qualifiers), como: "presumiblemente", "con toda probabilidad", "plausiblemente", "según parece", etc. Por otro lado, el apoyo suministrado a C puede serlo sólo en ciertas condiciones, esto es, existen ciertas circunstancias extraordinarias o excepcionales que pueden socavar la fuerza de los argumentos y a las que se denomina condiciones de refutación (rebuttals).

Así, en la figura 2.2 finalmente se ilustra el esquema de Argumentación de Toulmin.

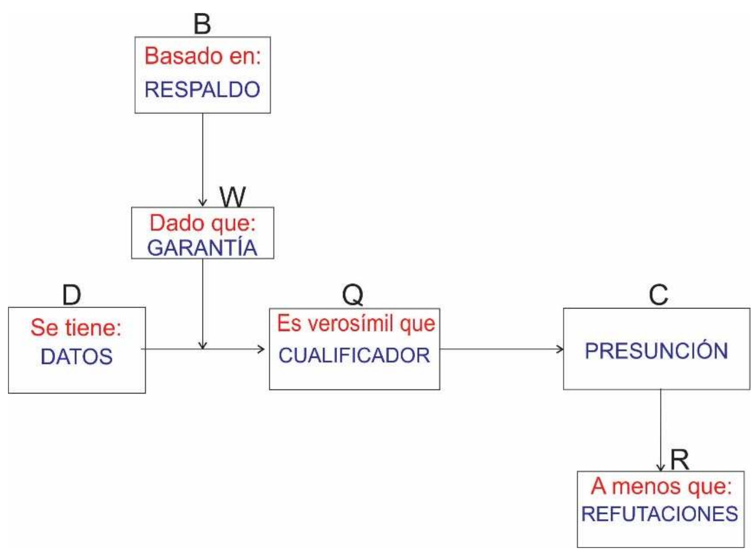


Figura 2.2.- Esquema de Argumentación de Toulmin

2.2 Conjuntos difusos y variables lingüísticas

La teoría de los conjuntos difusos tiene una más que breve existencia (Martínez, 1999) ya que las primeras publicaciones, en las que se introducía la idea clave de conjunto difuso, se produjeron en la década de los 60 (Zadeh, 1965). El interés de la teoría de conjuntos difusos se centra esencialmente en modelar aquellos problemas donde los enfoques clásicos de la teoría de conjuntos y la teoría de probabilidades resultan insuficientes o no operativos. Para ello dicha teoría generaliza la noción clásica de conjunto e introduce el concepto de "borrosidad" (fuzziness).

Los conjuntos difusos o borrosos surgen como una nueva forma de representar la imprecisión y la incertidumbre (Zimmermann, 1996, 2011, 2012); Klir y Yuan, 1995). Esta teoría se ha desarrollado a lo largo de dos vertientes principales (Pedrycz y Gomide, 1998, Pedrycz, 2012):

1. Como una teoría matemática formal (Hohle, 1998; Pedrycz, 2012), generalizando la teoría de conjuntos y la lógica multivaluada, que ha ampliado los conceptos e ideas de otras áreas de la matemática como el álgebra, la teoría de grafos, la topología, etc., aplicando conceptos de la teoría de conjuntos difusos a dichas áreas.

2. Como un potente modelador del lenguaje (Zadeh, 1975), que puede utilizarse en un gran número de situaciones del mundo real en las que aparece incertidumbre. Debido a la generalidad de esta teoría se adapta con facilidad a diferentes contextos y problemas, como por ejemplo: Teoría de Sistemas (Pedrycz, 2012), Teoría de la Decisión (Fodor y Roubens, 1994), Bases de Datos (Yazici y George, 1999), etc. En muchas ocasiones esto significará, sin embargo, la especificación y desarrollos dependientes del contexto de los conceptos originales de la Teoría de Conjuntos Difusos.

2.2.1 Definiciones básicas

A continuación se presentan una serie de conceptos básicos sobre la teoría de conjuntos difusos necesarios para el desarrollo de este trabajo:

Definición 2.1. Sea A un conjunto en el universo X, la ***función característica*** asociada a *A*, $A(x)$, $x \in X$, se define como:

$$A(x) = \begin{cases} 1, si\ x \in A \\ 0, si\ x \notin A. \end{cases}$$

La función $A: X \rightarrow \{0,1\}$ induce una restricción, con un límite bien definido, sobre los objetos del universo X que pueden ser asignados al conjunto A. El concepto de conjunto difuso lo que hace es relajar este requerimiento y admite valores intermedios en la función característica, que pasa a denominarse función de pertenencia.

Esto permite una interpretación más realista en ciertos contextos de trabajo. La mayoría de las categorías que describen los objetos del mundo real no tienen unos límites claros y bien definidos, por ejemplo: persona joven, buen sabor, coche veloz, etc. Si un objeto pertenece a una categoría es con un grado, el cual, puede ser expresado por un número real en el intervalo [0,1]. Cuanto más cercano a 1 sea el grado, indicará mayor pertenencia a una categoría determinada y cuanto más cercano a 0 indicará menor pertenencia a dicha categoría.

Un conjunto difuso puede definirse (Martínez, 1999) como una colección de objetos con valores de pertenencia entre 0 (exclusión completa) y 1 (pertenencia completa). Los valores de pertenencia expresan los grados con los que cada objeto es compatible con las propiedades o características distintivas de la colección. Formalmente podemos definir los conjuntos difusos como sigue (Zadeh, 1995):

Definición 2.2. Un ***conjunto difuso*** $\overline{A}$ sobre X está caracterizado por una función de pertenencia que transforma los elementos de un dominio, espacio o universo del discurso X en el intervalo [0, 1].

$$\mu_{\overline{A}} : X \rightarrow [0, 1].$$

Así, un conjunto difuso $\overline{A}$ en X puede representarse como un conjunto de pares ordenados de un elemento genérico x, $x \in X$, y su grado de pertenencia

$$\mu_{\overline{A}}(x), \overline{A} = \{(x, \mu_{\overline{A}}(x)) | \, x \in X, \, \mu_{\overline{A}}(x) \in [0, 1]\}.$$

Claramente, un conjunto difuso es una generalización del concepto de conjunto clásico cuya función de pertenencia toma sólo dos valores $\{0,1\}$.

A continuación, introducimos dos conceptos básicos a la hora de trabajar con conjuntos difusos, como son el soporte y el α-corte de un conjunto difuso:

Definición 2.3. El ***soporte de un conjunto difuso*** $\overline{A}$, *Support*($\overline{A}$), es el conjunto clásico de todos los elementos de $x \in X$, tales que, el grado de pertenencia sea mayor que cero.

$$Support(\overline{A}) = \{x \in X \mid \mu_{\overline{A}}(x) > 0\}.$$

Definición 2.4. Sea $\overline{A}$ un conjunto difuso sobre el universo X, dado un número $\alpha \in [0; 1]$. Se define el ***α-corte*** sobre $\overline{A}$, A^{α}, como un conjunto clásico que contiene todos los elementos del universo X cuya función de pertenencia en $\overline{A}$ sea mayor o igual al valor α:

$$A^{\alpha} = \{x \in X \mid \mu_{\overline{A}}(x) \geq \alpha\}.$$

Definición 2.5. Para un conjunto finito difuso $\overline{A}$, la ***cardinalidad*** $|\overline{A}|$ se define como

$$|\overline{A}| = \sum_{x \in X} \mu_{\overline{A}}(x)$$

$\|\overline{A}\| = \frac{|\overline{A}|}{|X|}$ es llamada la cardinalidad relativa de $\overline{A}$.

Definición 2.6: De entre los distintos tipos de conjuntos difusos, tienen una especial significación aquellos que están definidos sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

$$\overline{A} : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1].$$

Bajo ciertas condiciones, estos conjuntos difusos pueden ser vistos como "*números difusos*" o "intervalos difusos". Para denominar a un conjunto difuso $\overline{A}$ sobre $\mathbb{R}$ como un ***número difuso***, debe de poseer al menos las siguientes tres propiedades (Martínez, 1999):

1. $\overline{A}$ debe ser un conjunto difuso convexo normalizado.
2. Para cualquier $\alpha \in [0; 1)$, A^{α} debe ser un intervalo cerrado.
3. El soporte de $\overline{A}$ debe ser finito.

Las formas de las funciones de pertenencia más habituales para representar números difusos son las funciones triangulares y trapezoidales, sin embargo en ciertas aplicaciones es preferible utilizar otro tipo de funciones (Martínez, 1999).

2.2.2 Tipos de funciones de pertenencia

En principio cualquier forma de la función $\mu_{\bar{A}}: X \rightarrow [0, 1]$, describe una función de pertenencia asociada a un conjunto difuso $\bar{A}$ que depende no sólo del concepto que representa, sino también del contexto en el que se usa. Las gráficas de las funciones pueden tener diferentes representaciones o formas, y pueden tener algunas propiedades específicas (ej.,continuidad). Que sea una representación adecuada, se puede determinar sólo en el contexto de la aplicación. En ocasiones, sin embargo, la semántica capturada por los conjuntos difusos no es muy sensible a variaciones en la forma, y son convenientes funciones simples. En muchos casos prácticos, los conjuntos difusos pueden representarse con familias de funciones paramétricas. Las más comunes son las siguientes:

1.- Función triangular:

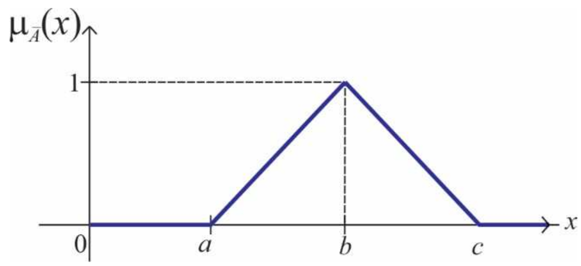


Figura 2.3.- Función triangular

Donde:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{si } x \in [b, c] \\ 0 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

2.- Función trapezoidal:

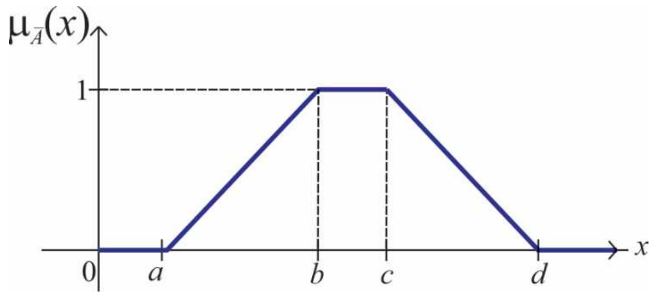


Figura 2.4.- Función trapezoidal

Donde:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x < a) \text{ ó } (x > d) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \leq c \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{si } c \leq x \leq d \end{cases}$$

3.- Función sigmoidal:

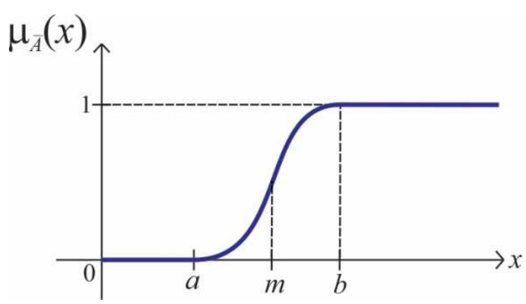


Figura 2.5.- Función sigmoidal

Donde:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ 2\left[\dfrac{x-a}{b-a}\right]^2 & \text{si } a < x \leq m \\ 1-2\left[\dfrac{x-b}{b-a}\right]^2 & \text{si } m < x < b \\ 1 & \text{si } x \geq b \end{cases}$$

siendo $m = \frac{a+b}{2}$

4.- Función gaussiana:

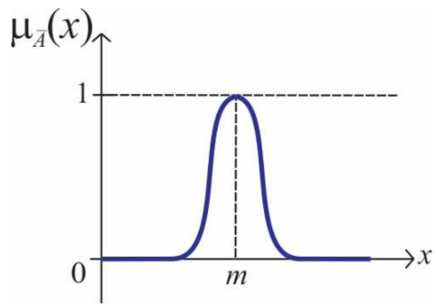


Figura 2.6.- Función gaussiana

Donde:

$$\mu_{\bar{A}}(x) = e^{-k(x-m)^2}, \quad k > 0$$

Cuanto mayor es el valor de *k*, más estrecha es la campana.

2.2.3 Variables lingüísticas

De acuerdo con Martínez (1999), en los diferentes problemas que nos podemos encontrar en el mundo real, la información que manejamos puede tener diferentes rangos de valoración y los valores pueden tener distinta naturaleza. En ocasiones, la información que manipula un problema puede que no sea fácil de valorar de forma precisa mediante un valor cuantitativo (un número), sin embargo, puede ser fácilmente valorada en forma cualitativa. En este caso, suele ocurrir que el uso de un enfoque lingüístico difuso se adapte mejor que un enfoque numérico. Por ejemplo, cuando intentamos evaluar fenómenos relacionados con la percepción subjetiva (diseño, gusto, etc) solemos utilizar palabras del lenguaje natural (bonito, feo, dulce, salado, etc) en lugar de valores numéricos. Tal y como se indica en (Chen y Hwang, 1992), esto puede ocurrir por diversas razones:

1. Hay situaciones en las que la información puede ser incuantificable debido a su naturaleza, y así, sólo puede "medirse" utilizando términos lingüísticos (ej., cuando se evalúa el "confort" o el "diseño" de un automóvil (Levrat et al, 1997), el uso de términos como "bueno", "medio", "malo" suelen ser habituales).

2. Existen otras ocasiones en las que información cuantitativa no puede medirse porque no están disponibles los elementos necesarios para llevar a cabo una medición exacta de esa información, o porque el coste de su medida es muy elevado. Por tanto, el uso de un "valor aproximado" es aceptado (ej., imaginemos la evaluación de la velocidad de un automóvil, términos lingüísticos como "rápido", "muy rápido", "despacio" pueden utilizarse en lugar de valores numéricos).

El Enfoque Lingüístico Difuso es un enfoque aproximado, que tiene como base teórica para su desarrollo la Teoría de los Conjuntos Difusos. Este enfoque representa los aspectos cualitativos como valores lingüísticos mediante variables lingüísticas (Zadeh, 1975).

Una variable lingüística se caracteriza por un valor sintáctico o etiqueta y por un valor semántico o significado. La etiqueta es una palabra o frase perteneciente a un conjunto de términos lingüísticos y el significado de dicha etiqueta viene dado por un subconjunto difuso en un universo del discurso. Al ser las palabras menos precisas que los números, el concepto de variable lingüística parece una buena propuesta para caracterizar a aquellos fenómenos que son demasiado complejos o están mal definidos para poder ser evaluados mediante valores numéricos precisos. Formalmente, se definen como sigue (Martínez, 1999):

Definición 2.7. Una ***variable lingüística*** está caracterizada por una quíntupla *(H,T,U,G,M),* donde *H* es el nombre de la variable*; T(H) (o sólo T*) simboliza el conjunto de términos de *H,* es decir, el conjunto de nombres de valores lingüísticos de *H,* donde cada valor es una variable difusa notada genéricamente como *X(H)* y que varía a lo largo del universo del discurso *U(H),* el cual está asociado con una variable base llamada *u; G(H)* es una regla sintáctica (que normalmente toma forma de gramática) para generar los nombres de los valores de *H* y *M* es una regla semántica para asociar significado *M(X),* a cada elemento de *H,* el cual es un conjunto difuso de *U.*

En la práctica, existen dos posibilidades para elegir los descriptores lingüísticos apropiados del conjunto de términos y su semántica:

1. La primera posibilidad consiste en definir el conjunto de términos lingüísticos mediante una gramática libre de contexto, y su semántica mediante números difusos descritos por una función de pertenencia parametrizada y por reglas semánticas (Bordogna y Passi, 1993; Zadeh, 1975b).

2. La segunda posibilidad define el conjunto de términos lingüísticos usando una estructura ordenada de etiquetas, y la semántica de los términos lingüísticos se deriva de la propia estructura ordenada, la cual puede estar uniformemente distribuida en el intervalo [0, 1] o no (Bordogna et al.,1997; Delgado et al.,1998; Herrera et al.,1996; Torra, 1996; Yager, 1993a; Yager, 1995).

2.2.3.1 Elección del conjunto de términos lingüísticos

De acuerdo con Martinez (1999), el objetivo de establecer los descriptores lingüísticos de una variable lingüística es proporcionar a una fuente de información un número reducido de términos con los cuáles pueda expresar con facilidad su información y/o conocimiento. Para cumplimentar este objetivo hay que analizar un aspecto muy importante, tal y como es, la *granularidad* de la incertidumbre (Bonissone y Decker, 2013), esto es, la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos usado para expresar la información.

La cardinalidad de un conjunto de términos lingüísticos debe ser lo suficientemente pequeña como para no imponer una restricción de precisión a la información que quiere expresar cada fuente de información, y lo suficientemente grande para permitir hacer una discriminación de las valoraciones en un número limitado de grados. Valores típicos de cardinalidad usados en modelos lingüísticos son valores impares, tales como 7 ó 9, con un límite superior de granularidad de no más de 13, donde el término lingüístico medio representa una valoración de aproximadamente 0.5 en el intervalo [0,1], y con el resto de los términos simétricamente distribuidos a su alrededor (Bonissone y Decker, 2013). Estos valores clásicos de cardinalidad parecen estar dentro de la línea de observación de Miller sobre la capacidad humana, en la que se indica que se pueden manejar razonablemente y recordar alrededor de siete o nueve términos (Miller, 1956).

Una vez establecida la cardinalidad del conjunto de términos lingüísticos hay que proveer un mecanismo para generar los términos lingüísticos. Existen dos enfoques para esto, uno los define con una gramática libre de contexto (Bordogna y Passi, 1993; Zadeh, 1983) y el otro mediante un orden total definido sobre el conjunto de términos. A continuación se analiza el segundo mecanismo, el cuál es el de interés para este trabajo:

Una alternativa para reducir la complejidad de definir una gramática consiste en dar directamente un conjunto de términos, considerándolos a todos como primarios y distribuidos sobre una escala con un orden total definido (Bordogna y Passi, 1997; Herrera et al., 1996; Yager, 1993; Yager, 1995). Por ejemplo, consideremos el siguiente conjunto de siete etiquetas:

$$S = \{N, MB, B, M, A, MA, P\}$$

s_0 = N = Nada s_1 = MB = Muy_Bajo

s_2 = B = Bajo s_3 = M = Medio

s_4 = A = Alto s_5 = MA = Muy_Alto s_6 = P = Perfecto

donde $s_a < s_b$ si y sólo si $a < b$.

2.3 Operaciones con conjuntos difusos

En este apartado se presentan algunos modelos matemáticos para realizar las operaciones de intersección, unión y complemento de los conjuntos difusos.

Las operaciones con los conjuntos clásicos se pueden extender para los conjuntos difusos. Para estas definiciones, inicialmente nos basaremos en las operaciones con conjuntos clásicos (Fodor y Roubens, 1994):

Sea Ω un conjunto dado. En la teoría de conjuntos clásicos la ***intersección, unión y complemento*** de subconjuntos de Ω están definidos de una única manera. Si A, $B \subseteq \Omega$ son conjuntos clásicos entonces

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \ \ y \ b \in B\},$$

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \ \ o \ b \in B\},$$

$$A^C = \{a \mid \notin A\}.$$

La unicidad es debido al hecho de que AND, OR y NOT son operaciones lógicas bivaluadas. Sea $v(P)$ la evaluación de la proposición P con valores en $\{0,1\}$. Las operaciones anteriores se pueden representar como:

$$v(a \in A \cap B) = v(a \in A) \wedge v(a \in B),$$

$$v(a \in A \cup B) = v(a \in A) \vee v(a \in B),$$

$$v(a \in A^C) = \neg v(a \in A).$$

Sin embargo, si para cada elemento $a \in \Omega$ existe un grado de pertenencia de $A \subseteq \Omega$, esto es, $v(a \in A)$ es un número de [0, 1] en lugar de {0, 1}, entonces la interpretación de los conectivos lógicos no es tan obvia. Con esto, es necesario introducir extensiones apropiadas para representar los conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, y $\neg$ para este caso, tomando en cuenta que los conectivos lógicos bivaluados en {0, 1} deben ser casos especiales de los conectivos valuados en [0, 1].

La función de membresía es de manera obvia el componente crucial de un conjunto difuso. De tal manera que no es de sorprenderse que las operaciones con conjuntos difusos se definan vía su función de membresía propia. Primero presentaremos los conceptos sugeridos por Zadeh (1965), donde demuestra que estos conceptos son una extensión consistente de la teoría de los conjuntos clásicos a la teoría de conjuntos difusos. Sin embargo, existen otros conceptos aparte de los definidos por Zadeh para extender la teoría de los conjuntos clásicos de manera consistente (Zimmerman, 1996).

Definición 2.8. La función de membresía $\mu_{\overline{C}}(x)$ de la ***intersección*** $\overline{C} = \overline{A} \cap \overline{B}$ está definida por

$$\mu_{\overline{C}}(x) = \min\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)\}, \; x \in X$$

Definición 2.9. La función de membresía $\mu_{\overline{D}}(x)$ de la ***unión*** $\overline{D} = \overline{A} \cup \overline{B}$ *e*stá definida por

$$\mu_{\overline{D}}(x) = \max\{\mu_{\overline{A}}(x), \mu_{\overline{B}}(x)\}, \; x \in X$$

Definición 2.10. La función de membresía $\mu_{\overline{A}^c}(x)$ del ***complemento*** del conjunto difuso $\overline{A}$ está definida por

$$\mu_{\overline{A}^c}(x) = 1 - \mu_{\overline{A}}(x), \; x \in X$$

Ya se ha mencionado que *min* y *max* no son los únicos operadores que se pueden utilizar para modelar la unión o intersección, respectivamente, de conjuntos difusos. Surge la siguiente pregunta, ¿Por qué esos y no otros? Bellman y Giertz contestaron esta pregunta de manera axiomática (Bellman y Giertz, 1973). Ellos argumentaron desde un punto de vista lógico, interpretando la intersección como "Y lógica", la unión como "O lógica" y el conjunto difuso $\overline{A}$ como el predicado "el elemento *x* pertenece al conjunto $\overline{A}$", el cual puede ser aceptado como más o menos verdadero. Es muy instructivo seguir su línea de argumentos, los cuales son un excelente ejemplo de la justificación de un modelo matemático basado en axiomas. A continuación resumiremos sus argumentos: Considere dos predicados, *S* y *T*, para los cuáles los valores de verdad μ_S y $\mu_T \in [0,1]$ respectivamente. El valor de verdad de las combinaciones "*y*" y "*o*" de *S* y *T* $\mu \; (S \wedge T)$ y $\mu \; (S \vee T) \in [0,1]$, se interpretan como los valores de las funciones de membresía de la intersección y unión, respectivamente, de *S* y *T*. Entonces, se buscan dos funciones valuadas en los números reales *f* y g de tal forma que:

$$\mu_{S \wedge T} = f\ (\mu_S, \mu_T)$$

$$\mu_{S \vee T} = g\ (\mu_S, \mu_T)$$

En su trabajo, Bellman y Giertz (1973) argumentan que es razonable imponer las siguientes restricciones sobre *f* y *g*:

i. *f* y g son no decrecientes y continuas en μ_S y μ_T.

ii. *f* y g son simétricas, es decir:

$$f\ (\mu_S, \mu_T) = f\ (\mu_T, \mu_S)$$
$$g\ (\mu_S, \mu_T) = g\ (\mu_T, \mu_S)$$

iii. $f\ (\mu_S, \mu_S)$ y $g\ (\mu_S, \mu_S)$ son estrictamente crecientes en μ_S.

iv. $f\ (\mu_S, \mu_T) \leq \min(\mu_S, \mu_T)$ y $g\ (\mu_S, \mu_T) \geq \max(\mu_S, \mu_T)$. Esto implica que el aceptar como verdadero el predicado “S y T” requiere más, y aceptar como verdadero el predicado “S o T” requiere menos que el aceptar a los predicados S o T solos como verdaderos.

v. *f*(1,1) = 1 y *f*(0,0) = 0.

vi. $S_1 \wedge (S_2 \vee S_3)$ es equivalente a $(S_1 \wedge S_2) \vee (S1 \wedge S_3)$.

Bellman y Giertz (1973) formalizan lo anterior de la manera siguiente:

1. $\mu_S \wedge \mu_T = \mu_T \wedge \mu_S$
   $\mu_S \vee \mu_T = \mu_T \vee \mu_S$

2. $(\mu_S \wedge \mu_T) \wedge \mu_V = \mu_S \wedge (\mu_T \wedge \mu_V)$
   $(\mu_S \vee \mu_T) \vee \mu_V = \mu_S \vee (\mu_T \vee \mu_V)$

3. $\mu_S \wedge (\mu_T \vee \mu_V) = (\mu_S \wedge \mu_T) \vee (\mu_S \wedge \mu_V)$
   $\mu_S \vee (\mu_T \wedge \mu_V) = (\mu_S \vee \mu_T) \wedge (\mu_S \vee \mu_V)$

4. $\mu_S \wedge \mu_T$ y $\mu_T \vee \mu_S$ son continuos y no decrecientes en μ_T y μ_S.
5. $\mu_S \wedge \mu_S$ y $\mu_S \vee \mu_S$ son estrictamente crecientes en μ_S.

6. $\mu_S \wedge \mu_T \leq \min(\mu_S, \mu_T)$
   $\mu_S \vee \mu_T \geq \max(\mu_S, \mu_T)$

7. $1 \wedge 1 = 1$
   $0 \vee 0 = 0$

Finalmente, Bellman y Giertz (1973) demuestran matemáticamente que

$$\mu_{S \wedge T} = \min(\mu_S, \mu_T)$$

$$\mu_{S \vee T} = \max(\mu_S, \mu_T)$$

de acuerdo con los axiomas que imponen.

Como se ha mencionado anteriormente, se han sugerido otras funciones que representen a los operadores lógicos difusos (Zimmerman, 1996). Estas sugerencias varían desde una argumentación intuitiva hasta una justificación axiomática. A continuación se describen dos clases básicas de operadores: operadores basados en normas y conormas triangulares y los operadores promedio.

2.3.1 Operadores lógicos difusos basados en t-normas y t-conormas

2.3.1.1 Negación

La negación es una operación unitaria que identifica el valor de verdad de ¬P. Los siguientes axiomas se deben de cumplir como requerimientos mínimos (Fodor y Roubens, 1994):

N0. $v(\neg P_1)$ depende solamente del valor $v(P_1)$

Nl. Si $v(P_1) = 1$ entonces $v(\neg P_1) = 0$

N2. Si $v(P_1) = 0$ entonces $v(\neg P_1) = 1$

N3. Si $v(P_1) \leq v(P_2)$ entonces $v(\neg P_1) \geq v(\neg P_2)$

Definición 2.11: Una función n:[0,1]→[0,1] es una ***negación*** si y solo si satisfice las condiciones N0 a N3.

Para efectos prácticos y teóricos, los siguientes axiomas para la negación se deben agregar:

N3'. Si $v(P_1) < v(P_2)$ entonces $v(\neg P_1) > v(\neg P_2)$

N4. $v(\neg P_1)$ depende continuamente de $v(P_l)$

N5. $v(\neg (\neg P_1)) = v(P_l)$

Definición 2.12: Una ***negación*** se dice que es

a) ***Estricta*** si n es una función continua estrictamente decreciente en el intervalo [0,1]

b) ***Fuerte*** si n es estricta y además se cumple que $n(n(x))=x$ para toda $x\in[0,1]$.

Como ejemplos de negación tenemos (ver Yager, 1980; Ovchinnikov, 1983; Sugeno, 1977):

Tabla 2.2.- Ejemplos de negaciones

Nombre	**¬x**
Negación intuicionista *(estricta)*	$n_i(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$
Negación intuicionista dual *(estricta)*	$n_{id}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x<1 \\ 0 & \text{si } x=1 \end{cases}$
Negación estándar *(fuerte)*	$N(x) = 1 - x$
Complemento λ *(familia de negaciones fuertes)*	$N_\lambda(x) = \dfrac{1-x}{1+\lambda x}, \qquad \lambda > -1$

Es fácil ver que para cada negación n tenemos:

$$n_i \leq n \leq n_{id}$$

En general, n denota una negación estricta y N denota una negación fuerte.

2.3.1.2 Conjunción basada en t-normas

Las conjunciones sirven como base para definir intersecciones de conjuntos difusos. Tomando en cuenta las propiedades de los conjuntos clásicos, es razonable que los siguientes axiomas se deban cumplir, según Fodor y Roubens (1994):

C0. $v(P_1 \wedge P_2)$ depende solamente de los valores $v(P_l)$ y $v(P_2)$

Cl. Si $v(P_1) = 1$ entonces $v(P_1 \wedge P_2) = v(P_2)$ para cualquier proposición P_2

C2. $v(P_1 \wedge P_2) = v(P_2 \wedge P_1)$.

C3. Si $v(P_1) \leq v(P_2)$ entonces $v(P_1 \wedge P_3) \leq v(P_2 \wedge P_3)$ para cualquier P_3

C4. $v(P_1 \wedge (P2 \wedge P3)) = v((P1 \wedge P2) \wedge P3)$.

Definición 2.13: Una función *T:* $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una ***norma triangular*** *(t-norma)* si y solo si satisfice las condiciones C0 a C4.

Existen varios ejemplos de t-normas. En la siguiente tabla se muestran las más utilizadas frecuentemente (ver Zadeh, 1965; Alsina et al., 1983; Bellman y Giertz, 1973; Bellman y Zadeh, 1977; Lukasiewicz, 1970; Fodor, 1993):

Tabla 2.3 Ejemplos de t-normas

Nombre	**$x \wedge y =$**
Mínimo (min)	$\min(x,y)$
Producto (Π)	xy
Lukasiewicz (W)	$\max\{x+y-1,0\}$
Mínimo nilpotente ($\min_0$)	$\min(x,y)$ si $x+y>1$ 0 cualquier otro caso
Z	$\min(x,y)$ si $\max(x,y)=1$ 0 cualquier otro caso

Entonces, para cualquier t-norma tenemos que

$$Z \leq \mathrm{T} \leq \min$$

Definición 2.14: Una ***t-norma*** se dice que es

c) ***Continua*** si T es una función continua en el intervalo [0,1].

d) ***Arquimediana*** si $T(x,x,) < x$ para toda $x \in (0,1)$

e) ***Positiva*** si $x,y > 0$ implica que $T(x,y) > 0$

f) ***Estricta*** si T es una función estrictamente creciente en $(1,0)^2$

2.3.1.3 Disyunción basada en t-conormas

Los axiomas para la disyunción son muy similares para los establecidos para la conjunción. La única diferencia es la condición de límite D1.

D0. $v(P_1 \vee P_2)$ depende solamente de los valores $v(P_l)$ y $v(P_2)$

Dl. Si $v(P_1) = 0$ entonces $v(P_1 \vee P_2) = v(P_2)$ para cualquier proposición P_2

D2. $v(P_1 \vee P_2) = v(P_2 \vee P_1)$

D3. Si $v(P_1) \leq v(P_2)$ entonces $v(P_1 \vee P_3) \leq v(P_2 \vee P_3)$ para cualquier P_3

D4. $v(P_1 \vee (P2 \vee P3)) = v((P1 \vee P2) \vee P3)$

Definición 2.15: Una función S: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es una ***conorma triangular*** *(t-conorma)* si y solo si satisfice las condiciones D0 a D4.

Es fácil ver que S es una t-conorma si y sólo si $\mathrm{T}(x,y) = n\mathrm{S}(nx,ny)$ es una T-norma (Fodor y Roubens, 1994). De acuerdo a esta asociación y tomando a n como la negación estándar $n(x)=1-x$, se pueden dar los siguientes ejemplos de t-conormas:

Tabla 2.4- Ejemplos de t-conormas con su t-norma asociada

$x \wedge y$ =	**$x \vee y$ =**
$\min(x,y)$	$\max(x,y)$
$\Pi(x,y) = xy$	$\Pi'(x,y) = x+y-xy$
$W(x,y) = \max\{x+y-1,0\}$	$W'(x,y) = \min\{x+y,1\}$
$\min_0(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } x+y>0 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$	$\max_1(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } x+y<1 \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$
$Z(x,y) = \begin{cases} \min(x,y) & \text{si } \max(x,y)=1 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$	$Z'(x,y) = \begin{cases} \max(x,y) & \text{si } \min(x,y)=0 \\ 1 & \text{otro caso} \end{cases}$

Entonces, para cualquier S-conorma tenemos que

$$max \leq S \leq Z'$$

Definición 2.16: Una ***S-conorma*** se dice que es

a) ***Continua*** si S es una función continua en el intervalo [0,1]

b) ***Arquimediana*** si $S(x,x,) > x$ para toda $x \in (0,1)$

c) ***Nilpotente*** si existen $x,y \in (0,1)$ de tal manera que $S(x,y)=1$

d) ***Estricta*** si S es una función estrictamente creciente en cada lugar sobre $(1,0)^2$

2.3.1.4 Tripleta de De Morgan

Si T es una t-norma, S es una t-conorma y n_1, n_2 son negaciones (no necesariamente estrictas o fuertes) entonces dos tipos de leyes de De Morgan se pueden expresar como:

$$n_1(S(x,y)) = T(n_1(x), n_1(y))$$

$$n_2(T(x,y)) = S(n_2(x), n_2(y))$$

Para negaciones fuertes estas dos leyes son equivalentes (Fodor y Roubens, 1994).

2.3.2 Lógica difusa compensatoria

Los operadores promedio, también llamados operadores compensatorios, tienen como límites los operadores *min* y *max* (Zimmerman, 1996). Operadores tales como la media aritmética y la media geométrica ambas con y sin pesos son ejemplos de operadores compensatorios. De hecho, son modelos adecuados para representar procedimientos de agregación humanos en ambientes de decisión, los cuales se han comportado empíricamente muy bien (Thole, Zimmerman y Zisno, 1979).

A continuación se describen los axiomas que describen una ***lógica difusa compensatoria*** (Espín et al., 2006, 2011):

Sea $n:[0,1]\rightarrow[0,1]$ el operador de negación, o cualquier operador estrictamente decreciente que cumpla con $n(n(x))=x$, $n(0)=1$ y $n(1)=0$. Sean $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, $z=(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ cualquier elemento del producto cartesiano $[0,1]^n$.

El cuarteto de operadores (c, d, o, n) donde $c:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ es el operador de conjunción, $d:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ es el operador de disyunción, $o:[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ es el operador de orden y $n:[0,1]\rightarrow[0,1]$ es el operador de negación, constituyen una ***lógica difusa compensatoria*** si el siguiente grupo de axiomas se satisface:

i. Axioma de compensación:

$$min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq c(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$$min(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq d(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq max(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

ii. Axioma de simetría o conmutatividad:

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = c(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n) = d(x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

iii. Axioma de crecimiento estricto:

Si $x_1 = y_1, x_2 = y_2, x_{i-1} = y_{i-1}, x_{i+1} = y_{i+1}, \ldots, x_n = y_n$ son mayores que cero y $x_i > y_i$ entonces

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) > c(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$$

$$d(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) > d(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)$$

iv. ***Axioma de veto:***

Si $x_i = 0$ para cualquier i entonces $c(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0$

Si $x_i = 1$ para cualquier i entonces $d(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 1$

v. ***Axioma de reciprocidad difusa:***

$$o(x, y) = n[o,(y,x)]$$

vi. ***Axioma de transitividad difusa:***

Si $o(x, y) \geq 0.5$ y $o(y, z) \geq 0.5$, entonces $o(x, z) \geq \max(o(x, y), o(y, z))$

vii. ***Leyes de De Morgan:***

$$n(c(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = d(n(x_1), n(x_2), \ldots, n(x_n))$$

$$n(d(x_1, x_2, \ldots, x_n)) = c(n(x_1), n(x_2), \ldots, n(x_n))$$

viii. ***Axioma de idempotencia:***

$$c(a, a, \ldots, a) = a$$

$$d(a, a, \ldots, a) = a$$

Operadores que satisfacen el axioma de compensación son llamados operadores compensatorios (Dubois y Prade, 1980a, 1980b). Operadores compensatorios simétricos hallados en la literatura son los siguientes (Espín et al., 2006, 2011):

- ***Operadores máximo y mínimo:*** El máximo no satisface los axiomas de crecimiento estricto y veto. El mínimo no cumple con el axioma de crecimiento estricto.
- ***Estadísticas de orden k:*** Estos incluyen a la mediana, por ejemplo. Estos operadores no satisfacen los axiomas de crecimiento estricto y veto.

- ***Combinaciones de t-normas y t-conormas:*** como los operadores compensatorios exponenciales (que incluyen los llamados operadores de Zimmerman) y los operadores compensatorios lineales convexos. Estos no satisfacen el axioma de veto.
- ***La media aritmética***, la cual no satisface el axioma de veto.
- ***Las medias cuasi-aritméticas***, las cuales incluyen por ejemplo a la media geométrica. Son operadores de la forma

$$M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$$

  Donde f es una función continua estrictamente monótona. Estos operadores satisfacen los axiomas *i-iii*. Si además tenemos que para toda $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, $lim_{x_i \to 0}\ M_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, el axioma *iv* también se cumple.

2.3.2.1 Lógica difusa compensatoria basada en medias cuasi-aritméticas

De acuerdo con Espín et al. (2006, 2011), una lógica difusa compensatoria basada en medias cuasi-aritméticas (QAMBCL, por sus siglas en inglés) es el cuarteto de operadores (*c, d, o, n*) que cumplen con los axiomas *i-viii,* los cuales se describen de la siguiente manera:

$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\right)$

$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - f^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(1-x_i)\right)$

$o(x,y) = 0.5\,[c(x)-c(y)] + 0.5$

$n(x) = 1 - x$

2.3.2.2 Lógica difusa compensatoria basada en la media geométrica

La media geométrica pertenece a la clase de las medias cuasi-aritméticas. La media geométrica se puede obtener haciendo $f(x) = ln(x)$ (Espín et al. 2006, 2011). La media geométrica es también más sencilla que otras medias cuasi-aritméticas. En su trabajo, Espín et al. (2006, 2011) proponen la media geométrica como el operador de conjunción *c.* En base a esto definen una lógica difusa compensatoria basada en media geométrica (GMBCL, por sus siglas en inglés), como el cuarteto de operadores (*c*, *d*, *o*, *n*) que cumplen con los axiomas *i-viii,* los cuales se describen de la siguiente manera:

$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 x_2 \ldots x_n)^{1/n}$

$d(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - ((1-x_1)(1-x_2) \ldots (1-x_n))^{1/n}$

$o(x,y) = 0.5\ [c(x)-c(y)] + 0.5$

$n(x) = 1 - x$

Para finalizar este tema, existe un trabajo muy interesante de Espín et al. (2015), donde definen un nuevo tipo de lógica, la cual llaman lógica arquimediana – compensatoria, la cual es construida de la unificación de dos sistemas difusos diferentes, esto es, la lógica difusa continua arquimediana basada en t-normas y t-conormas y la lógica difusa compensatoria basada en medias cuasi-aritméticas. En este trabajo se introducen definiciones básicas y propiedades para esta nueva teoría y además prueban la propiedad de que la preferencia sobre dos vectores de valores de verdad es la misma para ciertos predicados en la lógica difusa compensatoria y la lógica difusa continua arquimediana.

2.3.3 Operadores de agregación en general

Los operadores de agregación son funciones con propiedades especiales. El propósito de los operadores de agregación es la de combinar valores de entrada que típicamente son interpretados como grados de pertenencia en conjuntos difusos, conectivos lógicos difusos, grados de preferencia, fuerza de la evidencia o soporte de hipótesis (Beliakov et. al., 2007). De manera formal se definen de la manera siguiente:

Definición 2.17: Un ***operador de agregación*** es una función f: $[0,1]^n \rightarrow [0,1]$ con $n > 1$ argumentos que cumplen con las siguientes propiedades:

i) $f(0,0,0, \ldots, 0) = 0$ y $f(1,1,1,\ldots,1)=1$

ii) $x \leq y$ implica que $f(x) \leq f(y)$ para todo $x, y \in [0,1]^n$

2.3.3.1 Clasificación y propiedades generales de los operadores de agregación

Las cuatro principales familias de funciones de agregación son (Calvo et al., 2002; Dubois y Prade 1985, 2004, 2012):

- **Promedio:** si $\min(x) \leq f(x) \leq \max(x)$
- **Conjuntivas:** si $f(x) \leq \min(x)$
- **Disyuntivas:** si $f(x) \geq \max(x)$
- **Mixtas:** si $f(x)$ no pertenece a ninguna de las clases anteriores

A continuación se describen las propiedades generales de los operadores de agregación:

i. **Idempotencia:** f es llamada idempotente si para cada entrada $x = (t, t, \ldots, t)$, $t \in [0, 1]$ la salida es $f(t, t \ldots, t) = t$

ii. **Simetría:** f es llamada simétrica si su valor no depende de la permutación de los argumentos, es decir, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_{P(1)}, x_{P(2)}, \ldots, x_{P(n)})$, para cada x y cada permutación P.

iii. **Monotonicidad estricta:** f es monótona y estrictamente creciente si $x \leq y$ pero $x \neq y$ implica que $f(x) < f(y)$ *para cada* $x, y \in [0, 1]^n$.

iv. **Elemento neutro:** f tiene un elemento neutro $e \in [0, 1]$, *si para cada t en cualquier posición se cumple que* $f(e,\ldots, e, t, e, \ldots, e) = t$.

v. **Elemento absorbente:** f tiene un elemento absorbente $a \in [0, 1]$, *si para cada t en cualquier posición se cumple que* $f(x_1,\ldots, x_{i-1}, a, x_{i+1}, \ldots, x_n) = a$ para cada x de tal manera que $x_i=a$ con a en cualquier posición.

vi. **Homogeneidad:** f es homogénea si para cada $\lambda \in [0, 1]$ y para cada $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [0, 1]^n$ se cumple que $f(\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n) = \lambda f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

vii. **Dualidad:** Sea N: $[0,1]\rightarrow[0,1]$ una negación fuerte y f: $[0,1]^n\rightarrow[0,1]$ una función de agregación. Entonces la función de agregación f_d dada por

$$f_{\mathrm{d}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = N(f(N(x_1), N(x_2), \ldots, N(x_n)))$$

es llamada el dual de f con respecto a N. Cuando se usa la negación estándar, f_d está dada por

$$f_{\mathrm{d}}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - (1-x_1, 1-x_2, \ldots, 1-x_n)$$

Para terminar esta sección, a continuación se muestra una tabla con un resumen de los operadores de agregación pertenecientes a las 4 familias definidas anteriormente. Para mayor profundidad en el tema ver Beliakov et al., (2007), Espín y Fernández, (2006), Espín, et al., (2011), Espín et al., (2014), Espín et al., (2015).

Tabla 2.5 – Resumen de operadores de agregación agrupados en familias

Promedio	**Conjuntivas y disyuntivas**	**Mixtas**
Media aritmética	Normas y conormas triangulares	Uninormas
Media aritmética con pesos	Sumas ordinales	Nullnormas
Media geométrica	Familia paramétrica de t-normas de Schweizer-Sklar	Funciones generadas
Media geométrica con pesos	Familia paramétrica de t-normas de Hamacher	Funciones T-S
Media armónica	Familia paramétrica de t-normas de Frank	Sumas simétricas
Media armónica con pesos	Familia paramétrica de t-normas de Yager	Funciones ST-OWA
Media potenciada	Familia paramétrica de t-normas de Dombi	
Media potenciada con pesos	Familia paramétrica de t-normas de Aczel-Alsina	
Media cuasi aritmética	Familia paramétrica de t-normas de Mayor-Torrens	
Media cuasi aritmética generalizada	Familia paramétrica de t-normas de Weber-Sugeno	
Media cuasi aritmética con pesos		
Media de Gini		
Media de Bonferroni		
Media logarítmica generalizada		
Promedios ordenados con pesos (OWA, por sus siglas en inglés)		
Integral de Choquet		
Integral de Sugeno		

2.4 Relaciones binarias

A continuación se describen definiciones básicas previas para entender el concepto de relaciones binarias (Grimaldi, 1998).

Definición 2.18*:* Un ***par ordenado*** es una colección de dos objetos distinguidos como primero y segundo, y se denota como (a, b), donde a es el «primer elemento» y b el «segundo elemento».

Definición 2.19*:* El ***producto cartesiano*** de A y B es el conjunto $A\times B$ cuyos elementos son todos los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b un elemento de B:

$$A\times B = \{(a,b): a\in A \text{ y } b\in B\}$$

Definición 2.20*:* El ***conjunto potencia*** de A (o conjunto de partes o conjunto de las partes) es el conjunto $P(A)$ formado por todos los subconjuntos de A:

$$P(A) = \{S \mid S\subseteq A\}$$

- El conjunto potencia de cualquier conjunto contiene al menos un subconjunto.
- El conjunto vacío está en el conjunto potencia de cualquier conjunto: $\emptyset \in P(A)$, para cualquier A.
- Un conjunto cualquiera siempre es un elemento de su conjunto potencia: $A \in P(A)$, para cualquier A.
- El cardinal del conjunto potencia de un conjunto finito A es dos elevado al cardinal de A: $|P(A)| = 2^{|A|}$

Definición 2.21*:* Una ***relación binaria*** es una relación matemática definida entre los elementos de dos conjuntos A y B. Una relación R de A en B se puede representar mediante pares ordenados (a,b) para los cuales se cumple una propiedad $Z(a,b)$, de forma que $(a,b)\in A\times B$, y se anota:

$$R=\{(a,b)\in A\times B \mid Z(a,b)\}$$

Si el par ordenado se encuentra en R, se escribe aRb, caso contrario se escribe $a\neg Rb$.

Definición 2.22*:* Una relación binaria entre dos conjuntos se llama ***relación homogénea*** si estos dos conjuntos son iguales:

$$R(a,b) : (a,b)\in A\times B \ \wedge \ \mathrm{A}=B$$

Dado que Ay B son el mismo conjunto se suele representar como:

$$R(a,b) : (a,b)\in A\times A$$

O bien:

$$R(a,b) : (a,b)\in A^2$$

Definición 2.23*:* Una relación binaria entre dos conjuntos se llama ***relación heterogénea*** si estos dos conjuntos son diferentes:

$$R(a,b) : (a,b)\in A\times B \ \wedge \ \mathrm{A}\neq B$$

2.4.1 Representación gráfica de las relaciones binarias

Un grafo (del griego grafos: dibujo, imagen) es un conjunto de objetos llamados vértices o nodos unidos por enlaces llamados aristas o arcos, que permiten representar relaciones binarias entre elementos de un conjunto. Típicamente, un grafo se representa gráficamente como un conjunto de puntos (vértices o nodos) unidos por líneas (aristas).

Definición 2.24*:* Un ***grafo*** G es un par ordenado G=(V, E), donde:

- **V** es un conjunto de vértices o nodos, y
- ***E*** es un conjunto de aristas o arcos, que relacionan estos nodos.
- Se llama orden del grafo G a su número de vértices, |V|.
- El grado de un vértice o nodo V es igual al número de arcos que lo tienen como extremo.
- Un bucle es una arista que relaciona al mismo nodo; es decir, una arista donde el nodo inicial y el nodo final coinciden.
- Dos o más aristas son paralelas si relacionan el mismo par de vértices.

Definición 2.25: Un ***grafo no dirigido*** es un par ordenado $G=(V, E)$, donde:

- $\boldsymbol{V} \neq \emptyset$
- $\boldsymbol{E} \subseteq \{x \in P(V): |x|=2\}$ es un conjunto de pares no ordenados de elementos de V
- Un par no ordenado es un conjunto de la forma $\{a,b\}$, de manera que $\{a,b\}=\{b,a\}$.

Definición 2.26: Un ***grafo dirigido*** es un par ordenado $G=(V, E)$, donde:

- $\boldsymbol{V} \neq \emptyset$
- $\boldsymbol{E} \subseteq \{(a,b) \in V \times V: a \neq b)\}$ es un conjunto de pares ordenados de elementos de V
- Dada una arista (a,b), a es su nodo inicial y b su nodo final.

En la siguiente figura se muestran estos dos tipos de grafos:

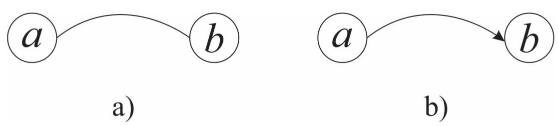
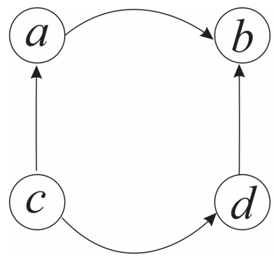


Figura 2.7.- Tipos de grafos: a) No dirigido, b) Dirigido

Definición 2.27: La ***matriz de adyacencia*** *MA* es una matriz de tamaño n × n donde las filas y las columnas hacen referencia a los vértices para almacenar en cada casilla la longitud entre cada par de vértices del grafo.

La celda $MA[i, j]$ almacena la longitud entre el vértice i y el vértice j. Si su valor es cero significa que no existe arista entre esos vértices, y MA[i, i] = 0. Por cada arista que une a dos nodos, se suma 1 al valor que hay actualmente en la ubicación correspondiente de la matriz. Si tal arista es un bucle y el grafo es no dirigido, entonces se suma 2 en vez de 1. Finalmente, se obtiene una matriz que representa el número de aristas (relaciones) entre cada par de nodos (elementos).

Existe una matriz de adyacencia única para cada grafo (sin considerar las permutaciones de filas o columnas), y viceversa.



M	a	b	c	d
a	0	1	0	0
b	0	0	0	0
c	1	0	0	1
d	0	1	0	0

Figura 2.8.- Matriz de adyacencia

2.4.2 Propiedades de las relaciones binarias homogéneas

Una relación binaria homogénea $R \subseteq A \times A$ sobre el conjunto A se dice que es:

- Reflexiva si y sólo si $aRa\ \forall\ a \in A$
- Irreflexiva si y sólo si $a \neg Ra\ \forall\ a \in A$
- Simétrica si y sólo si $aRb \Rightarrow bRa\ \forall\ a,b \in A$
- Asimétrica si y sólo si $aRb \Rightarrow b \neg Ra\ \forall\ a,b \in A$
- Antisimétrica si y sólo si $aRb \wedge bRa \Rightarrow a=b\ \forall\ a,b \in A$
- Transitiva si y sólo si $aRb,\ bRc \Rightarrow aRc\ \forall\ a,b,c \in A$
- Completa si y sólo si aRb *ó* $bRa\ \ \forall\ a,b \in A$

2.4.3 Relaciones de Orden

Una relación de orden es una relación binaria que pretende formalizar la idea intuitiva de ordenación de los elementos de un conjunto. Cuando en un conjunto hayamos definido una relación de orden, diremos que el conjunto esta ordenado con respecto a dicha relación.

Definición 2.28: Sea A un conjunto dado no vacío y R una relación binaria definida en A. Se dice que R es una ***relación de orden*** si es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Una relación de orden R sobre un conjunto A puede denotarse con el par ordenado $(A, \preccurlyeq)$.

Si $\preccurlyeq$ es una relación de orden sobre un conjunto A, entonces

- $a \preccurlyeq b$ se lee "*a* precede a *b*" o "*a* es anterior a *b*".

- Si $a \preccurlyeq b$ y $a \neq b$, emplearemos $a \prec b$ y diremos que "*a* precede estrictamente a *b*" o "*a* es estrictamente anterior a *b*".
- Dados dos elementos *a* y *b* de un conjunto *A* sobre el que se ha definido una relación de orden $\preccurlyeq$, diremos que son comparables si uno de ellos es anterior al otro:

$$a \text{ y } b \text{ son comparables} \Leftrightarrow a \preccurlyeq b \vee b \preccurlyeq a$$

- En caso contrario se dice que *a* y *b* son "no comparables":

$$a \text{ y } b \text{ no son comparables} \Leftrightarrow a \not\preccurlyeq b \wedge b \not\preccurlyeq a$$

Definición 2.29: Sea *A* un conjunto dado no vacío y *R* una relación binaria definida en *A*. Se dice que *R* es una ***relación de orden estricto*** si es asimétrica y transitiva. Una relación de orden estricto *R* sobre un conjunto *A* puede denotarse con el par ordenado $(A,\prec)$.

Definición 2.30: Una relación de orden $\preccurlyeq$ se dice que es una ***relación de orden total*** si y solo si todos los elementos de *A* se relacionan entre sí, es decir,

$$\forall a,b \in A, (a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$$

- La relación de orden total es reflexiva, antisimétrica, transitiva y completa.

Definición 2.31: Una relación de orden $\preccurlyeq$ se dice que es una ***relación de orden parcial*** si y solo si al menos un par de elementos de *A* se relacionan entre sí, es decir,

$$\exists x,y \in A, (a \preccurlyeq b) \vee (b \preccurlyeq a)$$

O, que es lo mismo:

$$\exists x,y \in A, (a \not\preccurlyeq b) \wedge (b \not\preccurlyeq a)$$

- La relación de orden parcial es reflexiva, antisimétrica y transitiva. También se le llama "relación de orden parcial débil".
- La relación de orden parcial estricta es irreflexiva, asimétrica y transitiva.

2.4.4 Relaciones de equivalencia

Este tipo de relaciones binarias permiten clasificar los elementos del conjunto en el que están definidas. Muchas veces trataremos a los elementos de un conjunto más por sus propiedades que como objetos individuales. En tales situaciones, podremos ignorar todas las propiedades que no sean de interés y tratar elementos diferentes como “equivalentes” o indistinguibles, a menos que puedan diferenciarse utilizando únicamente las propiedades que nos interesen.

La noción de “equivalencia” tiene tres características importantes:

i) Todo elemento es equivalente a sí mismo. (Reflexividad).

ii) Si a es equivalente a b, entonces b es equivalente a a. (Simetría)

iii) Si a es equivalente a b y b es equivalente a c, entonces a es equivalente a c. (Transitividad)

Definición 2.32: Sea A un conjunto dado no vacío y R una relación binaria definida en A. Se dice que R es una ***relación de equivalencia*** si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 2.33: Sea R una relación de equivalencia sobre un conjunto A. Para cada $a \in A$, llamaremos ***clase de equivalencia*** de a, al conjunto formado por todos los elementos de A que estén relacionados con él. La notaremos $[a]$, es decir,

$$[a]= \{x \in A : xRa\}$$

2.5 Toma de decisiones multicriterio

En este apartado se describe de manera general los tópicos básicos concernientes a la toma de decisiones multicriterio. La información de esta sección está basada en los capítulos introductorios de los trabajos de tesis doctoral de Navarro (2005), Olmedo (2009) y Gastélum (2014). En estos trabajos se explica de manera clara y precisa los antecedentes, ideas generales y los distintos enfoques que atañen al proceso de decisión multicriterio.

2.5.1 Introducción

El apoyo para la toma de decisiones multicriterio ha ido ganando terreno en el campo de la investigación de operaciones (Doumpos, y Zopounidis, 2002b; Zopounidis y Doumpos, 2000). Desde sus inicios, los métodos de ayuda para la toma de decisiones multicriterio han tenido aplicación en problemas de decisión reales, con aplicaciones en las áreas de ciencias sociales, economía, política, administración, selección de proyectos, recursos humanos, logística, transporte, agricultura, gestión de la energía y el agua, entre otros (Figueira et al., 2010). La descripción de los mismos así como sus ventajas con respecto a otros métodos están bien documentados (Bouyssou et al, 2000; Figueira et al, 2005; Klir y Yuan, 1995).

El objetivo del apoyo para la toma de decisiones multicriterio es ayudar a la entidad considerada como tomador de decisiones (también llamado decisor o DM, por sus siglas en inglés) a hacer frente a problemas donde está implícita la agregación de múltiples criterios, sobre todo cuando existen objetivos contradictorios, lo cual a menudo es una tarea compleja. Una de sus principales características es la orientación de apoyo a la decisión en lugar de sólo el desarrollo de modelos de decisión. Se centra en los aspectos de desarrollo de modelos y representación de las preferencias de los tomadores de decisiones y juicios de valor, pues uno de los pasos más importantes en el análisis de decisiones es estructurar problemas de decisión en un formato formal y manejable (Brugha, 2004).

Los inicios sobre este tema se remontan a finales del siglo XVIII con los trabajos de Jean-Charles de Borda y del Marqués Nicolás de Condorcet, donde analizan sistemas de votación (Zopounidis y Pardalos, 2010). Un siglo después, Vilfredo Pareto (Pardalos et al.,2013) estudia el problema de la agregación de criterios en un simple criterio e introduce el concepto de eficiencia entre dos alternativas de decisión. También introdujo el concepto de dominancia, fundamental en la teoría del análisis multicriterio, mismo que fue extendido posteriormente por Koopmans (1951). En las décadas de los 40 y 50, von Neumann y Morgenstern (1944) así como Savage (1954), introdujeron la teoría de utilidad normativa para la toma de decisiones, la cual sentó las bases para la teoría de utilidad-valor multiatributo, una de las principales corrientes del análisis multicriterio para la toma de decisiones. A finales de los años 1960, Roy introdujo el enfoque de relación de no inferioridad con el método ELECTRE y es considerado como el fundador de la escuela "Europea" del análisis multicriterio para la toma de decisiones. De los trabajos de Georg Cantor, un matemático ruso, se derivan algunos fundamentos matemáticos utilizados en el análisis para la toma de decisiones multicriterio, como los conceptos de categorías diferentes de infinidad. Así mismo, Paul Samuelson, en 1938, presentó el concepto de preferencias reveladas y posteriormente lo utilizó para construir curvas de indiferencia. En 1955, Herbert Simon, desarrolló la teoría del comportamiento basada en el concepto de racionalidad limitada. Simon consideraba que los humanos no resuelven problemas maximizando la utilidad, sino satisfaciendo, es este caso, un conjunto de niveles de aspiración. En 1951, Kenneth Arrow publicó su libro sobre elección social y valores individuales, el cual ha servido de inspiración en la investigación de la toma de decisiones multicriterio. En 1977, Saaty desarrolló el método conocido como Proceso Jerárquico Analítico (AHP, por sus siglas en inglés) ampliamente utilizado en muchas aplicaciones.

El concepto de proceso de decisión se debe principalmente a Simon (1947); el mismo corresponde a las actividades cognitivas de un tomador de decisiones ante una pregunta cuya respuesta no se da de manera automática. El uso del concepto de proceso de decisión dentro de la teoría de la decisión trajo consigo dos ideas principales: la noción de racionalidad y el de racionalidad limitada. El primero de ellos se refiere al proceso donde se espera que sea coherente (racional); el cual no necesariamente se debe considerar económicamente racional. Por otro lado, por racionalidad limitada se entiende que la racionalidad del tomador de decisiones está limitada en tiempo, espacio y conocimiento; además solamente es válida localmente (Tsoukias, 2008); en este escenario el tomador de decisiones no tiene información completa de todas las alternativas ni de sus consecuencias, ni conoce todas las preferencias relevantes para la elección (March, 1994). En el apoyo para la toma de decisiones multicriterio existen al menos dos actores que interactúan entre sí: el decisor y el analista. La labor del analista consiste en construir de manera consensuada una representación del interés y preferencias del tomador de decisiones ante una situación específica. Esto implica que los dos actores se involucran en un proceso de decisión.

La diferencia entre toma de decisión multicriterio (MCDM, por sus siglas en inglés) y el apoyo para la toma de decisiones multicriterio (MCDA, por sus siglas en inglés) ha sido estudiada ampliamente por Roy (1990, 1993, Roy y Vanderpooten, 1995). En un enfoque MCDM, el decisor utiliza una herramienta teórica de decisión con el fin de establecer las acciones posibles para llevarlas a cabo. En tal escenario la teoría de la decisión es directamente utilizada por el decisor. Si se considera la acción de un analista, sería con fines de tutoría o porque es un "clon" del decisor. En ese sentido, teóricamente no hay diferencia entre estos dos actores. Cabe señalar que en este escenario se considera al decisor como un ente que tiene poder de decisión y por lo tanto, es responsable de la decisión. Por otro lado, en el enfoque MCDA, existen al menos las figuras de cliente y analista, los cuales tienen roles diferentes en el proceso de decisión. En este enfoque pueden existir otros actores, y además, el cliente no necesariamente es el decisor (puede ser que no tenga poder de decisión y ser, por ejemplo, el propio analista para otro cliente). El objetivo final del enfoque MCDA (enfoque constructivo), es llegar a un consenso entre el cliente y el analista, donde el analista debe tratar de obtener un conjunto coherente estructurado de los resultados, con el fin de orientar la toma de decisiones y facilitar la comunicación de las decisiones. Para ello, de acuerdo con Gastélum (2014), el analista debe utilizar un enfoque que tiene como objetivo producir conocimiento a partir de las hipótesis de trabajo teniendo en cuenta los objetivos y los sistemas de valores del contexto de decisión involucrados. Este enfoque debe basarse en modelos que son, al menos parcialmente, construidos a través de la interacción con el tomador de decisiones. En primer lugar, la construcción se refiere a la forma en que las acciones estudiadas son tomadas en cuenta, así como las consecuencias con que estas acciones serán juzgadas. En segundo lugar, el proceso de construcción se refiere a la forma en que se diseñan ciertas características (en particular, los valores asignados a los diferentes parámetros) del modelo de preferencia que se consideró el más adecuado teniendo en cuenta las especificidades del contexto de decisión y las hipótesis de trabajo (Roy, 2010; Figueira, et. al., 2010).

2.5.2 Problemas de decisión

Los problemas de toma de decisiones pueden ser clasificados en dos categorías: problemas de decisión discretos y problemas de decisión continuos. La primera de ellas, consiste en el involucramiento de un conjunto de alternativas de decisión, donde cada una de ellas es descrita a través de una serie de atributos que tienen un significado de criterios de evaluación. En la segunda categoría existe la posibilidad de que el conjunto de alternativas no sea finito. Por tanto, sólo se puede identificar la región donde se encuentran las alternativas de decisión; conocida como región factible o región solución, en la cual, cada uno de los puntos de dentro de dicha región, concierne a una alternativa específica (Doumpos y Zopounidis, 2002b).

Doumpos y Zopounidis (2002b) y Roy (1985), sustentan que dentro de los problemas discretos, existen cuatro tipos de análisis o problemas de decisión, que pueden apoyar al DM en su tarea de realizar su decisión. De esos problemas, Figueira et al. (2010) consideran como principales, a los tres últimos de la lista siguiente:

- Identificarlas y describirlas por sus características.
- Ordenarlas en orden de la mejor a la peor (ranking).
- Seleccionar las mejores (choice).
- Clasificarlas en grupos homogéneos. Como caso particular las categorías pueden estar ordenadas preferencialmente (sorting).

Dado un conjunto de alternativas, con base a sus preferencias, el tomador de decisiones puede realizar una descripción de las acciones y de sus consecuencias, utilizando un lenguaje apropiado.

Por su parte, el problema de selección consiste en elegir un número restringido de alternativas potenciales más interesantes, tan pequeño corno sea posible, lo cual justifica eliminar al resto. Por otro lado, el ranking consiste en hacer un ordenamiento de las alternativas de la mejor a la peor, con la posibilidad de empates e incomparabilidades. Por último, la clasificación (sorting) consiste en asignar cada una de las alternativas a una familia de categorías definidas previamente; estas categorías frecuentemente están ordenadas de la peor a la mejor. (Doumpos, y Zopounidis (2002b); Figueira et al., (2010)).

2.6 Enfoques para la toma de decisiones multicriterio

De manera general, se pueden encontrar cuatro tipos de enfoques para la toma de decisiones, siendo estos el enfoque normativo, el descriptivo, el prescriptivo y el constructivo, aunque algunos autores omiten el último o los dos últimos (Tsoukias, 2007). En la Tabla 2.6, tomada del trabajo de Gastélum (2014), se resumen las características principales de los cuatro tipos de enfoques:

Tabla 2.6 – Principales características de los enfoques para la toma de decisiones multicriterio

Enfoque	Características	Literatura relacionada
Normativo	Se derivan de modelos de racionalidad de normas establecidas a priori. Tales normas son postuladas como necesarias para el comportamiento racional. Las desviaciones de estas normas reflejan errores o deficiencias del cliente quien debe ser ayudado a aprender a decidir de una manera racional. Estos modelos están diseñados a ser universales, en que deben aplicar para todos los clientes que quieran comportarse racionalmente. Como analogía, se pueden considerar las normas éticas, las leyes y normas religiosas.	Fishbum (1970, 1989) von Neumann y Morgenstem (1944), Luce y Raiffa (1957), Savage (1954), Wakker (2013).
Descriptivo	Se derivan de modelos de racionalidad al observar cómo los tomadores de decisiones toman decisiones. En particular, se pueden vincular las decisiones realizadas con la calidad de los resultados. Estos modelos son de carácter general, en cuanto a que debe aplicarse a una amplia gama de clientes que enfrentan problemas similares de decisión. Como analogía, se pueden suponer	Allais (1979), Humphreys et al. (2000), Kahneman et al. (1981), Kahneman y Tversky (1979), Montgomery (1983), Montgomery y Svenson (1976), Poulton (1994), Svenson (1996), Tversky

	a científicos tratando de derivar las leyes de los fenómenos observados.	(1969, 1972), Edwards y von Winterfeldt (1986).
Prescriptivo	Descubren modelos de racionalidad para un cliente dado de sus respuestas a las preguntas relacionadas con las preferencias. El modelado consiste en descubrir el modelo de la persona que está siendo ayudado a decidir, es decir, revelando su sistema de valores. Por lo tanto, no tienen la intención de ser general, sino sólo ser adecuado para el cliente eventual en un contexto particular. De hecho el cliente puede estar en dificultades al tratar de responder a las preguntas del analista y/o no puede proporcionar una descripción completa de la situación del problema y sus valores. Sin embargo, un enfoque prescriptivo aspira a ser capaz de proporcionar una respuesta apropiada a la mejor información del cliente aquí y ahora. Como analogía, se puede considerar a un médico haciendo preguntas a un paciente, con el fin de descubrir su enfermedad y prescribir un tratamiento.	Belton y Stewart (2002), Keeney (2009), Larichev y Moshkovich (1995), Roy (1996), Tversky (1977), Vanderpooten (2002), Vincke (1992), Weber y Coskunoglu (1990).
Constructivo	Son inducidos a ayudar a un cliente para construir sus propios modelos de racionalidad con base a sus respuestas a las preguntas relacionadas con las preferencias. Bajo esta perspectiva el analista sólo ayuda al cliente a construir el modelo de racionalidad. La "discusión" entre el cliente y el analista no es "neutral" en este enfoque. Realmente tal interacción es parte del proceso de ayuda a la decisión al construir la representación del problema del cliente y anticipar, en cierta medida, su solución. Modelar bajo este enfoque consiste en construir un modelo con la persona que está siendo apoyada a decidir, adecuado para ese cliente eventual y su contexto particular. Como analogía, se supone un diseñador o un ingeniero tentativamente desarrollando un nuevo producto junto con el cliente.	Checkland (1981), Genard y Pirlot (2002), Landry (1983), Rosenhead (1989), Roy (1996), Schaffer (1988), Watzlawick et al. (1974).

**Tabla tomada del trabajo de Gastélum (2014)*

De acuerdo con Gastélum (2014), en el enfoque normativo se busca encontrar una solución óptima. Para encontrarla, se deben cumplir una serie de axiomas, como la transitividad y la comparabilidad total de las preferencias del decisor. En el enfoque normativo se le solicita al decisor que sus preferencias cubran ambos axiomas, lo cual para él podría ser una tarea compleja.

La comparación entre alternativas conduce a la generación de relaciones binarias. Tal vez el requisito de coherencia más fundamental impuesto a una relación, es el axioma de transitividad. Si una relación se interpreta como relación de preferencia, la transitividad postula que dada una alternativa, si ésta es al menos tan buena como una segunda y la segunda alternativa es, a su vez, al menos tan buena como una tercera, entonces, la primera alternativa debe ser al menos tan buena como la tercera. Sin embargo, desde un punto de vista empírico, así como un punto de vista conceptual, la transitividad es frecuentemente considerada como demasiado exigente, sobre todo en los problemas de decisión en grupo. (Bossert y Suzumura, 2010). Por otro lado, en la comparabilidad total, el tomador de decisiones debe tener la capacidad de comparar todas las alternativas entre sí. Lo anterior, es un esfuerzo arduo que el tomador de decisiones debe hacer para construir una función de valor; pero si se pudiera garantizar que ambos axiomas se cumplen con dicha función de valor se podría encontrar una solución óptima. Pero hay situaciones donde la transitividad o la comparabilidad total no se cumplen, es por ello, que se han creado métodos más flexibles para la comparación de las alternativas y definición de criterios de evaluación, donde estos últimos deben cumplir también con una serie de condiciones. Asimismo, otros tipos de elementos podrían ser tomados en cuenta en un proceso de decisión, como la incertidumbre, que corresponde a la falta de conocimiento seguro o fiable sobre alguna cosa en particular, que puede ser modelada con la teoría de utilidad. Otro elemento podría ser la vaguedad, la cual puede estar presente en los datos cuando son proporcionados por el tomador del decisiones o cuando se obtienen de otras fuentes y que consiste en que dado un valor en particular, éste sea percibido diferente de una persona a otra, es decir no es preciso, por ejemplo, la estatura: baja, media, alta. La vaguedad podría ser modelada a través de la lógica difusa.

El uso de enfoques alternativos al normativo ha ido ganando terreno en las últimas cuatro décadas, en buena razón porque la cantidad de alternativas de solución se ha incrementado con el tiempo, agregando mayor complejidad a los problemas y porque no todos los problemas del mundo real pueden ser modelados desde ese enfoque. Uno de esos enfoques alternativos es el constructivo (descrito en la Tabla 2.6) que se refiere a ayudar a un DM a tomar una decisión, con el acompañamiento de un analista que le ayudará en el proceso de decisión. Cabe señalar que una característica de este tipo de metodologías es, que generalmente, existen criterios contradictorios entre sí y que todas las alternativas son soluciones posibles.

2.6.1 El enfoque normativo

De acuerdo con Navarro (2005), la teoría normativa de la decisión toma como premisa central la racionalidad y la consistencia del decisor (Howard y Matheson,1984). El enfoque normativo le confiere un poder infinito de discriminación en la decisión, esto es, capacidad de percibir y ponderar diferencias que descriptivamente serían imperceptibles (French, 1993). La primera demanda al DM es que tenga capacidad de decisión; no se le permite rehusarse a comparar dos objetos, a establecer entre ellos una cierta relación de preferencia, que puede ser indiferencia como un caso particular.

Utilizaremos la siguiente notación para representar las decisiones del DM:

Preferencia estricta $a \succ b$

Para dar a entender que el DM prefiere la alternativa '*a*' sobre la '*b*'. Dicho de otra forma, estaría decepcionado si fuese obligado a tomar la alternativa '*b*'.

Indiferencia $a \sim b$

Significa que el decisor es indiferente entre las alternativas '*a*' y '*b*'. Operacionalmente la indiferencia se interpreta como que el DM no se siente inconforme si se le obliga a escoger entre '*a*' o '*b*'.

Preferencia débil: a$\succsim$b

Significa que el DM sostiene que la alternativa '*a*' es al menos tan buena como la '*b*'. No se sentiría defraudado si se le forzara a tomar la alternativa '*a*'.

La preferencia estricta, indiferencia y preferencia débil son relaciones binarias definidas sobre el conjunto de decisión *A*. Estas relaciones deben cumplir las siguientes propiedades que el enfoque normativo asocia con la racionalidad:

i. **Transitividad en la preferencia estricta:** Para tres alternativas cualesquiera *a*, *b*, *c*, si el DM sostiene que $a \succ b$ y $b \succ c$, entonces también debe sostener que $a \succ c$.

ii. **Asimetría:** Para cualquier par de alternativas *a*, *b*, si el DM sostiene que $a \succ b$, entonces no debe sostener que $b \succ a$.

iii. **Transitividad en la indiferencia:** Para tres alternativas cualesquiera *a*, *b*, *c*, si el DM sostiene que $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces también debe sostener que $a \sim c$.

iv. **Reflexividad:** Para toda opción *a* sucede que $a \sim a$.

v. **Simetría:** Para cualquier par de alternativas *a*, *b*, si el DM sostiene que $a \sim b$, entonces también debe sostener que $b \sim a$.

vi. **Transitividad en conjunto:** Para tres alternativas cualquiera *a*, *b*, *c*, si el DM sostiene que $a \sim b$ y $b \succ c$, entonces también debe sostener que $a \succ c$; y si sostiene que $a \succ b$ y $b \sim c$, también debe sostener que $a \succ c$.

A continuación enunciaremos 4 axiomas referidos principalmente a la relación de preferencia débil:

Axioma 1 ***Comparabilidad***

La relación $\succsim$ es comparable en *A*, es decir, $\forall\, a,\ b\ \in A$, al menos una de las siguientes proposiciones es verdadera:

$$a \succsim b$$

$$b \succsim a$$

Axioma 2 ***Transitividad***

La relación $\succsim$ es transitiva en *A*, es decir, $\forall\, a, b, c \in A$ tales que

si se cumple que $a \succsim b$ y $b \succsim c$, entonces también se cumple que $a \succsim c$.

Axioma 3 ***Consistencia de la indiferencia y preferencia débil***

$$\forall\ a, b \in A,\ \ a \sim b \Leftrightarrow (a \succsim b \text{ y } b \succsim a).$$

Axioma 4 ***Consistencia de la preferencia débil y estricta***

$\forall\ a, b \in A$,

$a \succ b \Leftrightarrow b \not\succsim a$.

La relación de Preferencia débil ($\succsim$) define un orden débil; la Preferencia estricta ($\succ$) define un orden estricto; la Indiferencia ($\sim$) define una relación de equivalencia.

Por lo general el DM está interesado en encontrar la mejor alternativa o un orden de *A*. La similitud entre un ordenamiento utilizando una relación basada en la preferencia débil ($\succsim$) y el ordenamiento numérico basado en $\geq$ resulta por demás interesante, debido a que si se logra encontrar una función de valor ordinal *v(.)* que represente las preferencias de tal forma que:

$$v(a) \geq v(b) \Leftrightarrow a \succsim b$$

se heredarían las ventajas de la compactación de la representación y la sencillez en la discusión conceptual. Para conocer las condiciones necesarias y suficientes para la existencia de tal función de valor ordinal ver (French, 1993).

2.6.2 El Enfoque Relacional

El enfoque relacional se refiere al enfoque descriptivo (constructivo, según algunos autores). Entre los procedimientos más importantes de este enfoque se encuentran los métodos basados en la relación de no inferioridad (*outranking*). El concepto de no inferioridad tuvo sus orígenes en las dificultades encontradas en diversos problemas concretos (Abgueguen, 1971), (Buffet *et al.*, 1967). Desde entonces, numerosas aplicaciones han sido desarrolladas (Bard *et al.*, 1990), (Climaco *et al.*, 1988), (Martel y Nadeau, 1988), (Roy *et al.*, 1986), (Slowinski y Treichel, 1988), (Roy, 1996). Dentro de estos métodos quizás los más relevantes son los denominados métodos ELECTRE, considerados como una parte de la filosofía MCDA. La familia de métodos ELECTRE fue concebido por Bernard Roy e implementa el concepto de relación de "*outranking*" o de no inferioridad. Las diferentes versiones de los métodos ELECTRE se apoyan en los mismos conceptos fundamentales y difieren en diversas características y en el tipo de problema de decisión al que se aplican. Existen seis versiones de los métodos ELECTRE: I, II, III, IV, TRI (con sus variantes) e IS.

2.6.3 Sistema relacional de preferencias

El *sistema relacional de preferencias* está formado por cuatro relaciones fundamentales (Roy, 1996):

- **Indiferencia (*I*):** *a I b* significa que existen razones claras y positivas para considerar que las alternativas son equivalentes. *I* es una relación simétrica.

- **Preferencia estricta (*P*):** *aPb* significa que existen razones claras y positivas para justificar que una de las dos alternativas (*a*) es significativamente preferida a la otra (*b*). *P* es una relación asimétrica.

- **Preferencia débil (*Q*):** *aQb* refleja una situación de duda entre *aPb* y *aIb*. Es una relación asimétrica.

- **Incomparabilidad (*R*):** las alternativas son incomparables en el sentido que ninguna de las tres situaciones anteriores predomina. Se denota por *aRb*.

De acuerdo con el sistema relacional de preferencias establecido por Roy tenemos que la **relación de no inferioridad *S*** está definida por la siguiente equivalencia:

$$aSb \Leftrightarrow aPb \vee aQb \vee aIb$$

Note que:

1. $a\,S\,b \quad \wedge \quad b\,S\,a \quad \Leftrightarrow \quad a\,I\,b;$
2. $a\,S\,b \quad \wedge \quad b\,nS\,a \quad \Leftrightarrow \quad a\,P\,b \vee aQb\,;$
3. $a\,nS\,b \quad \wedge \quad b\,nS\,a \quad \Leftrightarrow \quad a\,R\,b$

2.6.4 Los métodos ELECTRE

2.6.4.1 Notaciones Preliminares y Definiciones

Para entender cuál es la filosofía de los métodos ELECTRE y qué clase de problemas puede resolver, es necesario primero especificar los supuestos iniciales que utiliza.

- **Acciones o alternativas:** Existe un conjunto potencial de acciones (o alternativas) (Roy, 1990), $A' = \{a_i \ / \ i = 1, \ldots, m\}$ a considerar. Tales acciones no son necesariamente exclusivas. Cada una de ellas está perfectamente identificada, pero no necesariamente.

- **Criterios:** Existe una familia consistente *J* de *n* criterios g_i (Bouyssou, 1990), mediante los cuales se caracteriza cada una de las opciones y pueden analizarse sus consecuencias. $g_i(a_j)$ caracteriza la evaluación hecha – con mayor o menor precisión o subjetividad – de una acción a_j sobre el *i–ésimo* criterio, siendo E_j el conjunto de consecuencias posibles del *j-ésimo* criterio.

  De manera formal tenemos que:

$$g_j : a \in A' \rightarrow e = g_j(a) \in E_j$$

- **Relación de no inferioridad (*S*):** Diremos que *aSb* si tomando en cuenta el conjunto de criterios se tienen argumentos suficientemente fuertes (poder de la coalición de concordancia) para considerar verdadero el enunciado "*a es al menos tan buena como b*" y se carece de argumentos de peso (debilidad de la coalición de discordancia) para refutar esa afirmación. Diremos que *a nS b* si los argumentos a favor de la proposición "*a es al menos tan buena como b*" no son suficientes (debilidad de la coalición de concordancia), o si existen razones fuertes (existencia de una coalición de veto, forma de poder de la coalición de discordancia) que se opongan a ella.

- **Criterios verdaderos:** Es la forma más simple de los criterios, donde no existen umbrales, y las diferencias entre los valores de los criterios son utilizadas para determinar cuál opción se prefiere.

  Se dice que la opción '*a*' es preferida a la opción '*b*' con respecto al *i-ésimo* criterio si su valor es superior, es decir:

  $$aP_ib \;\Leftrightarrow\; g_i(a) > g_i(b)$$

  Se dice que la opción '*a*' es indiferente a la opción '*b*' con respecto al *i-ésimo* criterio si sus valores son iguales, es decir:

  $$aI_ib \;\Leftrightarrow\; g_i(a) = g_i(b)$$

- **Pseudo-criterios:** Un pseudo-criterio reconoce dos tipos de umbrales de discriminación para las diferencias de sus valores. La utilización del valor de un criterio verdadero para modelar las preferencias es con frecuencia poco realista. La realidad nos demuestra que existe una zona intermedia dentro de la cual la información preferencial es contradictoria o indeterminada. Esto le da fundamento a la utilización de dos umbrales (p, q) para modelar los diferentes niveles de preferencias, en cada criterio. Primero, un umbral de indiferencia q, dentro del cual el decisor muestra indiferencia, y, segundo, un umbral de preferencia p, con el cual el decisor expresa una preferencia estricta (sin lugar a duda). En el intermedio se encuentra una zona que representa una situación de preferencia débil. Las expresiones que aparecen a continuación muestran el rol de los umbrales:

  $$aP_ib \quad \Leftrightarrow\; g_i(a) > g_i(b) + p(g_i(b))$$

$$aQ_ib \iff g_i(b) + p(g_i(b)) \geq g_i(a) > g_i(b) + q(g_i(b))$$

$$aI_ib \iff g_i(b) + q(g_i(b)) \geq g_i(a) \text{ y } g_i(a) + q(g_i(a)) \geq g_i(b)$$

2.6.4.2 Modelos de Relaciones de No Inferioridad *S*

Las primeras versiones de ELECTRE (I y II) consideraban criterios verdaderos y establecían relaciones de no inferioridad deterministas (crisp outranking relations en inglés) sobre la base de la lógica clásica (la no inferioridad era un enunciado verdadero o falso) y la teoría de conjuntos clásica. ELECTRE III plantea un enfoque más general; considerando pseudocriterios, obtiene una relación de no inferioridad difusa, en la que al enunciado "*a es al menos tan buena como b desde el punto de vista del DM*" se le asocia un grado de credibilidad o valor de verdad en el intervalo [0, 1].

2.6.4.2.1 Relación de No Inferioridad Determinista

Sea $A' = \{a_i \ / \ i \in I\}$ un conjunto de acciones potenciales, evaluadas con una familia de criterios verdaderos, mediante $g = \{g_j \ / \ j \in J\}$. La evaluación multicriterio de una acción $a \in A'$ puede ser representada por el vector $g(a) = [g_1(a), \ldots, g_n(a)] \in Em = E_1 \ X \ E_2 \ X \ldots X \ E_n$.

Una relación de no inferioridad determinista consiste en admitir que para cualquier par de acciones (a,b) de $A' X \ A'$, "*a no es inferior a b*" ($a \ S \ b$), cuando se satisfacen las pruebas de concordancia y no-discordancia. La prueba de concordancia corresponde a la regla de aceptación de la mayoría; y la de no-discordancia a la inexistencia de alguna posible condición de veto para la aceptación de la relación de no inferioridad.

Consideremos el conjunto de criterios en los cuales *a* es estrictamente preferida a *b* (Ostanello, 1983). A dicho conjunto lo denotamos como $J^+(a,b) \subseteq J$; al conjunto de criterios donde *a* y *b* poseen igual evaluación lo denotaremos como $J^=(a,b) \subseteq J$. Por último al conjunto de criterios para los cuales *b* es estrictamente preferida sobre *a*, lo denotaremos con $J^-(a,b)$.

Concordancia

La prueba de concordancia consiste en verificar que la importancia relativa de los conjuntos J^+, J^- y $J^=$, es compatible con la hipótesis aSb. Quizás la principal dificultad que esto acarrea es la determinación de la importancia asociada a los distintos criterios. Supongamos que el anterior problema está resuelto y que w_j, $j \in J$, representa el peso correspondiente al criterio *j-ésimo* dentro de la familia *g*. Utilizando la información de preferencia de los criterios, podemos definir la importancia de los anteriores conjuntos de la siguiente forma:

$$P^+(a,b) = \sum_{j \in J+} (w_j)$$

$$P^=(a,b) = \sum_{j \in J=} (w_j)$$

$$P^-(a,b) = \sum_{j \in J-} (w_j)$$

Reuniendo la información anterior se propone la formulación siguiente, como prueba de concordancia:

$$c(a,b) = [(P^+(a,b) + P^=(a,b))/T] \geq c, \text{ donde } T = \sum_{j \in J} (w_j)$$

y

$$[P^+(a,b) / P^-(a,b)] \geq 1$$

donde c es un parámetro entre cero y uno ($0 \leq c \leq 1$), y representa el nivel mínimo de concordancia o mayoría; por su importancia, su valor debe ser discutido con el *DM*, aunque se sugieren valores naturales como 2/3 o 3/4, que impactan la seguridad de la relación de no inferioridad.

No-Discordancia

Se pueden definir diferentes tipos de pruebas de no-discordancia; dependiendo de la naturaleza de la escala y de la habilidad del decisor para identificar posibles situaciones de veto, pueden utilizarse formas cardinales u ordinales para su implementación.

Forma Cardinal:

Uno de los procedimientos consiste en calcular un índice marginal de discordancia para cada criterio que se oponga a la relación de no inferioridad (Ostanello, 1983):

$$d_j(a,b) = [g_j(b) - g_j(a)] / [e^s_j - e^i_j] \quad j \in J^-(a,b)$$

donde e^s_j y e^i_j son el supremo y el ínfimo respectivamente de los valores de g_j en E_j.

La prueba de no-discordancia se pasa satisfactoriamente si se cumplen las siguientes desigualdades:

$$d_j(a,b) \leq k_j \qquad j \in J^-(a,b)$$

donde , $0 \leq k_j \leq 1$, $\forall\ j$, es un parámetro que depende de la naturaleza del criterio y de su escala.

Forma Ordinal:

En esta forma se definen conjuntos de discordancia, $D_j \subset E_j\ X\ E_j$, para cada criterio, los cuales reflejan posibles situaciones de veto.

Por definición, un par de valores de $E_j\ X\ E_j$ (e,e'), $e < e'$, es un elemento de D_j, cuando la hipótesis *aSb* no es admisible para un par de acciones tales que $g_j(a) = e$, $g_j(b) = e'$.

En otras palabras, un par de discordancia corresponde a una desviación negativa sobre el *j-ésimo* criterio que no puede ser compensada con ninguna desviación positiva en los criterios en $J^+(a,b)$. La prueba se pasa satisfactoriamente si $(e,e')_j$ no pertenecen a D_j para ningún criterio *j*.

2.6.4.2.2 Relación de No Inferioridad difusa

Una relación difusa asocia un nivel o grado de credibilidad de *aSa'* para cada par de acciones (a,a'). Ese nivel es identificado mediante la notación $\delta(a,a')$ y cumple que $0 \leq \delta(a,a') \leq 1$. A continuación explicamos muy brevemente cómo se define esta relación según ELECTRE III.

Índice de Concordancia:

Para cada par de acciones (a,a'), se puede definir un grado de credibilidad parcial $\delta_j(a,a')$, asociado a *aSa'*con respecto al *j-ésimo* atributo, de la siguiente forma:

$$\delta_j(a,a') = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad gj(a) - gj(a') \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad g_j(a') - g_j(a) \geq p_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si} \quad gj(a') - gj(a) \leq q_j(gj(a)) \\ \dfrac{[pj(gj(a)) - (gj(a') - gj(a))]}{[pj(gj(a)) - qj(gj(a))]} & \text{si } q_j(g_j(a)) \leq g_j(a') - g_j(a) \leq p_j(g_j(a)) \end{cases}$$

donde p_j y q_j denotan los umbrales de preferencia estricta e indiferencia respectivamente.

Utilizando la información contenida en δ el índice de concordancia se define como:

$$c(a,a') = \sum_{j\in J} (w_j)\delta_j(a,a') \,/\, \sum_{j\in J} (w_j)$$

Índice de Discordancia:

Para cada par de acciones (a,a'), se define el índice de discordancia parcial $d_j(a,a')$, asociado al *j-ésimo* atributo de la siguiente forma:

$$d_j(a,a') = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad gj(a') \leq gj(a) + p_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si} \quad g_j(a') \geq g_j(a) + v_j(g_j(a)) \\ \dfrac{[pj(gj(a)) - (gj(a') - gj(a))]}{[pj(gj(a)) - vj(gj(a))]} & \text{si} \quad v_j(g_j(a)) \geq g_j(a') - g_j(a) \geq p_j(g_j(a)) \end{cases}$$

donde v_j denota el umbral de veto para el criterio j.

Grado de Credibilidad:

Para cualquier par de acciones (a,a') el grado de credibilidad $\sigma(a,a')$ asociado a aSa' se define en ELECTRE III de la siguiente forma:

$$\sigma(a,a') = \begin{cases} c(a,a') & \text{si} \quad d_j(a,a') \leq c(a,a') \ \forall\, j\in J \\ c(a,a') \prod_{j\in J^*} \dfrac{(1-dj(a,a'))}{(1-c(a,a'))} & \text{otro caso} \end{cases}$$

donde J^* es el conjunto de criterios donde $d_j(a,a') > c(a,a')$.

3 Representación de las relaciones de preferencia básicas en esquemas de argumentación

3.1 Introducción

En la sección 2.6 se definió un sistema relacional de preferencias desde la perspectiva de la escuela europea de MCDA. Se observa que para considerar la existencia de cualquiera de estas relaciones de preferencia deben existir “claras y positivas razones” que las justifiquen. Por razones claras y positivas se entiende que deben existir fuertes razones a favor y que no existan fuertes razones en contra. Con esto surgen las preguntas: ¿Cuáles son esas claras y positivas razones?, ¿Cómo saber si son razones suficientes? Ahora bien, el término “argumentación” se usa para referirse “a la actividad total de plantear pretensiones, ponerlas en cuestión, respaldarlas produciendo razones, criticando esas razones, refutando esas críticas, etc.” (Atienza, 2005). De manera natural el ser humano construye argumentos con razones a favor y en contra sobre alguna situación determinada, razona, las evalúa y decide. Bajo esta idea, en este capítulo se propone una serie de argumentos compuestos de condiciones a favor y en contra que evalúan la existencia de esas claras y positivas razones. Con esto, al evaluar la veracidad de dichos argumentos, se evalúa al mismo tiempo la veracidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas desde la perspectiva propuesta por Bernard Roy. En la sección 3.2 se describen los argumentos propuestos para considerar la existencia de razones claras y positivas de cada una de las relaciones de preferencia básicas. En la sección 3.3 se muestra la representación de los argumentos de la sección 3.2 en esquemas de argumentación con el fin de derivar una evaluación de la veracidad de los mismos. En la sección 3.4 se describe un procedimiento empírico que se realizó con el fin de validar los esquemas de argumentación propuestos. En la sección 3.5 se muestran los resultados del experimento y por último en la sección 3.6 se muestra un análisis de los resultados.

3.2 Estructura inicial de argumentos que representan las relaciones de preferencia básicas

Los argumentos propuestos en este trabajo se inspiran en la manera intuitiva en que comparamos dos alternativas:
En la comparación a pares, para cada alternativa, realizar lo siguiente:

1) Agrupar los criterios a favor: aquellos donde se percibe una mejor evaluación de esa alternativa sobre la otra;

2) Agrupar los criterios intensamente a favor: estos son un subconjunto de los criterios a favor. En estos criterios el decisor considera que la evaluación de la alternativa en cuestión con respecto a la otra es considerablemente mejor;

3) Agrupar los criterios en contra: aquellos donde se percibe una peor evaluación de esa alternativa sobre la otra;

4) Agrupar los criterios intensamente en contra: estos son un subconjunto de los criterios en contra. En estos criterios el decisor considera que la evaluación de la alternativa en cuestión con respecto a la otra es considerablemente peor;

5) Agrupar los criterios donde son indiferentes: aquellos criterios donde se perciben las evaluaciones de las dos alternativas como iguales o muy parecidas de tal manera que se consideran igual de buenas en esos criterios. Queda claro que este grupo es el mismo para las dos alternativas;

6) Agrupar, si los hay, aquellos criterios que tengan capacidad de veto, es decir, aquellos criterios en los que si la evaluación de la alternativa en dichos criterios pasan de cierto umbral, al que llamaremos umbral de veto (ver sección 4.2), el decisor ya no considera viable que esa alternativa sea preferida o indiferente sobre

la otra, no importando las evaluaciones que tenga esa alternativa en los demás criterios;

7) Agrupar, si los hay, aquellos criterios con capacidad de dictadura, que son aquellos criterios en los que si la evaluación de la alternativa en dichos criterios pasan de cierto umbral, al que llamaremos umbral de dictadura (ver sección 4.2), el decisor considera que esa alternativa es preferida sobre la otra, no importando las evaluaciones que tenga esa alternativa en los demás criterios.

8) Determinar razones a favor y en contra de la existencia de la preferencia o indiferencia de la alternativa en cuestión sobre la otra, mediante cierta comparación lógica entre las cantidades de criterios que tienen cada uno de los grupos formados anteriormente. A la cantidad de criterios de cada grupo la llamaremos "fuerza de los criterios *x*", donde *x* se refiere al nombre del grupo en cuestión. Por ejemplo, a la cantidad de criterios del grupo o coalición "a favor de *a*" la llamaremos "fuerza de los criterios a favor *a*".

9) Decidir si la alternativa en cuestión es preferida (o indiferente) sobre la otra, haciendo un balance entre las razones a favor y en contra del punto anterior.

Los argumentos propuestos en este trabajo se derivan de las ideas anteriormente descritas con apoyo de la opinión de expertos involucrados en la investigación en el área de toma de decisiones. Estos argumentos engloban razones a favor de la existencia de las relaciones de preferencia así como razones en contra que atenúan y/o refutan la existencia de las mismas. Para considerar estos argumentos como viables, es necesario validarlos de alguna manera. En las siguientes secciones se describe un procedimiento para esto así como los resultados obtenidos.

3.2.1 Argumentos para establecer la relación de preferencia estricta P

A continuación se proponen los argumentos compuestos de razones a favor así como de razones en contra de que se presente la relación de preferencia estricta *P*. Un argumento se considerará válido si existen suficientes razones a favor y NO existen suficientes razones en contra.

Sean *a* y *b* dos alternativas a evaluar. Si se cumple cualquiera de los argumentos de la tabla 3.1 y además si ningún criterio con capacidad de veto rebasa su respectivo umbral, se concluye que existe una relación de preferencia *a*P*b*.

*TABLA 3.1.- Argumentos propuestos para considerar razones claras y positivas de que se presenta la relación estricta a*P*b*

Argumento	Razones claras y positivas en apoyo de la preferencia estricta de *a* sobre *b*	Razones en contra de la preferencia estricta de *a* sobre *b*
P1	La fuerza de los criterios a favor de *a* es mayor que la fuerza de los criterios a favor de *b*.	1) La fuerza de los criterios intensamente a favor de *b* es mayor que la fuerza de los criterios intensamente a favor de *a* O 2) La fuerza de los criterios en donde existe indiferencia es parte significativa de la fuerza total de criterios.
P2	La fuerza de los criterios a favor de *a* es considerablemente mayor que la fuerza de los criterios a favor de *b*.	1) La fuerza de los criterios intensamente a favor de *b* es considerablemente mayor que la fuerza de los criterios intensamente a favor de *a*.

P3	La fuerza de criterios intensamente a favor de *a* es mayor que la fuerza de criterios intensamente a favor de *b*.	1) La fuerza de los criterios a favor de *b* es mayor que la fuerza de los criterios a favor de *a* O 2) La fuerza de los criterios en donde existe indiferencia es parte significativa de la fuerza total de criterios.
P4	La fuerza de criterios intensamente a favor de *a* es considerablemente mayor que la fuerza de criterios intensamente a favor de *b*.	1) La fuerza de los criterios a favor de *b* es considerablemente mayor que la fuerza de los criterios a favor de *a*
P5	Alguno de los criterios con capacidad de dictadura ha rebasado cierto umbral predefinido.	Ninguna.

La palabra "mayor" se considera como una función matemática y no como el operador clásico de comparación (>). La función "mayor" debe reflejar la percepción del decisor de que al mostrarle la diferencia entre dos cantidades, ésta diferencia es lo suficientemente grande para considerar que la primer cantidad es mayor que la otra. De la misma manera, la función "considerablemente mayor" debe reflejar cuándo el decisor considera que la diferencia entre las dos cantidades es significativa o abrumadora. Por último, la palabra "significativa" se considera como una función matemática que debe representar el porcentaje del total que una partición debe tener para que el decisor la considere como la partición más grande respecto a las demás particiones existentes.

Para dar mayor versatilidad al modelo, ha de notarse que el argumento P5 mostrado en la tabla 3.1 hace referencia a criterios con capacidad de "dictadura". Este tipo de criterios tienen un concepto opuesto a los criterios con capacidad de veto: Si alguno de estos criterios existe, entonces se considera como verdadera la existencia de la relación de preferencia de *a* sobre *b* no importando las evaluaciones que tenga la alternativa *a* en el resto de criterios.

3.2.2 Argumentos para establecer la relación de indiferencia I

A continuación se enumeran los argumentos compuestos de razones claras y positivas a favor así como de razones en contra de que se presente la relación de indiferencia *I*. Las condiciones en contra reducen la claridad de las razones que respaldan positivamente la indiferencia.

Sean *a* y *b* dos alternativas a evaluar. Si se cumple cualquiera de estos argumentos y además la fuerza de los criterios con capacidad de veto no rebasa cierto umbral se concluye que existe una relación de indiferencia *aIb*:

TABLA 3.2.- Argumentos propuestos para considerar razones claras y positivas de que se presenta la relación de indiferencia aIb

Argumento	**Razones claras y positivas que apoyan la indiferencia entra *a* y *b***	**Razones en contra de la indiferencia entre *a* y *b***
I1	La fuerza de los criterios a favor de *a* es parecida a la fuerza de los criterios en contra de *a*. Y La fuerza de los criterios intensamente a favor de *a* es parecida a la fuerza de los criterios intensamente en contra de *a*.	1) La fuerza de los criterios en donde hay indiferencia no es parte significativa de la fuerza total de criterios.
I2	La fuerza de los criterios a favor de *a* es algo mayor que la fuerza de los criterios en contra de *a* Y	1) La fuerza de los criterios donde son indiferentes no es parte significativa de la fuerza total de criterios.

	La fuerza de los criterios intensamente en contra de *a* es algo mayor que la fuerza de los criterios intensamente a favor de *a*.	
I3	La fuerza de los criterios en contra de *a* es algo mayor que la fuerza de los criterios a favor de *a* Y La fuerza de los criterios intensamente a favor de *a* es algo mayor que la fuerza de los criterios intensamente en contra *de a.*	1) La fuerza de los criterios donde son indiferentes no es parte significativa de la fuerza total de criterios
I4	La fuerza de criterios indiferentes entre *a* y *b* es parte significativa de la fuerza total de criterios.	1) La fuerza de los criterios intensamente a favor de *a* es considerablemente mayor que la fuerza de los criterios intensamente en contra de *a*. O 2) La fuerza de los criterios intensamente en contra de *a* es considerablemente mayor que la fuerza de los criterios intensamente a favor de *a*.

La palabra “parecido” se considera como una función matemática y no como el operador clásico de comparación (=). La función matemática “parecido” debe reflejar la percepción del decisor de que al mostrarle la diferencia entre dos cantidades, ésta diferencia es lo suficientemente pequeña para considerar que las dos cantidades son indistintas. De la misma manera, la función “algo mayor” debe reflejar cuándo el decisor considera que la diferencia entre las dos cantidades la considera de tal forma que la primera cantidad está entre parecida y mayor respecto a la otra, sin lograr decidir entre las dos situaciones.

3.2.3 Argumentos para establecer la relación de preferencia débil Q

De acuerdo a la definición de la relación de preferencia débil de la sección 2.6.3, en la cual se establece que una relación de indiferencia *a*Q*b* se presenta cuando existe duda entre *a*I*b* y *a*P*b*, estando seguro que no se presenta *b*P*a*, se propone determinar de manera indirecta la existencia de la relación de preferencia débil tomando en cuenta los valores de verdad de las relaciones *a*P*b*, *a*I*b* y *b*P*a* de acuerdo a los siguientes argumentos:

Se presenta una relación de preferencia débil si se cumple que:

1.- No existen argumentos suficientes que establecen de manera específica la existencia de las relaciones *a*P*b* o *a*I*b*, pero sí los suficientes para determinar que se presenta una o la otra sin estar seguro de cuál de ellas (duda entre *a*P*b* y *a*I*b*) y

2.- No existen argumentos suficientes que establecen la existencia de la relación *b*P*a*.

3.2.4 Argumentos para establecer la relación de incomparabilidad R

De acuerdo a la definición de la relación de incomparabilidad de la sección 2.6.3, en la cual se establece que una relación de incomparabilidad *aRb* se presenta cuando no se justifica la existencia de *a*P*b*, *a*I*b* ni *a*Q*b*, se propone determinar de manera indirecta la existencia de la relación de incomparabilidad de acuerdo a los siguientes argumentos:

1.- Se presenta una relación de incomparabilidad *a*R*b* si no existen argumentos suficientes que establezcan la presencia de *a*P*b*, *a*I*b*, *a*Q*b*, *b*P*a* ni *b*Q*a*.

3.2.5 Argumentos para establecer la relación de no inferioridad S

De acuerdo a la definición de la relación de no inferioridad de la sección 2.6.3, en la cual se establece que una relación *aSb* se presenta cuando existen claras y positivas razones de que se presente ya sea *a*P*b o a*I*b* o *a*Q*b* siempre y cuando que no se presente *b*P*a*, se propone determinar de manera indirecta la existencia de la relación de no inferioridad de acuerdo a los siguientes argumentos:

Se presenta una relación de no inferioridad aSb si se cumple que:

1.- Existen argumentos suficientes que establecen la existencia de una relación $a\mathrm{P}b$, $a\mathrm{I}b$ o $a\mathrm{Q}b$ y no existen argumentos suficientes que establezcan la presencia de la relación $b\mathrm{P}a$.

3.3 Representación de los argumentos en esquemas de argumentación

En la sección 3.2 se describen los argumentos para definir la existencia de las relaciones de preferencia básicas. Ha de notarse que los argumentos de la relación de preferencia débil Q y la relación de incomparabilidad son dependientes de las relaciones de preferencia estricta P y la relación de indiferencia I. Debido a esto sólo es necesario evaluar los argumentos de las relaciones P e I.

Los esquemas de argumentación son formas de argumentos que capturan patrones estereotípicos del razonamiento humano, especialmente de los argumentos refutables (Walton, 2005). Existen varias propuestas de esquemas de argumentación, por ejemplo los desarrollados en (Perelman y Olbrechts-Tyteca,1969). Un esquema de argumentación muy utilizado llamado Esquema de Argumentación de Toulmin (Véase sección 2.1) incorpora, contrario a los argumentos estándar consistentes de premisas y una presunción, elementos adicionales que describen diferentes roles que las premisas pueden jugar en el argumento. Esto permite formar argumentos más expresivos para ser validados. Haciendo una revisión de los diferentes esquemas de argumentación en la literatura, se decidió que el esquema de argumentación de Toulmin es una buena forma de representar los argumentos dados por el experto en la sección 3.2. El objetivo de representar los argumentos como esquemas nos permite utilizar la teoría de la argumentación para validar los argumentos propuestos.

Para facilitar la comprensión de los esquemas de argumentación, en la tabla 3.3 se muestran las abreviaciones que representan ciertos predicados de los que están compuestos los argumentos de la sección 3.2.

TABLA 3.3.- Abreviaciones que se utilizarán en los esquemas de argumentos para simplificar la notación

Abreviación	**Significado**
$J^{+}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios a favor de la alternativa *a*.
$J^{-}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios en contra de la alternativa *a*.
$J^{=}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios indiferentes de las alternativas *a* y *b*.
$J^{+}_{int}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios intensamente a favor de la alternativa *a*.
$J^{-}_{int}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios intensamente en contra de la alternativa *a*.
$J_{VETO}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios con capacidad de veto de la alternativa *a*.
$J_{DICT}(a,b)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios con capacidad de dictadura de la alternativa *a*.
$J^{+}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios a favor de la alternativa *b*.
$J^{-}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios en contra de la alternativa *b*.
$J^{+}_{int}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios intensamente a favor de la alternativa *b*.
$J^{-}_{int}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios intensamente en contra de la alternativa *b*.
$J_{VETO}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios con capacidad de veto de la alternativa *b*.
$J_{DICT}(b,a)$	Valor numérico que representa la fuerza de los criterios con capacidad de dictadura de la alternativa *b*.
$x \approx y$	Función “parecido a”
$x >\sim y$	Función “algo mayor que”
$x > y$	Función “mayor que”
$x >> y$	Función “considerablemente mayor que”
Signif (x)	Función “parte significativa del total”

Hasta este punto no se ha mencionado ningún procedimiento para obtener los valores numéricos mencionados en la tabla 3.3 (J^+, J^-, etc). Se asume que existen y que son cualquier valor real positivo (por ejemplo, pueden ser valores en el intervalo [0,1]) que representan a un predicado en cuestión. A estos valores los llamaremos **índices de fuerza**. Estos valores deben estar en función de las cardinalidades de las coaliciones mencionadas en la sección 3.2.

3.3.1 Esquemas de argumentación para la relación de preferencia estricta P

De acuerdo a la sección 3.2.1, si se cumple cualquiera de los argumentos de la tabla 3.1 y además la fuerza de los criterios con capacidad de veto no rebasa cierto umbral, se concluye que existe una relación de preferencia estricta *a*P*b.*

En la figura 3.1 se muestra el esquema de argumentación de Toulmin que representa a relación de preferencia estricta P.

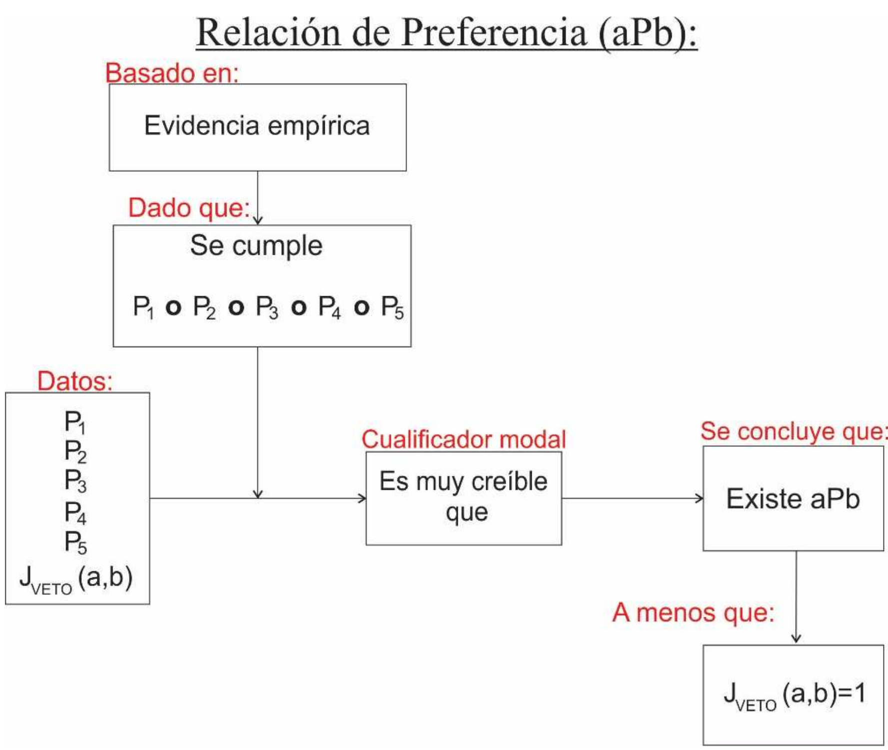


Fig. 3.1.- Argumento de relación de preferencia estricta aPb bajo el esquema de argumentación de Toulmin

El esquema de la figura 3.1 se interpreta de la manera siguiente: Teniendo los índices de fuerza como datos y dado que se cumple cualquiera de los argumentos P1, P2, P3, P4 o P5, respaldado por la opinión de expertos y en evidencia empírica, es muy creíble que se presente una relación de preferencia estricta P, siempre y cuando el índice de la fuerza de los criterios con capacidad de veto no sea igual a uno (este índice vale uno si cualquiera de los índices con capacidad de veto ha rebasado cierto umbral).

De la misma manera, de las figuras 3.2 a 3.6 se muestran los esquemas de argumentación para los argumentos P1, P2, P3, P4 y P5.

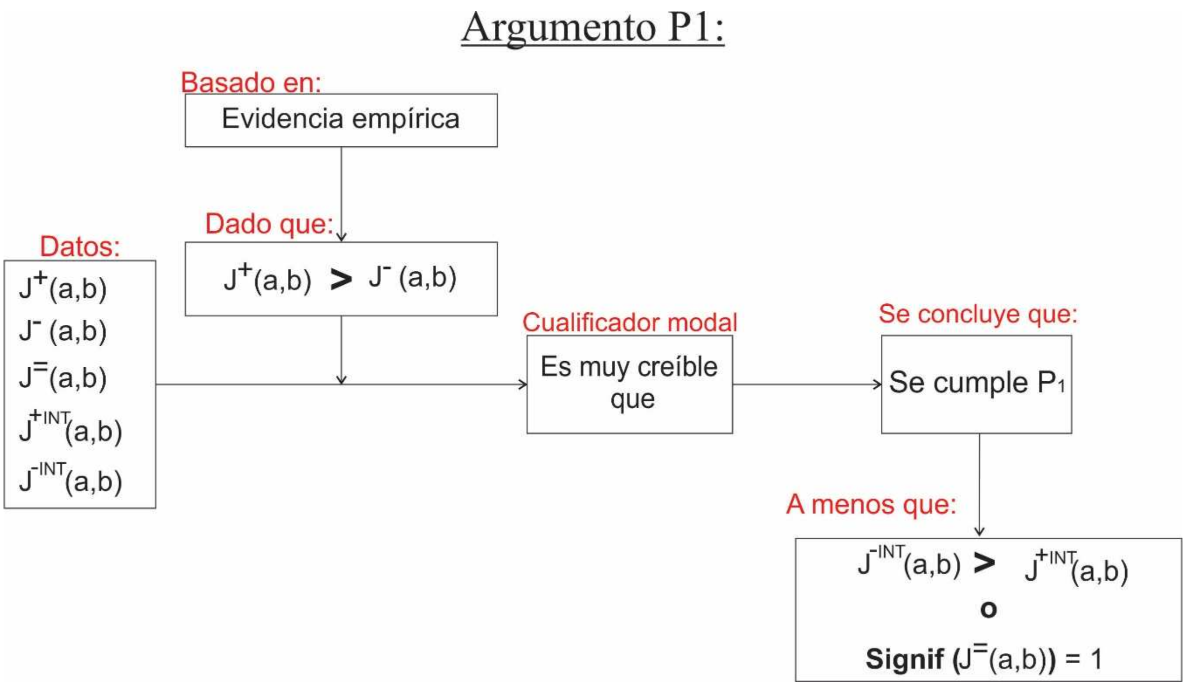


Fig. 3.2.- Argumento de preferencia 1 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

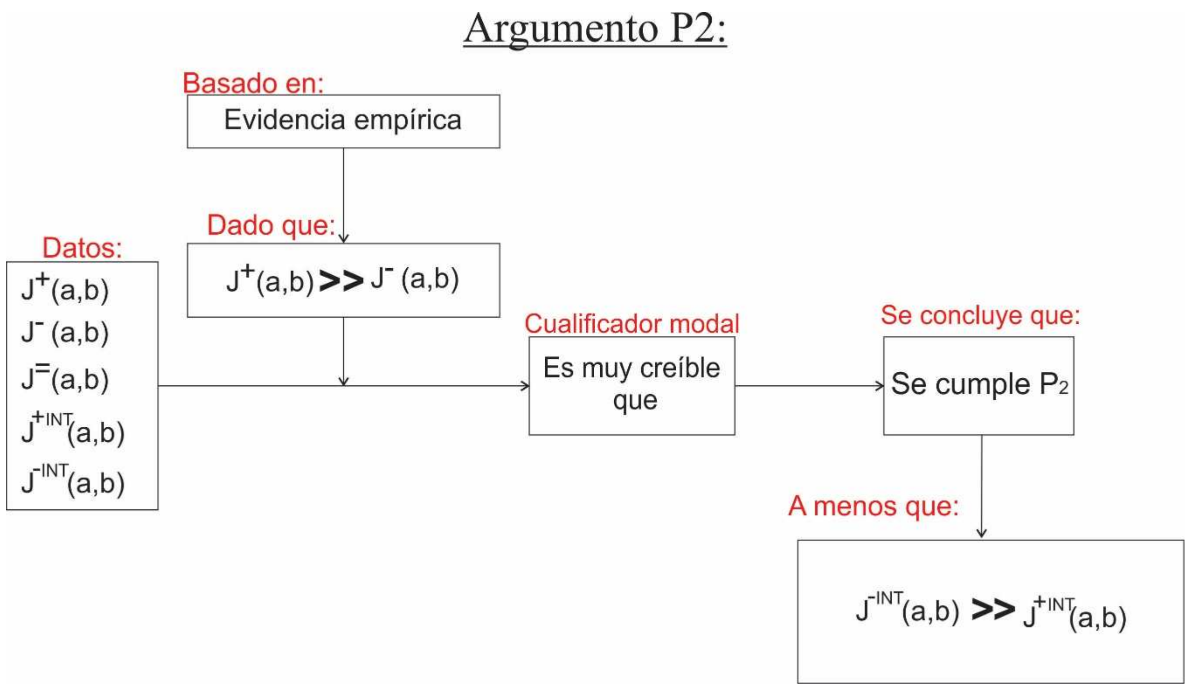


Fig. 3.3.- Argumento de preferencia 2 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

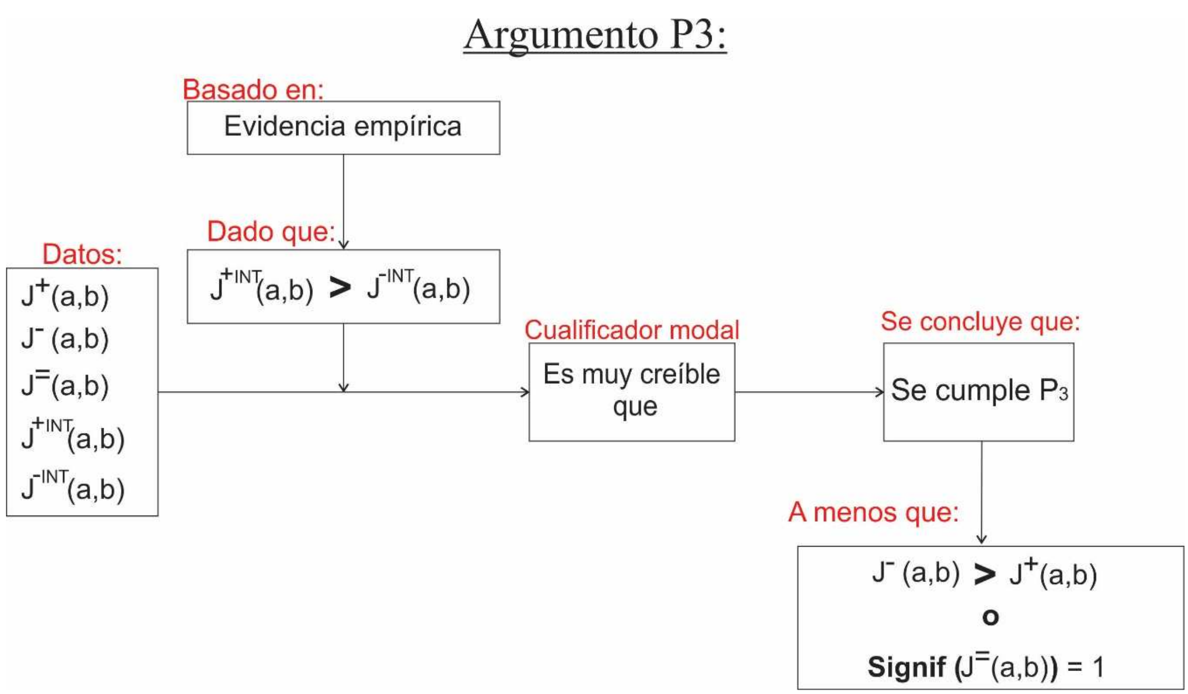


Fig. 3.4.- Argumento de preferencia 3 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

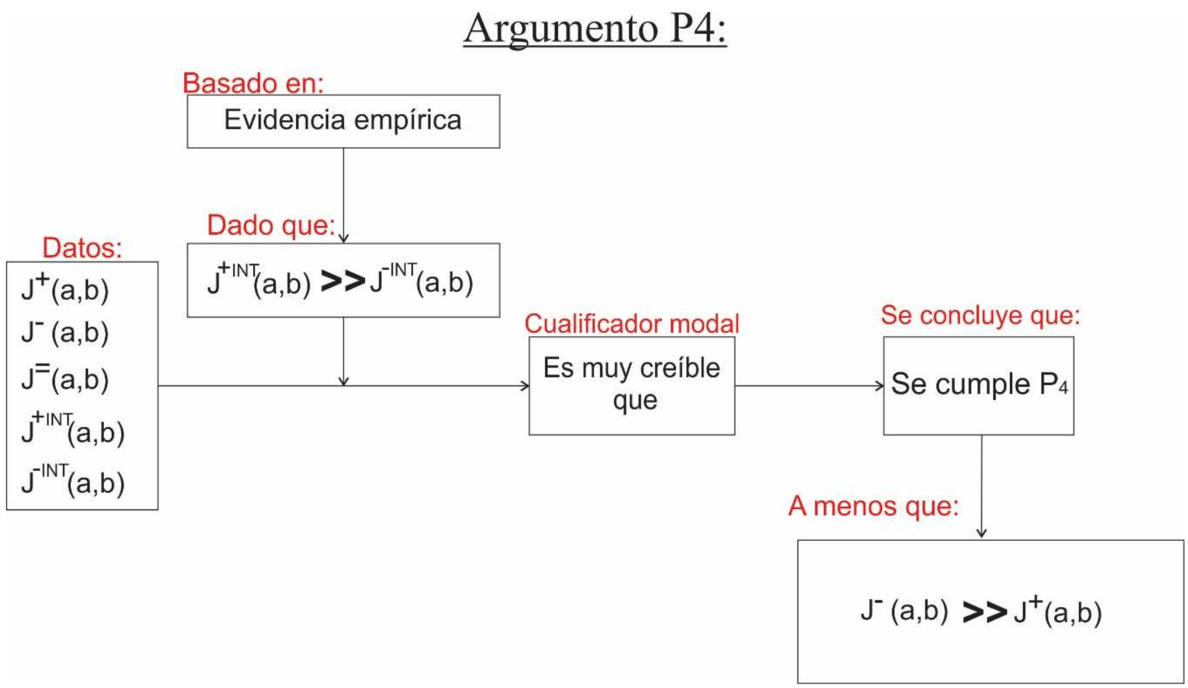


Fig. 3.5.- Argumento de preferencia 4 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

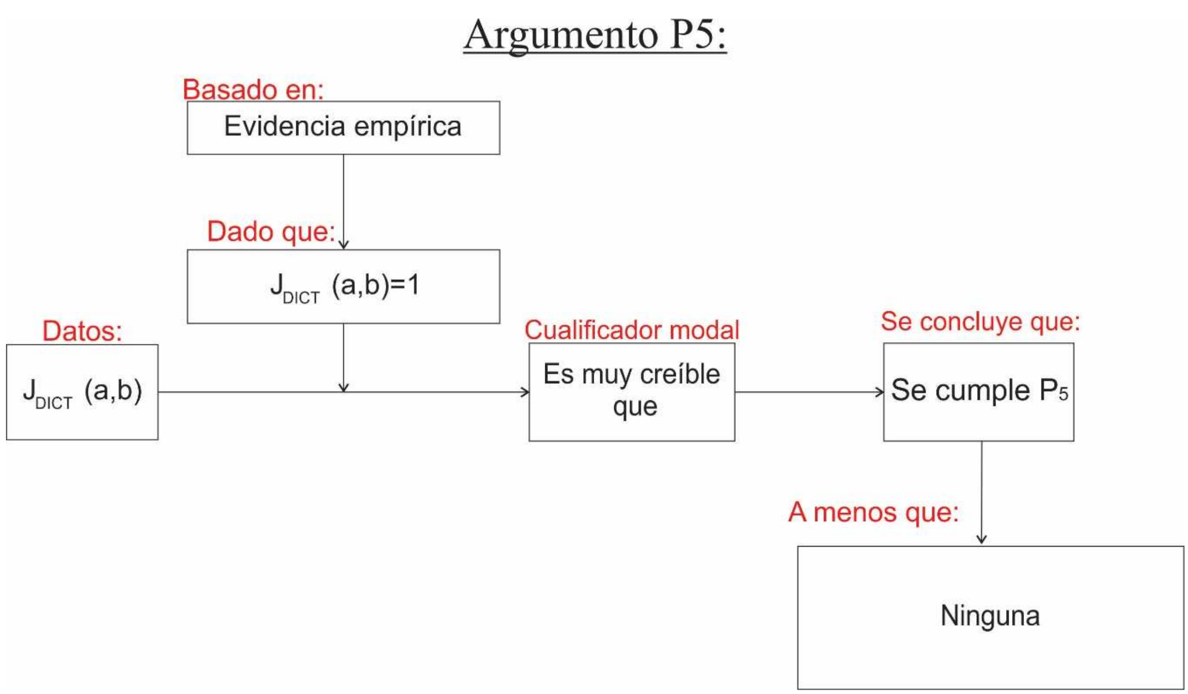


Fig. 3.6.- Argumento de preferencia 5 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

3.3.2 Esquemas de argumentación para la relación de indiferencia I

De acuerdo a la sección 3.2.1, si se cumple cualquiera de los argumentos de la tabla 3.2 y además la oposición de los criterios con capacidad de veto no rebasa cierto umbral, se concluye que existe una relación de indiferencia *aIb.*

En la figura 3.7 se muestra el esquema de argumentación de Toulmin que representa a relación de indiferencia I.

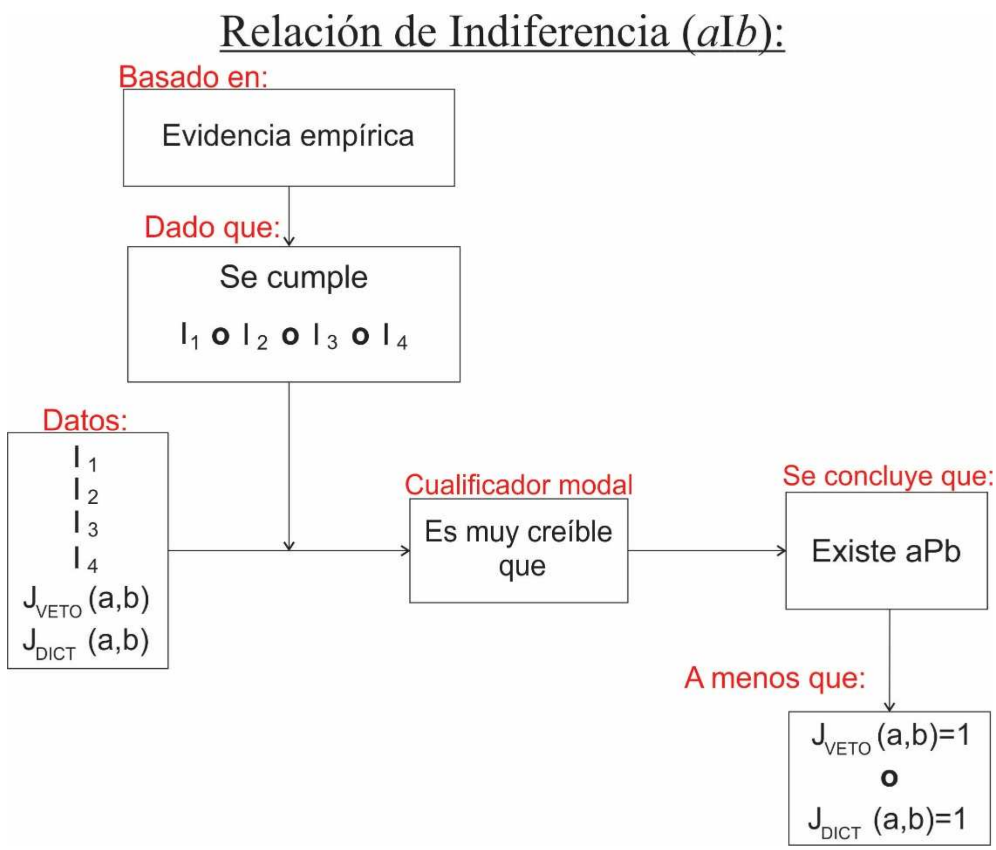


Fig. 3.7.- Argumento de relación de indiferencia bajo el esquema de argumentación de Toulmin

El esquema de la figura 3.7 se interpreta de la manera siguiente: Teniendo los índices de fuerza como datos y dado que se cumple cualquiera de los argumentos I1, I2, I3 o I4, respaldado por la opinión de expertos y en evidencia empírica, es muy creíble que se presente una relación de indiferencia I, siempre y cuando la oposición de los criterios con capacidad de veto no sea demasiado severa (este índice vale uno si cualquiera de los criterios con capacidad de veto ha rebasado cierto umbral).

De la misma manera, de las figuras 3.8 a 3.11 se muestran los esquemas de argumentación para los argumentos I1, I2, I3 e I4.

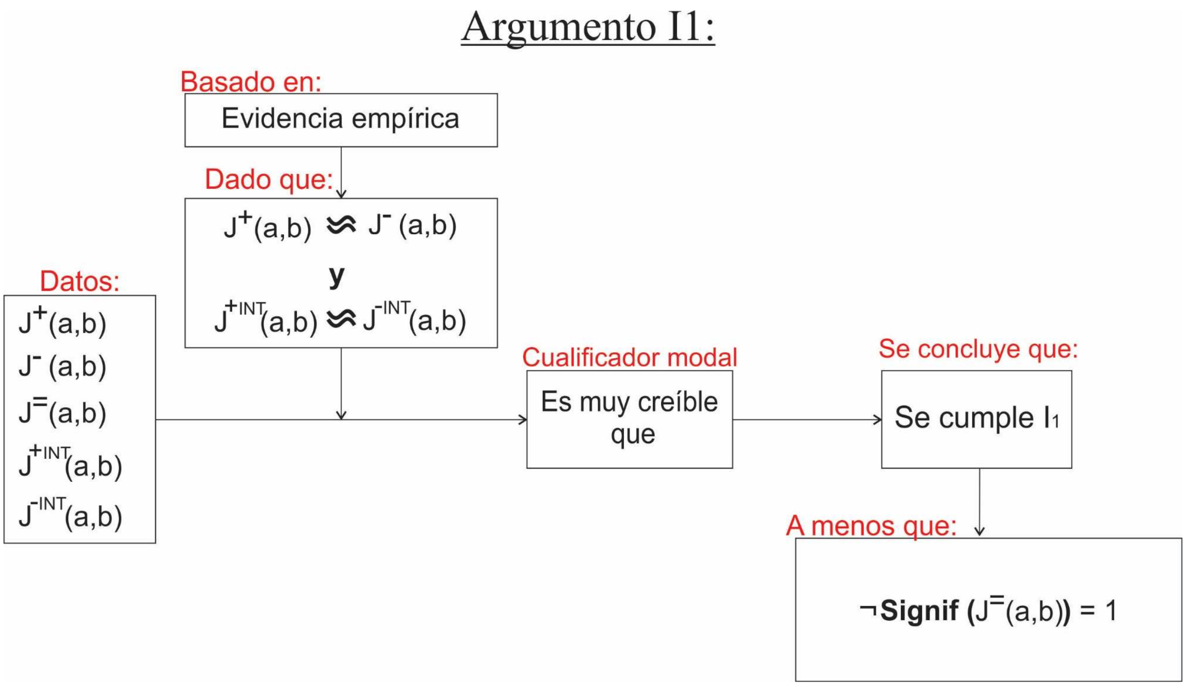


Fig. 3.8.- Argumento de indiferencia 1 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

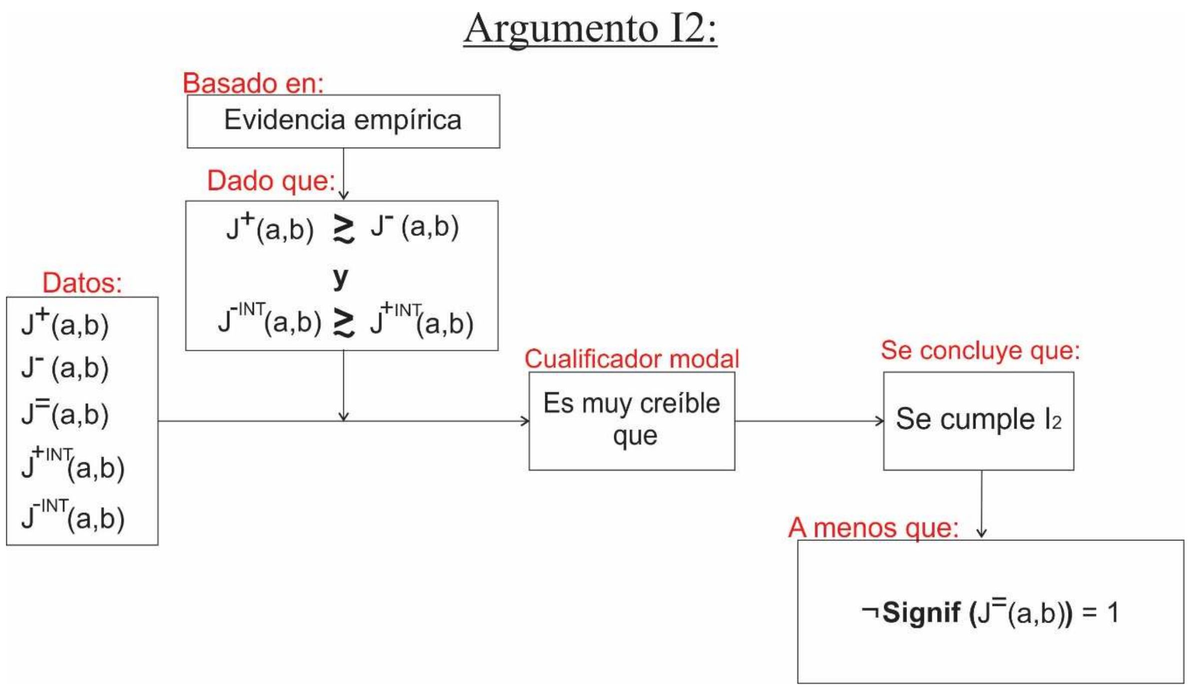


Fig. 3.9.- Argumento de indiferencia 2 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

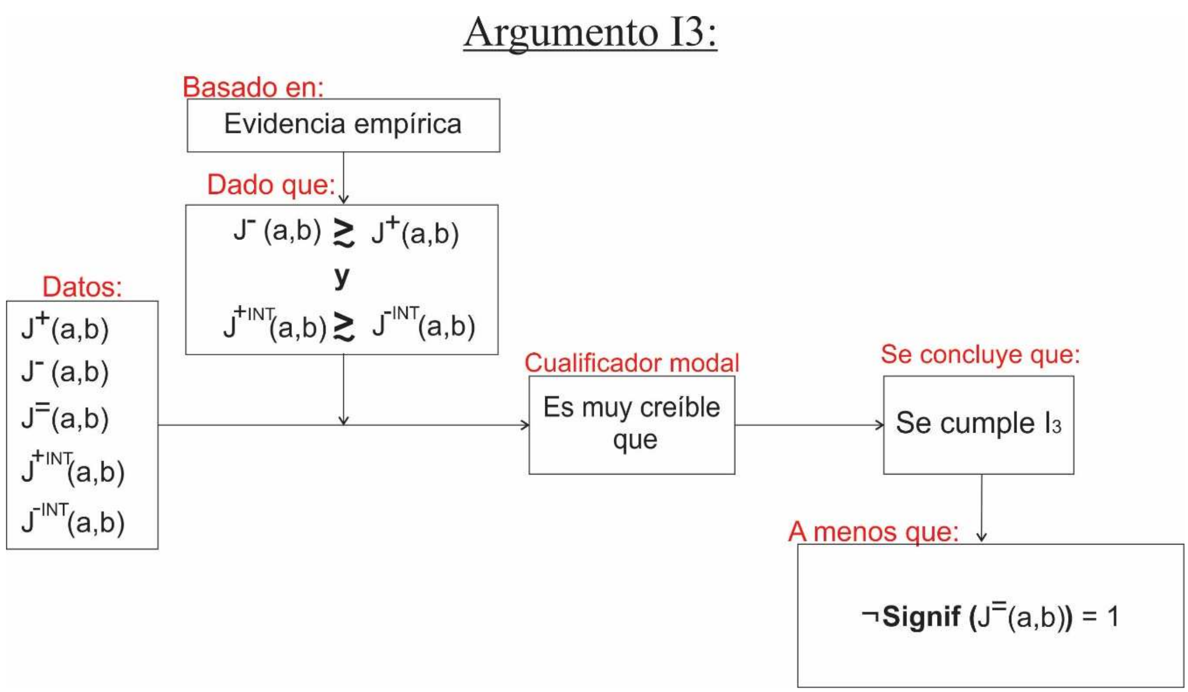


Fig. 3.10.- Argumento de indiferencia 3 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

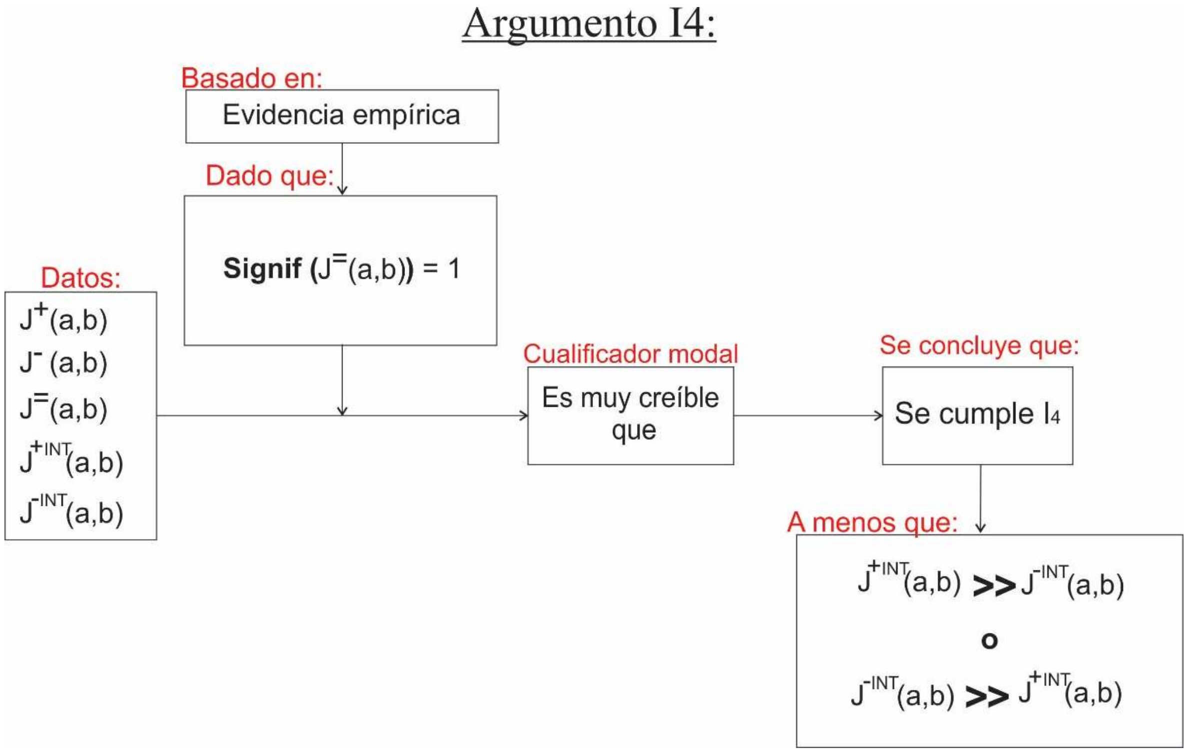


Fig. 3.11.- Argumento de indiferencia 4 bajo el esquema de argumentación de Toulmin

3.4 Validación empírica de los esquemas de argumentación

Una vez que se representaron los argumentos para considerar que se presentan relaciones de preferencia o indiferencia mediante el esquema de argumentación de Toulmin, ha de notarse que en las partes de respaldo (backup) y refutación (rebuttals) se menciona una evidencia empírica. Para completar la representación esquemática fue necesario diseñar un experimento que permita formar dicha evidencia. A continuación se presenta el diseño y explicación de este experimento.

3.4.1 Experimentos para formar la evidencia empírica

La idea principal consiste en diseñar un experimento de decisión en el que se presenten de manera evidente para el encuestado las premisas que se encuentran en las partes de garantía (warrant) y refutación (rebuttal). Si el encuestado percibe una situación de preferencia o indiferencia mostrándole los datos y cumpliéndose las premisas en la parte de garantías se valida de manera empírica la aceptación de la presunción (claim). Por otro lado, si al encuestado se le presentan los datos, se cumplen las premisas de la parte de garantía (warrant) y también sucede que se cumplen las premisas de la parte de refutación (rebuttal) y con todo esto percibe una disminución en la creencia de que se presenta una situación de preferencia o indiferencia según sea el caso, se forma la evidencia empírica que constata las premisas de la parte de refutación (rebuttal).

Los experimentos de esta sección son la versión final de una serie de experimentos prototipo. Se ideó el método basado en experiencias previas de aplicaciones de experimentos de las secciones anteriores. A continuación describen los detalles del mismo:

1.- Se acompaña en todo momento al encuestado cuando esté respondiendo a las preguntas. La función del aplicador del experimento es la de explicar detalladamente los datos y premisas que contenga cada pregunta para que entienda de manera precisa las presunciones y pueda contestar la pregunta de acuerdo al contexto que le estamos planteando.

2.- Cada pregunta representa las premisas propuestas en cada situación de preferencia o indiferencia. El objetivo de responder la pregunta es que el encuestado confirme como válidas esas premisas.

3.- La presentación de las preguntas lleva un orden lógico. Primero se le muestra una pregunta que contiene premisas de la parte de garantías (warrants) consideradas como válidas por el experto y se le pregunta que tan cierto considera la presunción (claim). La respuesta del encuestado nos hará saber si las premisas propuestas lo llevan a considerar como válida la presunción. La siguiente serie de preguntas contendrán las mismas premisas de la parte de garantías y además se incluirán ahora premisas de la parte de refutación (rebuttals). Se le preguntará de nuevo que tan válida considera la presunción. Lo que se busca en estas preguntas subsecuentes es la de constatar si el encuestado disminuye el grado de validez de la presunción cuando se presenten también las premisas de la parte de refutación.

Una vez explicado esto, a continuación se muestran los experimentos finales:

3.4.1.1 Experimento 1a: formar la evidencia empírica de los argumentos de preferencia estricta P

EXPERIMENTO 1

Detalles

Suponga que usted es el asesor del dueño de una empresa. Esta empresa necesita reclutar personal para diferentes áreas laborales.

A todos los aspirantes se les hace un mismo examen en el que se evalúan 10 habilidades diferentes.
El puntaje para cada habilidad se dará en una escala del 1 al 10, donde 1 es el mínimo y 10 es el máximo.

Dependiendo de la posición de trabajo requerido, es necesario que el aspirante tenga mejores puntajes en ciertas habilidades

A usted se le encomienda la tarea de comparar aspirantes que compiten por un mismo puesto, sólo que no se le especifican detalles sobre el mismo.

Es necesario que tome en cuenta lo siguiente:

1) Usted no sabe cuál es el puesto sobre el que los aspirantes están compitiendo, por lo tanto, no sabe cuáles son las habilidades más importantes que se deben considerar. Debido a esto, usted debe considerar cada una de las habilidades igualmente importantes.

2) El promediar los puntajes de las 10 evaluaciones no sirve como información para decidir entre un aspirante, ya que las habilidades a evaluar no tienen relación alguna unas con otras.

3) Si un aspirante le gana a otro por 1 o más puntos en una habilidad, se considera mejor en esa habilidad al aspirante.

Ejemplo:

Aspirante	H1
Juan	8.0
Pedro	7.0

Se considera que:
"Juan es mejor que Pedro en la habilidad 1"

4) Si la diferencia entre los puntajes de los aspirantes es menor o igual que 0.5, se debe considerar igual de buenos a los aspirantes en dicha habilidad.

Ejemplo:

Aspirante	H5
Juan	8.5
Pedro	8.0

Se considera que:
"Juan y Pedro son igual de buenos en la habilidad 5"

Fig. 3.12.- Detalles del experimento 1

SITUACIONES DE PREFERENCIA

P1 - Razón a favor: Se cumple que J+ > J-

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	7.0	7.0	7.0	7.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	8.5	8.5	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **6**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **4**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P1 - Razón en contra #1: Se cumple que J+ > J- pero también se cumple que J-int > J+int

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	10.0	7.0	6.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	8.5	10.0	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **6** ----> Con mucha ventaja: **1**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **3**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P1 - Razón en contra #2: Se cumple que J+ > J- pero también se cumple que J= es parte significativa del total

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	7.0	7.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.0	8.5	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **3**
Igual de buenos: **5**
A favor de Pedro: **2**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.13.- Preguntas del experimento 1a para validar las premisas del argumento P1

P2 - Razón a favor: Se cumple que J+ >> J-

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	7.0	7.0	7.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	8.5	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **7**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **3**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P2 - Razón en contra #1: Se cumple que J+ >> J- pero también se cumple que J-int >> J+int

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	6.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	10.0	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **7** ----> Con mucha ventaja: **0**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **3** ----> Con mucha ventaja: **3**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.14.- Preguntas del experimento 1a para validar las premisas del argumento P2

P3 - Razón a favor: Se cumple que J+int > J-int

	Habilidades									
Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
Juan	8.5	10.0	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	7.0	6.0	6.0	6.0	7.0	7.0	8.5	8.5	8.5	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **4** ----> Con mucha ventaja: **3**
Igual de buenos: **2**
A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P3 - Razón en contra #1: Se cumple que J+int > J-int pero también se cumple que J- > J+

	Habilidades									
Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
Juan	8.5	10.0	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	7.0	6.0	6.0	6.0	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **4** ----> Con mucha ventaja: **3**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **6** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P3 - Razón en contra #2: Se cumple que J+int > J-int pero también se cumple que J= es parte significativa del total

	Habilidades									
Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
Juan	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	6.0	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **2** ----> Con mucha ventaja: **2**
Igual de buenos: **6**
A favor de Pedro: **2** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.15.- Preguntas del experimento 1a para validar las premisas del argumento P3

P4 - Razón a favor: Se cumple que J+int >> J-int

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	10.0	10.0	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	6.0	6.0	6.0	6.0	7.0	7.0	8.5	8.5	8.5	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **4** ----> Con mucha ventaja: **4**

Igual de buenos: **2**

A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

P4 - Razón en contra #1: Se cumple que J+int >> J-int pero también se cumple que J- >> J+

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	10.0	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
Pedro	6.0	6.0	6.0	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **3** ----> Con mucha ventaja: **3**

Igual de buenos: **0**

A favor de Pedro: **7** ----> Con mucha ventaja: **0**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.16.- Preguntas del experimento 1a para validar las premisas del argumento P4

3.4.1.2 Experimento 1b: formar la evidencia empírica de los argumentos de indiferencia I

SITUACIONES DE INDIFERENCIA

I1 - Razón a favor: Se cumple que J+ es parecido a J- y J+int es parecido a J-int

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	7.0	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	10.0

Habilidades:
A favor de Juan: **2** ----> Con mucha ventaja: **1**
Igual de buenos: **6**
A favor de Pedro: **2** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

I1 - Razón en contra #1: Se cumple que J+ es parecido a J- y J+int es parecido a J-int pero también se cumple que J= no es parte significativa del total

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	8.5	8.5	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	10.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	10.0	7.0	7.0	8.5	8.5	8.5	6.0

Habilidades:
A favor de Juan: **4** ----> Con mucha ventaja: **1**
Igual de buenos: **2**
A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.17.- Preguntas del experimento 1b para validar las premisas del argumento I1

I2 - Razón a favor: Se cumple que J+ es algo mayor que J- y J-int es algo mayor que J+int

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	8.5	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **3** ----> Con mucha ventaja: **1**

Igual de buenos: **5**

A favor de Pedro: **2** ----> Con mucha ventaja: **2**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

I2 - Razón en contra #1: Se cumple que J+ es algo mayor que J- y J-int es algo mayor que J+int pero también se cumple que J= no es parte significativa del total

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	10.0	7.0	7.0	7.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	7.0	8.5	8.5	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **5** ----> Con mucha ventaja: **1**

Igual de buenos: **1**

A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **2**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.18.- Preguntas del experimento 1b para validar las premisas del argumento I2

I3 - Razón a favor: Se cumple que J- es algo mayor que J+ y J+int es algo mayor que J-int

	Habilidades									
Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
Juan	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	6.0	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	8.5	10.0

Habilidades:
A favor de Juan: **2** ----> Con mucha ventaja: **2**
Igual de buenos: **5**
A favor de Pedro: **3** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

I3 - Razón en contra #1: Se cumple que J- es algo mayor que J+ y J+int es algo mayor que J-int pero también se cumple que J= no es parte significativa del total

	Habilidades									
Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
Juan	8.5	8.5	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	6.0	6.0	7.0	8.5	8.5	8.5	8.5	10.0

Habilidades:
A favor de Juan: **4** ----> Con mucha ventaja: **2**
Igual de buenos: **1**
A favor de Pedro: **5** ----> Con mucha ventaja: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.19.- Preguntas del experimento 1b para validar las premisas del argumento I3

I4 - Razón a favor: Se cumple que J= es parte significativa del total

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **1**
Igual de buenos: **8**
A favor de Pedro: **1**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

I4 - Razón en contra #1: Se cumple que J= es parte significativa del total pero también se cumple que J+int >> J-

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	10.0	10.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0
Pedro	6.0	6.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	8.5	8.5

Habilidades:

A favor de Juan: **2** ----> Con mucha ventaja: **2**
Igual de buenos: **6**
A favor de Pedro: **2** ----> Con mucha ventaja: **0**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

I4 - Razón en contra #2: Se cumple que J= es parte significativa del total pero también se cumple que J-int >>

	Habilidades									
Aspirante	**H1**	**H2**	**H3**	**H4**	**H5**	**H6**	**H7**	**H8**	**H9**	**H10**
Juan	8.5	8.5	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **2** ----> Con mucha ventaja: **0**
Igual de buenos: **6**
A favor de Pedro: **2** ----> Con mucha ventaja: **2**

¿Qué tan cierto considera que Juan y Pedro son aproximadamente equivalentes?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig. 3.20.- Preguntas del experimento 1b para validar las premisas del argumento I4

3.4.1.3 Aplicación del experimento 1

El experimento se aplicó en el Instituto Tecnológico de Culiacán. Se hizo una selección de alumnos de las carreras de ingeniería electrónica, ingeniería eléctrica e ingeniería mecatrónica. A continuación se resume el método para la aplicación del mismo:

Total de alumnos a los que se le aplicó el experimento:	70
Aplicaciones descartadas por incoherencias:	11
Total de aplicaciones analizadas:	59
Tiempo de aplicación:	30 minutos en promedio por sesión.
Modo de aplicación:	Se aplicó a dos alumnos por sesión. El experimento se desarrolló en una hoja de cálculo de Microsoft Excel. A cada alumno se le dio una computadora. Se agendaron de 5 a 6 sesiones por día.
Dinámica de la aplicación:	Se les explicó a los estudiantes el contenido del experimento. Se aseguró que comprendieran las suposiciones que tenían que tomar en cuenta para poder responder las preguntas. El siguiente paso fue explicar la situación que se presentaba en cada pregunta y a continuación los alumnos la iban respondiendo.

3.4.2 Resultados del experimento 1

En las siguientes tablas se muestran los resultados del experimento:

Tabla 3.4.- Resultados que muestran el porcentaje de encuestados que validaron cada una de las premisas de preferencia (experimento 1a)

Argumento	**Premisas que se quieren validar:**	**Cantidad de personas que estuvieron de acuerdo con las premisas planteadas (Total de personas:59)**	**Porcentaje de personas que estuvieron de acuerdo con las premisas planteadas**
P1	Razón a favor del argumento P1	59	100%
	Razón en contra #1 del argumento P1	50	85%
	Razón en contra #2 del argumento P1	55	93%
P2	Razón a favor del argumento P2	59	100%
	Razón en contra #1 del argumento P2	53	90%
P3	Razón a favor del argumento P3	59	100%
	Razón en contra #1 del argumento P3	55	93%
	Razón en contra #2 del argumento P3	51	86%
P4	Razón a favor del argumento P4	59	100%
	Razón en contra #1 del argumento P4	59	100%

Tabla 3.5.- Resultados que muestran el porcentaje de encuestados que validaron cada una de las premisas de indiferencia (experimento 1b)

Argumento	**Premisas que se quieren validar:**	**Cantidad de personas que estuvieron de acuerdo con las premisas planteadas (Total de personas:59)**	**Porcentaje de personas que estuvieron de acuerdo con las premisas planteadas**
I1	Razón a favor del argumento I1	58	98%
	Razón en contra #1 del argumento I1	9	15%
I2	Razón a favor del argumento I2	58	98%
	Razón en contra #1 del argumento I2	24	41%
I3	Razón a favor del argumento I3	56	95%
	Razón en contra #1 del argumento I3	26	44%
I4	Razón a favor del argumento I4	59	100%
	Razón en contra #1 del argumento I4	59	100%
	Razón en contra #2 del argumento I4	59	100%

3.4.3 Conclusiones parciales del experimento 1

En la tabla 3.4 puede observarse que todas las premisas planteadas en la sección 3.2.1 como razones a favor y en contra para construir argumentos que establecen la relación de preferencia estricta fueron validadas por la gran mayoría de los encuestados. Esto significa que la gran mayoría de las personas encuestadas estuvieron de acuerdo en que, cuando se presenten las razones a favor planteadas inicialmente, se justifica que se presente una relación de preferencia estricta, y en caso de que se presenten razones en contra como las planteadas inicialmente, se disminuye la creencia de que se presente una relación de preferencia estricta.

En la tabla 3.5 se aprecia que todas las premisas planteadas en la sección 3.2.2 como razones a favor para construir argumentos que establecen la relación de preferencia estricta fueron validadas por la gran mayoría de los encuestados. Nótese que la premisa de refutación: “J= no es parte significativa del total”, propuesta inicialmente, no fue vista por la gran mayoría como una situación que provocara la disminución de la credibilidad de que existe una situación de indiferencia. Sin embargo, sí hubo personas que lo percibieron como condición atenuante. Debido a esto, se concluye que se deben tener dos opciones de argumentos que evalúen la existencia de relaciones de indiferencia: argumentos que incluyan a la premisa “J= no es parte significativa del total” como razones en contra y argumentos que no la incluyan. Dependiendo del criterio del decisor, se debe optar por una u otra opción.

4. Modelo para calcular el grado de verdad de la existencia de relaciones de preferencia básicas

En el capítulo 3 se representaron las razones claras y positivas que determinan la existencia de las relaciones de preferencia básicas como esquemas de argumentos. Estos esquemas nos permiten visualizar las razones a favor y en contra que determinan la validez de los argumentos propuestos. Como se mencionó en el capítulo 3, este grado de validez representa al mismo tiempo el grado de verdad de que existan las relaciones de preferencia básicas. El paso siguiente consiste en encontrar la manera de calcular este grado de validez. En el presente capítulo se describe un modelo apoyado en conceptos de lógica difusa (véase sección 2.2) que calcula este grado de verdad. En la sección 4.1 se definen los conceptos básicos que se mencionan en el modelo. En la sección 4.2 se definen formalmente las coaliciones de criterios sobre los cuales se basan los argumentos del capítulo 3. En la sección 4.3 se definen los índices que representan de manera numérica la fuerza de estos criterios. En la sección 4.4 se definen funciones para comparar estos índices de fuerza. En la sección 4.5 se describe como calcular los índices de credibilidad de las relaciones de preferencia básicas. En la sección 4.6 se describen los aspectos a considerar para la selección de las funciones de agregación que representen a los operadores lógicos difusos en el modelo propuesto. Por último, en la sección 4.7, se describe una de las aportaciones más relevantes de este trabajo, que es la obtención de valores numéricos para los parámetros de comparación así como la selección de operadores de agregación a partir de información empírica.

4.1 Definiciones y conceptos básicos

Con el fin de entender el modelo propuesto, es necesario especificar lo siguiente (Roy, 1990):

Alternativas: En un proceso de decisión multicriterio, las alternativas corresponden a las posibles acciones u opciones que se tienen en consideración. Se define de la siguiente manera:

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots.., a_m\}$ el conjunto finito de decisión con posibles acciones o alternativas, donde $|A|=m$, $m \in \mathbb{N}$.

Familia coherente de criterios: Los criterios de evaluación deben estar diseñados para capturar la naturaleza multidimensional del desempeño de las alternativas. Al elegir una familia de criterios para evaluar al conjunto de alternativas, ésta debe ser legible, exhaustiva y no redundante. Se define de la siguiente manera:

Sea $J = \{g_1, g_2, \ldots., g_n\}$ una familia coherente de criterios, donde $g_j(a)$ es la evaluación en el j-ésimo criterio de la alternativa a, dónde $a \in A$, $g_j(a) \in \Re^+$ y $|J|=n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pesos: Determinan la importancia relativa que tiene cada criterio de evaluación respecto al decisor. Se definen de la siguiente manera:

Sea $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ el conjunto de pesos, donde $w_j \in [0,1]$ denota la importancia del j-ésimo criterio g_j, donde $g_j \in J$ y $\sum_1^n w_j = 1$.

Es importante aclarar que esta información se asume como existente y servirá como información de entrada del nuevo modelo.

4.2 Coaliciones de criterios

Los argumentos propuestos en la sección 3.2 se basan en la fuerza representativa de ciertos grupos de criterios de interés. La definición de estos grupos, también llamados coaliciones, se basa en ciertos valores numéricos que denominamos umbrales. Para cada criterio es necesario definir un conjunto de umbrales. Estos umbrales representan la percepción personal del decisor al momento de comparar las evaluaciones de las alternativas en cada criterio. En la siguiente tabla se definen este conjunto de umbrales:

Tabla 4.1.- Umbrales de preferencia

Nombre del umbral	Símbolo j=1…n |J|=n	Descripción	Notas
Indiferencia	$q_j \in \Re^+$	Representa el valor máximo hasta donde el decisor permite que una alternativa *a* sea indiferente a una alternativa *b*	Se tiene que establecer para cada criterio j
Preferencia estricta	$p_j \in \Re^+$	Representa el valor mínimo a partir del cual el decisor está seguro que la alternativa *a* es preferida sobre la alternativa *b*	Se tiene que establecer para cada criterio j $q_j < p_j$
Preferencia pre-intensa	$s_j \in \Re^+$	Representa el valor mínimo a partir del cual el decisor comienza a percibir que la alternativa *a* tiene una preferencia considerable sobre la alternativa *b*	Se tiene que establecer para cada criterio j $p_j < s_j$
Preferencia intensa	$r_j \in \Re^+$	Representa el valor mínimo a partir del cual el decisor está seguro que la alternativa *a* tiene una preferencia considerable sobre la alternativa *b*	Se tiene que establecer para cada criterio j $s_j < r_j$
Veto	$v_j \in \Re^+$	Representa el valor mínimo a partir del cual el decisor está seguro que la alternativa *a* no puede ser indiferente o preferida sobre la alternativa *b*, no importando ya las evaluaciones que tenga la alternativa *a* en los demás criterios	Solo se establece en criterios donde el decisor lo considere necesario En caso de existir: $r_j < v_j$
Dictadura	$d_j \in \Re^+$	Representa el valor mínimo a partir del cual el decisor está seguro que la alternativa *a* es preferida sobre la alternativa *b*, no importando ya las evaluaciones que tenga la alternativa *b* en los demás criterios	Solo se establece en criterios donde el decisor lo considere necesario En caso de existir: $r_j < d_j$

De acuerdo a la tabla 4.1, los grupos de criterios descritos en la sección 3.2 se definen formalmente de la manera siguiente:

- **Coalición de criterios a favor *C_{FAVOR}(a,b)*:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

  $$g_j(a)-g_j(b) \geq p_j$$

  Dónde: $p_j \in \Re^+$ es el umbral de preferencia estricta del criterio j.

- **Coalición de criterios indiferentes *C_{INDIF}(a,b)*:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

  $$|g_j(a)-g_j(b)| \leq q_j$$

  Dónde: $q_j \in \Re^+$ es el umbral de indiferencia del criterio j.

- **Coalición de criterios en contra *C_{CONTRA}(a,b)*:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

  $$g_j(a)-g_j(b) \leq -p_j$$

  Dónde: $p_j \in \Re^+$ es el umbral de preferencia estricta del criterio j.

- **Coalición de criterios intensamente a favor *C_{FAVOR_INT}(a,b)*:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

  $$g_j(a)-g_j(b) \geq r_j$$

  Donde: $r_j \in \Re^+$ es el umbral de preferencia intensa del criterio j y además se cumple que $C_{FAVOR\_INT}(a,b) \subseteq C_{FAVOR}(a,b)$.

- **Coalición de criterios intensamente en contra *C_{CONTRA_INT}(a,b):*** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

  $$g_j(a)-g_j(b) \leq -r_j,$$

  Donde: $r_j \in \Re^+$ es el umbral de preferencia intensa del criterio j y además se cumple que $C_{CONTRA\_INT}(a,b) \subseteq C_{CONTRA}(a,b)$.

- **Coalición de criterios con capacidad de veto $C_{VETO}(a,b)$:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

$$g_j(a)-g_j(b) \leq -v_j$$

Dónde: $v_j \in \Re^+$ es el umbral de veto del criterio j.

- **Coalición de criterios con capacidad de dictadura $C_{DICT}(a,b)$:** En esta coalición se encuentran los criterios sobre los cuáles se cumple que

$$g_j(a)-g_j(b) \geq d_j$$

Donde: $d_j \in \Re^+$ es el umbral de dictadura del criterio j y además se cumple que $C_{DICT}(a,b) \subseteq C_{FAVOR}(a,b)$.

4.2.1 Pertenencia de criterios a las coaliciones

Para modelar la pertenencia de los criterios a las coaliciones definidas en la sección 4.2, basado en la sección 2.2.2, se tiene que para *cada par* de acciones $a \in A$ y $b \in A$ se definen conjuntos difusos con las siguientes funciones de membresía trapezoidales:

a) **Conjunto difuso de C_{FAVOR} (a,b)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR}(a,b))$: $\Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

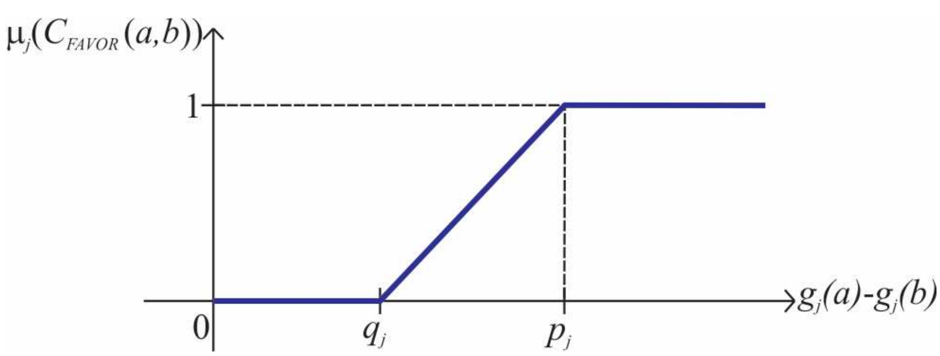


Figura 4.1.- Función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR}(a,b))$

Dónde:

$$\mu_j(C_{FAVOR}(a,b)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_j(a)\text{-}g_j(b) < q_j \\ \dfrac{g_j(a)-g_j(b)-q_j}{p_j-q_j} & \text{si} \quad q_j \leq g_j(a)\text{-}g_j(b) < p_j \\ 1 & \text{si} \quad g_j(a)\text{-}g_j(b) \geq p_j \end{cases} \tag{4.1}$$

b) **Conjunto difuso de C_{INDIF} (a,b)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{INDIF}\ (a,b))$: $\Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

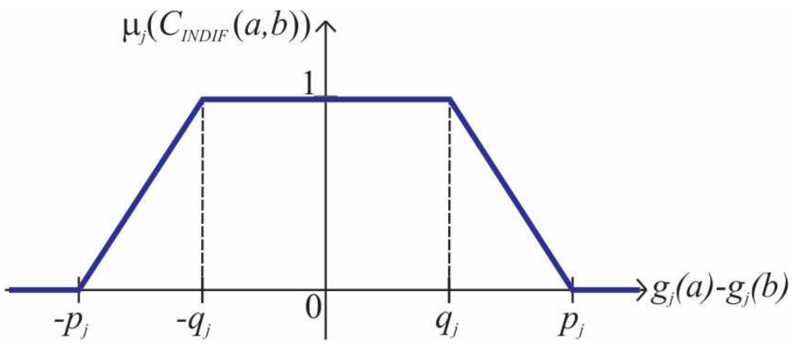


Figura 4.2.- Función de membresía $\mu_j(C_{INDIF}\ (a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{INDIF}(a,b)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |g_j(a)\text{-}g_j(b)| \geq p_j \\ \dfrac{|g_j(a)-g_j(b)|-p_j}{q_j-p_j} & \text{si} \quad q_j \leq |\ g_j(a)\text{-}g_j(b)| < p_j \\ 1 & \text{si} \quad |\ g_j(a)\text{-}g_j(b)| \leq q_j \end{cases} \tag{4.2}$$

c) **Conjunto difuso de C_{CONTRA} (a,b)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA}\,(a,b))$: $\Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

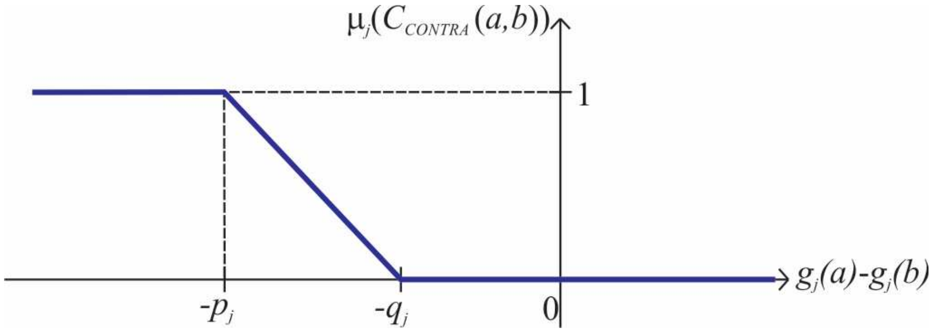


Figura 4.3.- Función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA}\,(a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{CONTRA}\,(a,b)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \leq -p_j \\ \dfrac{-[g_j(a)-g_j(b)]-q_j}{p_j-q_j} & \text{si} \quad -p_j < g_j(a)-g_j(b) < -q_j \\ 0 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \geq -q_j \end{cases} \qquad (4.3)$$

d) **Conjunto difuso de C_{FAVOR_INT} (a,b)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR\_INT}\,(a,b))$: $\Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

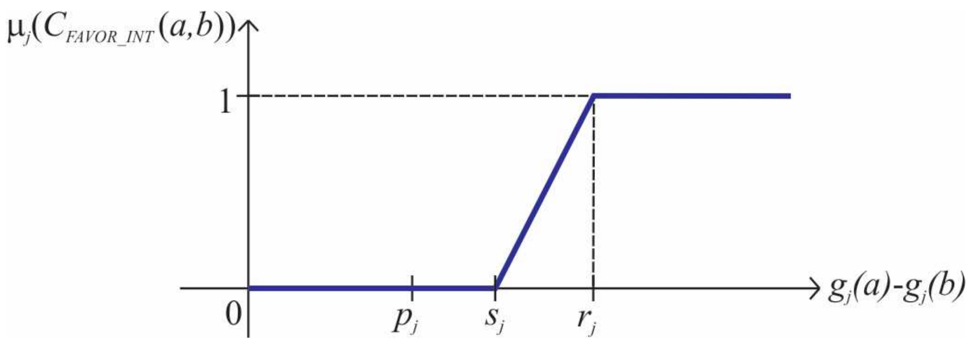


Figura 4.4.- Función de membresía $\mu_j(C_{FAVOR\_INT}\,(a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{FAVOR\_INT}\,(a,b)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \leq s_j \\ \dfrac{g_j(a)-g_j(b)-s_j}{r_j-s_j} & \text{si} \quad s_j < g_j(a)-g_j(b) < r_j \\ 1 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \geq r_j \end{cases} \qquad (4.4)$$

e) **Conjunto difuso de C_{CONTRA_INT} (*a*,*b*)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA\_INT}(a,b)) : \Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

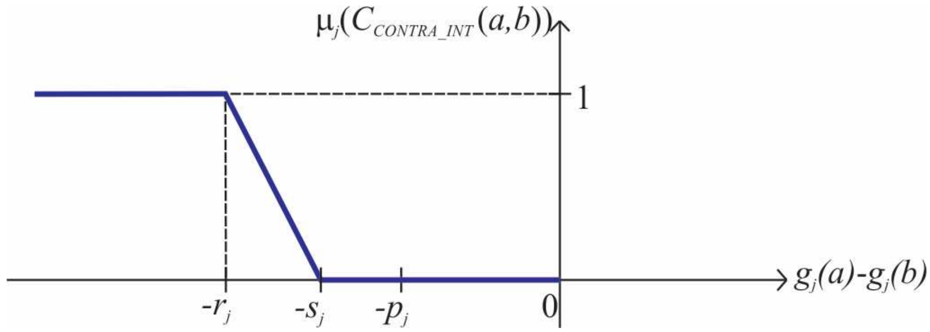


Figura 4.5.- Función de membresía $\mu_j(C_{CONTRA\_INT}(a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{CONTRA\_INT}(a,b)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \leq -r_j \\ \frac{-[g_j(a)-g_j(b)]-s_j}{r_j-s_j} & \text{si} \quad -r_j < g_j(a)-g_j(b) < -s_j \\ 0 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \geq -s_j \end{cases} \qquad (4.5)$$

f) **Conjunto difuso de C_{VETO}(*a*,*b*)**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{VETO}(a,b)) : \Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

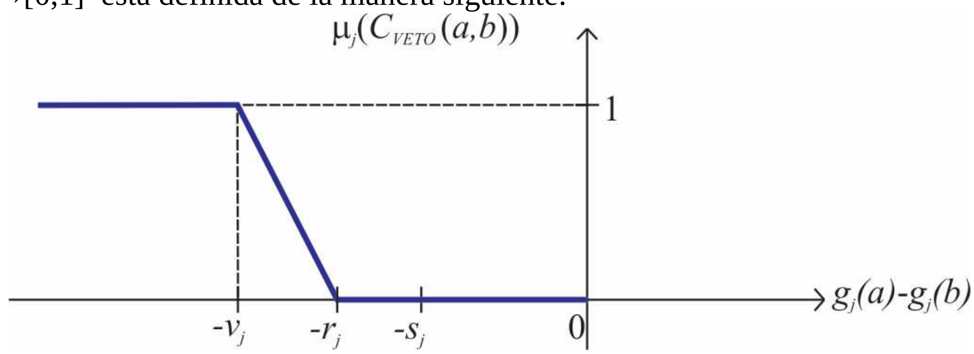


Figura 4.6.- Función de membresía $\mu_j(C_{VETO}(a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{VETO}(a,b)) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \leq -v_j \\ \frac{-[g_j(a)-g_j(b)]-r_j}{v_j-r_j} & \text{si} \quad -v_j < g_j(a)-g_j(b) < -r_j \\ 0 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \geq -r_j \end{cases} \qquad (4.6)$$

g) **Conjunto difuso de $C_{DICT}(a,b)$**, donde la función de membresía $\mu_j(C_{DICT}(a,b))$: $\Re \rightarrow [0,1]$ está definida de la manera siguiente:

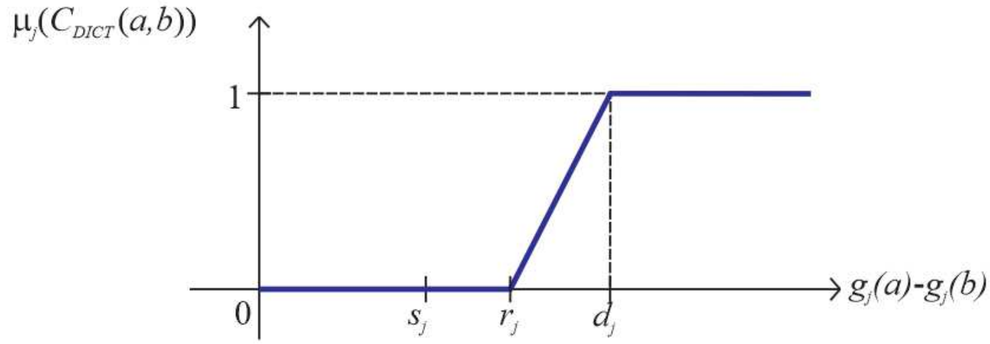


Figura 4.7.- Función de membresía $\mu_j(C_{DICT}(a,b)$

Dónde:

$$\mu_j(C_{DICT}(a,b)) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \leq r_j \\ \frac{g_j(a)-g_j(b)-r_j}{d_j-r_j} & \text{si} \quad r_j < g_j(a)-g_j(b) < d_j \\ 1 & \text{si} \quad g_j(a)-g_j(b) \geq d_j \end{cases} \tag{4.7}$$

En la figura 4.8 se muestran las funciones de membresía de todos los conjuntos difusos definidos anteriormente:

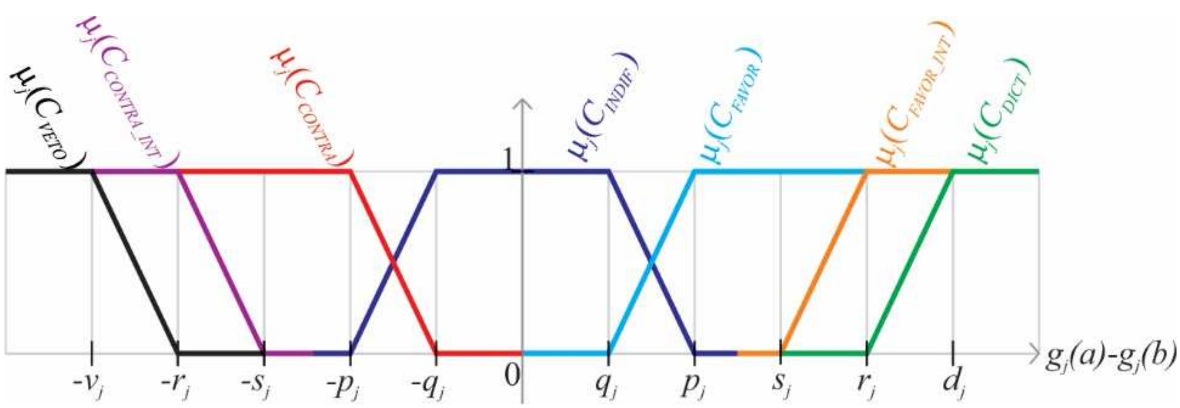


Figura 4.8.- Funciones de membresía de los conjuntos difusos definidos sobre $C_{VETO}(a,b)$, $C_{CONTRA\_INT}(a,b)$, $C_{CONTRA}(a,b)$, $C_{INDIF}(a,b)$, $C_{FAVOR}(a,b)$ y $C_{FAVOR\_INT}(a,b)$

4.3 Índices de fuerza de las coaliciones

El objetivo de estos índices es el de representar la fuerza de cada una de las coaliciones definidas en la sección 4.2. Esta fuerza representa la cantidad de criterios que pertenecen a cada coalición y está ligada directamente con los pesos definidos en la sección 4.1. Así, el determinar si existe alguna relación de preferencia o indiferencia entre las alternativas dependerá de los valores de estos índices así como del resultado de compararlos de una manera lógica similar a la que un DM real lo haría. De acuerdo a esto, e inspirado en los conceptos manejados por Ostanello (1983), se tiene lo siguiente:

a) **Índice de preferencia a favor *$J^{+}(a,b)$*:**

$$J^{+}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{FAVOR}(a,b)\right).w_j \tag{4.8}$$

b) **Índice de indiferencia *$J^{=}(a,b)$*:**

$$J^{=}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{INDIF}(a,b)\right).w_j \tag{4.9}$$

c) **Índice de preferencia en contra *$J^{-}(a,b)$*:**

$$J^{-}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{CONTRA}(a,b)\right).w_j \tag{4.10}$$

d) **Índice de preferencia intensa a favor *$J^{+}_{INT}(a,b)$*:**

$$J^{+}_{INT}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{FAVOR\_INT}(a,b)\right).w_j \tag{4.11}$$

e) Índice de preferencia intensa en contra $J^{-}_{INT}(a,b)$:

$$J^{-}_{INT}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{CONTRA\_INT}(a,b)\right).w_j \qquad (4.12)$$

f) Índice de veto $I_{VETO}(a,b)$:

$$I_{VETO}(a,b) = \mu_1\left(C_{VETO}(a,b)\right) \vee \mu_2\left(C_{VETO}(a,b)\right) \vee \ldots \vee \mu_n\left(C_{VETO}(a,b)\right) \qquad (4.13)$$

g) Índice de dictadura $I_{DICT}(a,b)$:

$$I_{DICT}(a,b) = \mu_1\left(C_{DICT}(a,b)\right) \vee \mu_2\left(C_{DICT}(a,b)\right) \vee \ldots \vee \mu_n\left(C_{DICT}(a,b)\right) \qquad (4.14)$$

4.4 Modelado de las comparaciones entre índices de fuerza

En la sección 3.2 se observa que se utilizan predicados que están compuestos de diversas comparaciones entre los índices definidos en la sección 4.3. Entre estas comparaciones tenemos:

- x es claramente menor que y.
- x es menor que y.
- x es parecido a y.
- x es algo mayor que y.
- x es mayor que y.
- x es claramente mayor que y.
- x es parte significativa de la unidad.

Donde x, $y \in [0,1]$ representan a los índices de fuerza de las coaliciones.

Para modelar estas comparaciones se definen los siguientes parámetros:

- α: umbral que determina que x, y son parecidos, donde $0< \alpha \leq 1$.
- β: umbral que determina cuando x es mayor que y, donde $\alpha< \beta \leq 1$.
- γ: umbral que determina cuando x empieza a ser claramente mayor que y, donde $\beta< \gamma \leq 1$.

- δ: umbral que determina cuando *x* es claramente mayor que *y*, donde $\gamma < \delta \leq 1$.
- ε: umbral que determina cuando *x* empieza a ser parte significativa del total, donde $0 < \varepsilon \leq 1$.
- ζ: umbral que determina cuando *x* es parte significativa del total, donde $\varepsilon < \zeta \leq 1$.

A continuación se proponen una serie de funciones que caracterizan a estas comparaciones. En un inicio, estas funciones se modelaron con funciones trapezoidales $f_{trap}(x)$ (ver sección 2.2.2), por su sencillez de aplicación. Sin embargo, al aplicarlas en el modelo matemático para calcular los índices de credibilidad que se describe en la sección 4.5, los valores finales de estos índices sufrían de cambios abruptos considerables ante pequeñas variaciones de los valores de *x* en $f_{trap}(x)$. Se optó por utilizar las funciones sigmoidales, ya que ofrecen la ventaja de tener un punto de inflexión variable *m* (ver sección 2.2.2) cuyo valor permite darle la forma "s" deseada a la curva. Además, es fácil ver que el crecimiento de esta función es más lento cuando $f_{sigm}(x)$ se va alejando de cero y también cuando $f_{sigm}(x)$ se va acercando a uno. Ésta última característica fue la que sirvió para evitar los cambios abruptos de los valores de los índices de credibilidad ante pequeños cambios en los valores de x en $f_{sigm}(x)$. Explicado esto, a partir de los parámetros propuestos anteriormente se definen las comparaciones entre en los índices de fuerza con las funciones sigmoidales siguientes:

a) $\mu_{<<}(x, y; \gamma, \delta)$**:** $[-1,1] \rightarrow [0,1]$, *x* es claramente menor que *y*.

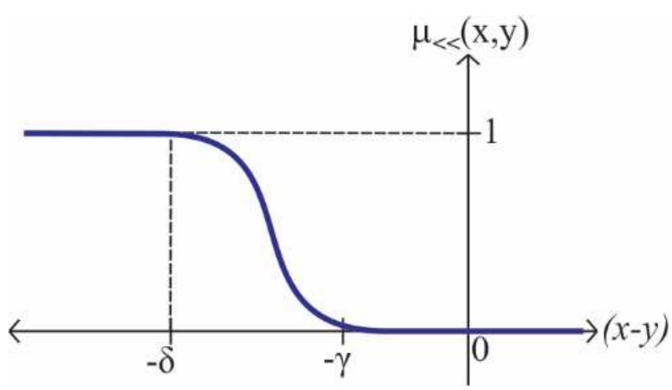


Fig. 4.9: Función $\mu_{<<}(x,y;\ \gamma,\ \delta)$

Donde:

$$\mu_{<<}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x\text{-}y) \geq -\gamma \\ 2\left[\dfrac{(x-y)+\gamma}{\gamma-\delta}\right]^2 & \text{si } -\gamma > (x\text{-}y) \geq -m \\ 1-2\left[\dfrac{(x-y)+\delta}{\gamma-\delta}\right]^2 & \text{si } -m > (x\text{-}y) > -\delta \\ 1 & \text{si } (x\text{-}y) \leq -\delta \end{cases} \qquad (4.15)$$

siendo $m = \frac{\gamma+\delta}{2}$

b) $\mu_<(x, y; \alpha, \beta)$: $[-1,1] \rightarrow [0,1]$, *x* es menor que *y*.

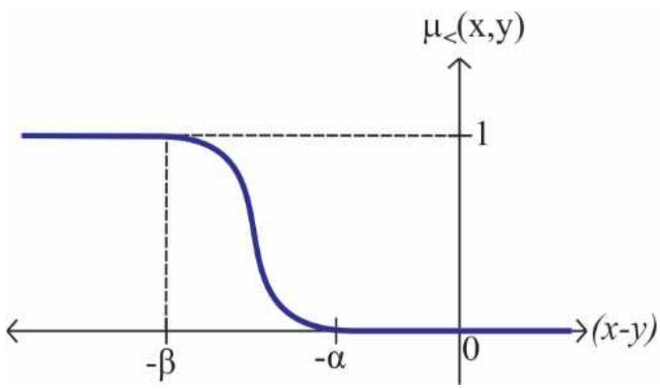


Fig. 4.10: Función $\mu_<(x,y;\ \alpha,\ \beta)$

Donde:

$$\mu_{<}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x\text{-}y) \geq -\alpha \\ 2\left[\dfrac{(x-y)+\alpha}{\alpha-\beta}\right]^2 & \text{si } -\alpha > (x\text{-}y) \geq -m \\ 1-2\left[\dfrac{(x-y)+\beta}{\alpha-\beta}\right]^2 & \text{si } -m > (x\text{-}y) > -\beta \\ 1 & \text{si } (x\text{-}y) \leq -\beta \end{cases} \qquad (4.16)$$

siendo $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$

c) μ~(*x, y;* α, β): [-1,1]→ [0,1], *x* es parecido a *y*.

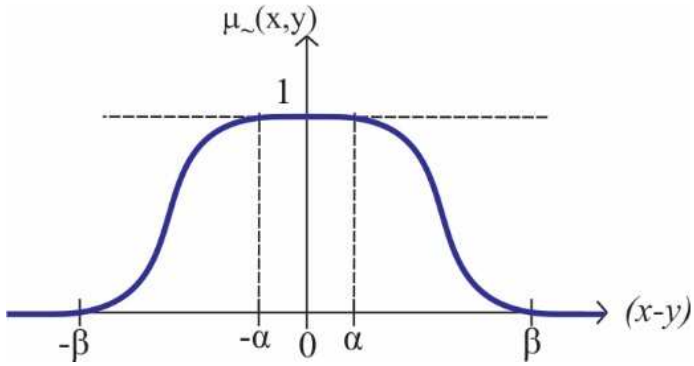


Fig. 4.11: Función $\mu_{\sim}(x,y;\ \alpha,\ \beta)$

Donde:

$$\mu\sim(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x\text{-}y| \leq \alpha \\ 1 - 2\left[\dfrac{|x-y|-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^2 & \text{si } \alpha < |x\text{-}y| \leq m \\ 2\left[\dfrac{|x-y|-\beta}{\beta-\alpha}\right]^2 & \text{si } m < |x\text{-}y| < \beta \\ 0 & \text{si } |x\text{-}y| \geq \beta \end{cases} \qquad (4.17)$$

siendo $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$

d) μ>~(*x, y;* α, β): [-1,1]→ [0,1], *x* es algo mayor que *y*.

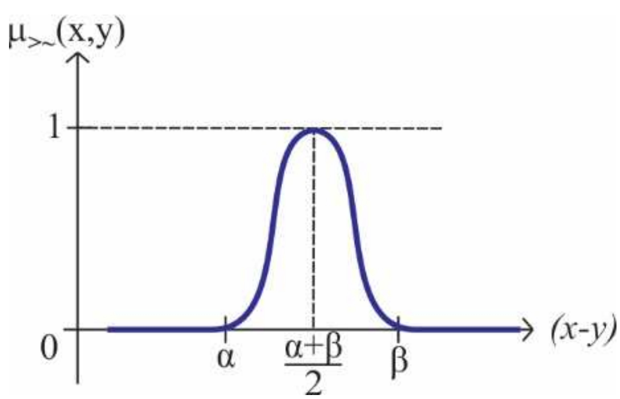


Fig. 4.12: Función $\mu_{>\sim}(x,y;\ \alpha,\ \beta)$

Donde:

$$\mu_{>\sim}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } z = 0 \\ 1-2\left[\frac{|z|}{h}\right]^2 & \text{si } 0 < |z| \leq m \\ 2\left[\frac{|z|-h}{h}\right]^2 & \text{si } m < |z| \leq h \\ 0 & \text{si } |z| > h \end{cases} \tag{4.18}$$

siendo $z = (x-y) - \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$, $\quad h = \frac{\beta-\alpha}{2}$, $\quad m = \frac{h}{2}$

e) $\mu_>(x, y; \alpha, \beta)$: [-1,1]→ [0,1], *x* es mayor que *y*.

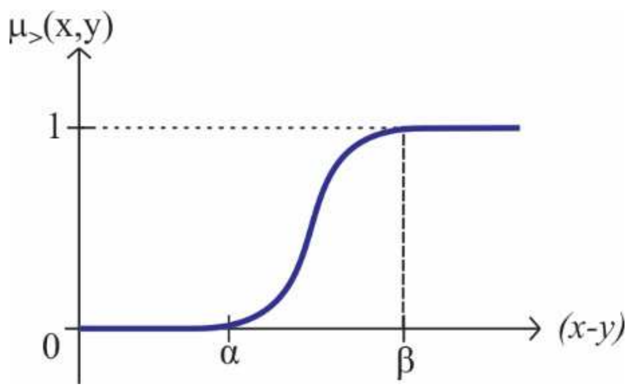


Fig. 4.13: Función $\mu_>(x,y;\ \alpha, \beta)$

Donde:

$$\mu_>(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x\text{-}y) \leq \alpha \\ 2\left[\frac{(x-y)-\alpha}{\beta-\alpha}\right]^2 & \text{si } \alpha < (x\text{-}y) \leq m \\ 1-2\left[\frac{(x-y)-\beta}{\beta-\alpha}\right]^2 & \text{si } m < (x\text{-}y) < \beta \\ 1 & \text{si } (x\text{-}y) \geq \beta \end{cases} \tag{4.19}$$

siendo $m = \frac{\alpha+\beta}{2}$

f) **$\mu_{>>}(x, y; \gamma, \delta)$:** [-1,1]→ [0,1], *x* es claramente mayor que *y*.

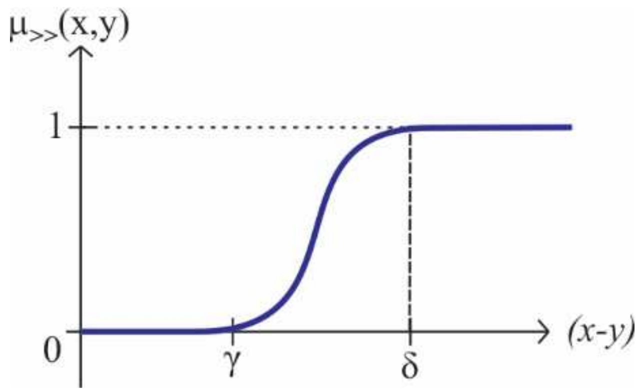


Fig. 4.14: Función $\mu_{>>}(x,y;\ \gamma, \delta)$

Donde:

$$\mu_{\gg}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x\text{-}y) \le \gamma \\ 2\left[\dfrac{(x-y)-\gamma}{\delta-\gamma}\right]^2 & \text{si } \gamma < (x\text{-}y) \le m \\ 1-2\left[\dfrac{(x-y)-\delta}{\delta-\gamma}\right]^2 & \text{si } m < (x\text{-}y) < \delta \\ 1 & \text{si } (x\text{-}y) \ge \delta \end{cases} \qquad (4.20)$$

siendo $m = \frac{\gamma+\delta}{2}$

g) **$\mu_{SIGNIF}(x; \varepsilon, \zeta)$:** [0,1]→ [0,1], *x* es parte significativa de la unidad.

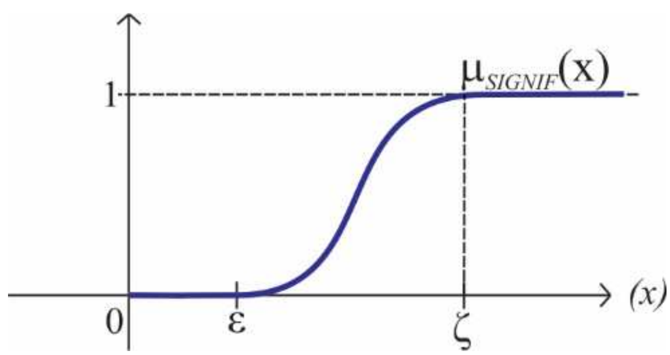


Fig. 4.15: Función $\mu_{SIGNIF}(x;\ \varepsilon, \zeta)$

Donde:

$$\mu_{\mathbf{SIGNIF}}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq \varepsilon \\ 2\left[\dfrac{x-\varepsilon}{\zeta-\varepsilon}\right]^2 & \text{si } \varepsilon < x \leq m \\ 1-2\left[\dfrac{x-b}{\zeta-\varepsilon}\right]^2 & \text{si } m < x < \zeta \\ 1 & \text{si } x \geq \zeta \end{cases} \quad (4.21)$$

siendo $m = \frac{\varepsilon+\zeta}{2}$

En la figura 4.16 se resumen las funciones de comparación anteriormente descritas.

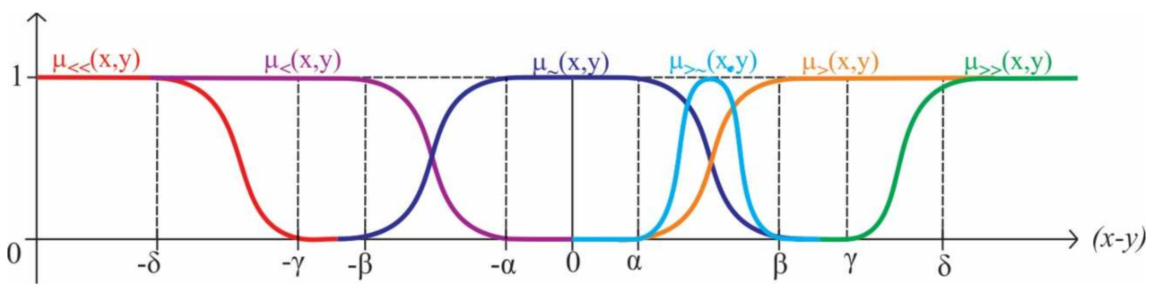


Fig. 4.16: Funciones de membresía $\mu_{<<}(x,y)$, $\mu_{<}(x,y)$, $\mu_{\sim}(x,y)$, $\mu_{>\sim}(x,y)$, $\mu_{>}(x,y)$ y $\mu_{>>}(x,y)$

4.5 Cálculo de índices de credibilidad

Hasta este punto se tienen definidos los siguientes aspectos:

a) Coaliciones de criterios así como su función de pertenencia
b) Índices de fuerza de las coaliciones
c) Funciones de comparación entre índices de fuerza

El paso siguiente consiste en determinar el índice de credibilidad de cada una de las relaciones de preferencia básicas en términos de los aspectos mencionados anteriormente. Llamaremos **índice de credibilidad** a la función cuyo resultado expresa el grado de verdad de que se presente una relación de preferencia básica determinada entre dos alternativas.

Basado en la sección 3.3 y lo mencionado anteriormente, a continuación se determina el índice de credibilidad de cada una de las relaciones de preferencia básicas definidas en la sección 2.6.

4.5.1 Cálculo del índice de credibilidad de la relación de preferencia estricta P

De acuerdo a la figura 3.1 se tiene que el índice de credibilidad de la relación de preferencia estricta P se calcula por la expresión:

$$\sigma(a\mathrm{P}b) = [\mu_{\mathrm{P1}}(a,b) \vee \mu_{\mathrm{P2}}(a,b) \vee \mu_{\mathrm{P3}}(a,b) \vee \mu_{\mathrm{P4}}(a,b) \vee \mu_{\mathrm{P5}}(a,b)] \wedge \neg\, \mathrm{I}_{\mathrm{VETO}}(a,b) \qquad (4.22)$$

Donde $\mu_{\mathrm{Px}}(a,b)$ expresa el grado de validez del argumento P_x, e $\mathrm{I}_{\mathrm{VETO}}(a,b)$ representa el índice de veto definido en la sección 4.3.

Atendiendo a los índices de fuerza definidos en la sección 4.3, a los argumentos definidos en la sección 3.3 y a las funciones de comparación definidas en la sección 4.4 se tiene que:

$$\mu_{\mathrm{P1}}(a,b) = \mu_{>}(\mathrm{J}^{+}, \mathrm{J}^{-}) \;\wedge\; \neg\, [\mu_{>}(\mathrm{J}^{-}_{\mathrm{INT}}, \mathrm{J}^{+}_{\mathrm{INT}}) \vee \mu_{\mathrm{SIGNIF}}(\mathrm{J}^{=})] \qquad (4.23)$$

$$\mu_{\mathrm{P2}}(a,b) = \mu_{>>}(\mathrm{J}^{+}, \mathrm{J}^{-}) \;\wedge\; \neg\, \mu_{>>}(\mathrm{J}^{-}_{\mathrm{INT}}, \mathrm{J}^{+}_{\mathrm{INT}}) \qquad (4.24)$$

$$\mu_{P3}(a,b) = \mu_{>}(J^{+}_{INT}, J^{-}_{INT}) \;\wedge\; \neg\, [\mu_{>}(J^{-}, J^{+}) \vee \mu_{SIGNIF}(J^{=})] \qquad (4.25)$$

$$\mu_{P4}(a,b) = \mu_{>>}(J^{+}_{INT}, J^{-}_{INT}) \;\wedge\; \neg\, \mu_{>>}(J^{-}, J^{+}) \qquad (4.26)$$

$$\mu_{P5}(a,b) = J_{DICT} \qquad (4.27)$$

4.5.2 Cálculo del índice de credibilidad de la relación de indiferencia I

De acuerdo a la figura 3.7 se tiene que el índice de credibilidad de la relación de indiferencia I se calcula por la expresión:

$$\sigma(a\mathrm{I}b) = [\mu_{I1}(a,b) \vee \mu_{I2}(a,b) \vee \mu_{I3}(a,b) \vee \mu_{I4}(a,b)\,] \wedge \neg\, [I_{VETO}(a,b) \vee I_{DICT}(a,b)] \qquad (4.28)$$

Donde $\mu_{Ix}(a,b)$ expresa el grado de validez del argumento I_x, $I_{VETO}(a,b)$ representa el índice de veto e $I_{DICT}(a,b)$ representa el índice de dictadura definidos en la sección 4.3.

Atendiendo a los índices de fuerza definidos en la sección 4.3, a los argumentos definidos en la sección 3.3 y a las funciones de comparación definidas en la sección 4.4 se tiene que:

$$\mu_{I1}(a,b) = \mu_{\sim}(J^{+}, J^{-}) \;\wedge\; \mu_{\sim}(J^{+}_{INT}, J^{-}_{INT}) \;\wedge\; \mu_{SIGNIF}(J^{=}) \qquad (4.29)$$

$$\mu_{I2}(a,b) = \mu_{>\sim}(J^{+}, J^{-}) \;\wedge\; \mu_{>\sim}(J^{-}_{INT}, J^{+}_{INT}) \;\wedge\; \mu_{SIGNIF}(J^{=}) \qquad (4.30)$$

$$\mu_{I3}(a,b) = \mu_{>\sim}(J^{-}, J^{+}) \;\wedge\; \mu_{>\sim}(J^{+}_{INT}, J^{-}_{INT}) \;\wedge\; \mu_{SIGNIF}(J^{=}) \qquad (4.31)$$

$$\mu_{I4}(a,b) = \mu_{SIGNIF}(J^{=}) \;\wedge\; \neg\, [\mu_{>>}(J^{+}_{INT}, J^{-}_{INT}) \vee \mu_{>>}(J^{-}_{INT}, J^{+}_{INT})\,] \qquad (4.32)$$

4.5.3 Cálculo del índice de credibilidad de la relación de preferencia débil Q

De acuerdo a la sección 3.2.3 se tiene que el índice de credibilidad de la relación de preferencia débil Q se calcula por la expresión:

$$\sigma(a\mathrm{Q}b) = \mu_{\sim}[\sigma(a\mathrm{P}b), 0.5\,] \;\wedge\; \mu_{\sim}[\sigma(a\mathrm{I}b), 0.5\,] \;\wedge\; \mu_{\sim}[\sigma(b\mathrm{P}a), 0\,] \qquad (4.33)$$

Donde $\mu_{\sim}$ (x, y) se calcula con la ecuación (4.17), $\sigma(a\text{P}b)$ y $\sigma(b\text{P}a)$ se calculan con la ecuación (4.22) y $\sigma(a\text{I}b)$ se calcula con la ecuación (4.28).

4.5.4 Cálculo del índice de credibilidad de la relación de incomparabilidad R

De acuerdo a la sección 3.2.4 se tiene que el índice de credibilidad de la relación de incomparabilidad R se calcula por la expresión:

$$\sigma(a\text{R}b) = \mu_{\sim}[\sigma(a\text{P}b), 0] \wedge \mu_{\sim}[\sigma(a\text{I}b), 0] \wedge \mu_{\sim}[\sigma(a\text{Q}b), 0] \wedge \mu_{\sim}[\sigma(b\text{P}a), 0] \wedge \mu_{\sim}[\sigma(b\text{Q}a), 0] \qquad (4.34)$$

Donde $\mu_{\sim}$ (x, y) se calcula con la ecuación (4.17), $\sigma(a\text{P}b)$ y $\sigma(b\text{P}a)$ se calculan con la ecuación (4.22), $\sigma(a\text{I}b)$ se calcula con la ecuación (4.28) y $\sigma(a\text{Q}b)$ y $\sigma(b\text{Q}a)$ se calculan con la ecuación (4.33).

4.5.5 Cálculo del índice de credibilidad de la relación de no inferioridad S

De acuerdo a la sección 3.2.5 se tiene que el índice de credibilidad de la relación de no inferioridad S se calcula por la expresión:

$$\sigma(a\text{S}b) = \sigma(a\text{P}b) \vee \sigma(a\text{I}b) \vee \sigma(a\text{Q}b) \qquad (4.35)$$

Donde $\sigma(a\text{P}b)$ se calcula con la ecuación (4.22), $\sigma(a\text{I}b)$ se calcula con la ecuación (4.28) y $\sigma(a\text{Q}b)$ se calcula con la ecuación (4.33).

4.6 Familia de operadores lógicos difusos adecuados para el modelo

En la sección 4.5 se utilizan los operadores lógicos difusos de conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$).

Existen una infinidad de funciones de agregación que se pueden utilizar como operadores lógicos difusos (Beliakov, et al., 2001). Estos se agrupan en varias familias, tales como las medias, las normas y conormas triangulares, integrales de Choquet y Sugeno, sumas pesadas ordenadas (OWA operators), funciones mixtas entre las que destacan las uninormas, y muchas otras.

Se tienen las siguientes preguntas:

¿Cómo escoger la función de agregación más apropiada para aplicarse en un modelo específico?

¿Es una función de agregación suficiente, o se deben utilizar diferentes operadores de agregación en diferentes partes del modelo?

La función de agregación a escoger debe ser consistente con dos aspectos (Beliakov, et al., 2007):

1.- La semántica del proceso de agregación. Esto quiere decir, que si se desea modelar una conjunción, funciones de agregación disyuntivas como por ejemplo las conormas triangulares no son recomendables. La semántica también se refiere a las reglas que deba cumplir la función (Fodor y Roubens, 1994), como por ejemplo simetría, que tenga elemento neutro, elemento absorbente, asociatividad, conmutatividad, idempotencia, compensación, etc. y por último también se refiere a la interpretación que tengan los valores de entrada. La respuesta a estas cuestiones debe resultar en un número de propiedades matemáticas deseables y buscar que familia de funciones de agregación las cumplen ya sea en su totalidad o la mayoría de ellas.

2.- Escoger el miembro apropiado de la familia de funciones. Este miembro debe producir salidas adecuadas para ciertas entradas dadas. Se debe esperar que el diseñador del modelo deba tener una idea de los valores de salida apropiados para ciertos valores prototipo de entrada. Eso lleva a la conclusión de que se debe realizar un ajuste de la función a ciertos valores. El diseñador del modelo puede preguntar a expertos en el tema para que den su opinión sobre los valores que deben tener las salidas para ciertos valores de entrada seleccionados. Esto puede llevarse a cabo presentando a los expertos ciertos casos de interés, ya sea como vectores de entrada, preguntas en forma de cuestionario, etc.

En caso de que exista más de un experto, los valores de salidas que den se pueden agregar usando el promedio, la moda, etc o se pueden reunir entre ellos y llegar a un consenso.

También, si la semántica lo permite, se pueden recolectar datos de un experimento, en forma de cuestionario, preguntando a un conjunto común de personas o expertos para que expresen su opinión sobre los valores de las salidas sobre ciertas entradas, pero sin que se asocien estos valores con algún contexto o alguna regla de agregación. Por ejemplo, un experimento interesante (Zimmermann, y Zyzno, 1980) consistió en preguntar a un grupo de personas acerca de los valores de pertenencia que le darían a diferentes objetos en los conjuntos difusos "metálico" y "contenedor", y después en el conjunto combinado "contenedor metálico". El objetivo era determinar un modelo que describiera la intersección entre esos dos conjuntos difusos. A las personas se les hicieron las preguntas en 3 días separados, con el fin de que no construyeran de manera intuitiva algún modelo de agregación.

Por último también se puede recolectar información de manera automática, como por ejemplo presentando al usuario de una computadora cierta información y registrando sus acciones o decisiones.

En el caso más típico, los datos vienen en k pares (x,y), donde $k \in N$, $x \in [0,1]^n$ es el vector de entrada e $y \in [0,1]$ es la salida deseada. Sin embargo puede haber diferentes variaciones del conjunto de datos: a) algunos componentes del vector de entrada x_k pueden faltar, b) los vectores x_k pueden tener diferente dimensión por construcción y c) las salidas y_k pueden estar especificadas como un rango de valores.

En el ajuste de una función de agregación a los datos (Beliakov, et al., 2007), se pueden distinguir problemas de interpolación y aproximación. En el caso de interpolación, el objetivo es de ajustar los valores de salida de manera exacta. Por otra parte, cuando los datos provienen de un experimento, será normal que los datos de salida tengan algún error, y por lo tanto no tiene sentido que los valores imprecisos de salida resultantes del experimento sean interpolados. En este caso el objetivo es mantenerse cerca de los valores de salida deseados sin tener que igualarlos exactamente. Este es el problema de aproximación.

Existen por supuesto otras cuestiones que se deben tomar en cuenta cuando se escoja un operador de agregación (Beliakov, et al., 2007), tal como la simplicidad, eficiencia numérica, facilidad de interpretación, etc. No existen reglas generales, y queda al criterio del desarrollador del modelo la selección del operador de agregación.

4.6.1 Aspectos a considerar para la selección de los operadores de agregación en el modelo propuesto

La idea principal consiste en encontrar un operador de agregación que modele a la conjunción ($\wedge$). Este operador debe cumplir con la propiedad de dualidad (Fodor y Roubens, 1994). El operador de negación se fijará como la negación fuerte $\neg(x)= 1 - x$ para que la disyunción ($\vee$) se obtenga como el dual del operador de conjunción: $x \vee y = \neg (\neg x \wedge \neg y) = 1-[(1-x) \wedge (1-y)]$.

Al hacer una reflexión sobre los argumentos definidos en la sección 3.3, se intuye que es necesario considerar un operador de agregación para calcular los índices de credibilidad $\sigma(a\mathrm{P}b)$ (ec. 4.23), $\sigma(aIb)$ (ec.4.28), $\sigma(a\mathrm{Q}b)$ (ec.4.33), $\sigma(aRb)$ (ec.4.34) y $\sigma(a\mathrm{S}b)$ (ec.4.35) y otro operador de agregación para calcular $\mu(a\mathrm{P}_x b)$ (ecs. 4.23 - 4.27) y $\mu(a\mathrm{I}_x b)$ (ecs. 4.29 – 4.32), ya que en cada uno el DM puede tomar una actitud distinta debido al contexto:

Como en el cálculo de los índices de credibilidad $\sigma(a\mathrm{X}b)$ interviene el índice de veto, por su mismo significado es lógico no aceptar algún tipo de compensación en los valores de salida ante ciertos valores de entrada. Debido a esto, es posible que el decisor se comporte de la siguiente manera (a este contexto lo llamaremos **Nivel de abstracción 1**):

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores muy bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.

- Antes valores dispares en las entradas, no se permite ningún grado de compensación en el valor de salida.

Ahora bien, como en el cálculo de $\mu(aP_x b)$ y $\mu(aI_x b)$ no interviene el índice de veto, es posible que el decisor se comporte de la siguiente manera (a este contexto lo llamaremos **Nivel de abstracción 2**):

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.
- Antes valores dispares en las entradas, se permite cierto grado de compensación en el valor de salida.

En la siguiente sección se hace un análisis de los resultados de ciertos experimentos para verificar estas suposiciones. Si se corrobora esta información, se puede tomar como características deseables que deba cumplir el operador de agregación que represente a la conjunción en cada nivel.

4.7 Obtención de valores para los parámetros de comparación y selección de operadores de agregación a partir de información empírica

4.7.1 Introducción

En la sección 4.5 se definen las ecuaciones que sirven para calcular los índices de credibilidad de las relaciones de preferencia básicas P,Q, I, R y S. Estas ecuaciones están en función de lo siguiente:

a) Los índices de fuerza definidos en la sección 4.3
b) Las funciones de comparación de la sección 4.4
c) Operadores lógicos difusos de conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$).

Ha de notarse que para poder realizar un cálculo numérico de los índices de credibilidad es necesario darle valores numéricos a los parámetros de las funciones de comparación de la sección 4.4 así como escoger operadores de agregación que representen a los operadores lógicos difusos utilizados en la sección 4.5.

Los parámetros de las funciones de comparación representan el punto en el cual el decisor percibe como ciertos los predicados de comparación. De manera general, cada decisor piensa y toma decisiones de acuerdo a criterios personales. Debido a esto, es natural pensar que cada decisor debe ser representado con valores diferentes, sin embargo, es posible también que estos valores estén dentro de un rango determinado el cual puede servir como referencia al analista y/o el decisor al momento de utilizar este modelo. Bajo esta idea, se diseñó un experimento (experimento 2) para encontrar un rango de valores para cada parámetro de comparación con el fin de ofrecerlo como referencia inicial.

En lo concerniente a las funciones de agregación, antes de buscar las funciones adecuadas, primero es necesario corroborar las características que suponemos deben cumplir estas funciones atendiendo el nivel de abstracción del que se trate (ver sección 4.6.1). Una vez confirmadas estas características, se deben escoger funciones de agregación que cumplan con las mismas. Dicho esto, se diseñaron otros dos experimentos (experimentos 3 y 4) cuyos resultados, junto con los resultados del experimento 1, nos permite confirmar las características antes mencionadas, y por último, los operadores de agregación adecuados.

A continuación se presentan los experimentos antes mencionados, sus resultados y las conclusiones a las que se llegaron.

4.7.2 Obtención de valores aproximados para los parámetros de comparación

En esta sección se describe el experimento concerniente a los parámetros de comparación, sus resultados y el análisis de los mismos.

4.7.2.1 Descripción del experimento 2

El objetivo de este experimento es obtener mediante encuestas a estudiantes universitarios, un rango de valores que sirvan como referencia para los parámetros de comparación de la sección 4.4.

Ha de recordarse que los parámetros de comparación son los siguientes:

- $\boldsymbol{\alpha}$: umbral que determina que *x*, *y* son parecidos.
- β: umbral que determina cuando *x* es mayor que *y*.
- γ: umbral que determina cuando *x* empieza a ser claramente mayor que *y*.
- δ: umbral que determina cuando *x* es claramente mayor que *y*.

Donde $x, y \in [0,1]$ representan a los índices de fuerza de las coaliciones.

Este cuestionario se aplicó a los mismos estudiantes y en la misma sesión que el experimento de la sección 3.4.1. El tiempo promedio de aplicación fue de 5 min.

A continuación se muestra el cuestionario que se aplicó a cada estudiante para este experimento.

EXPERIMENTO 2

Instrucciones: Juan y Pedro van a compartir un pastel. En cada pregunta, la repartición del pastel es diferente. Para cada caso, en la hoja de respuestas, marque la opción que para su sentido común es la más apropiada.

Caso 1

DIFERENCIA: 1%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.
b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.
c) La repartición del pastel es mayor para Juan.
d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan.

Caso 2.

DIFERENCIA: 2%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.
b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.
c) La repartición del pastel es mayor para Juan.
d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan.

Caso 3.

DIFERENCIA: 5%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.
b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.
c) La repartición del pastel es mayor para Juan.
d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

Caso 4.

DIFERENCIA: 7%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

Caso 5.

DIFERENCIA: 10%
¿Cómo consideraría este resultado?

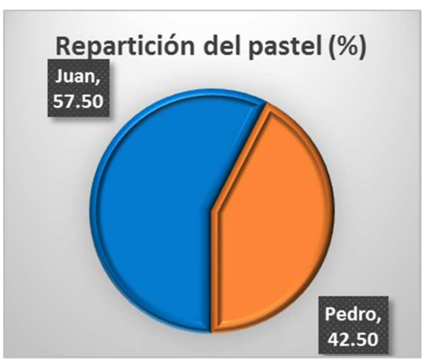
a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

Caso 6.



DIFERENCIA: 15%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

Caso 7.

DIFERENCIA: 20%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

Caso 8.

DIFERENCIA: 25%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan.

Caso 9.

DIFERENCIA: 30%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan.

Caso 10.

DIFERENCIA: 40%
¿Cómo consideraría este resultado?

a) La repartición del pastel es parecida.

b) La repartición del pastel es algo mayor para Juan.

c) La repartición del pastel es mayor para Juan.

d) La repartición del pastel es claramente mayor para Juan

4.7.2.2 Resultados del experimento 2

En la siguiente tabla se muestran los resultados del experimento:

Tabla 4.2.- Resultados del experimento para obtener un rango de valores para los parámetros de comparación de la sección 4.4

	PARECIDO		**ALGO MAYOR**		**MAYOR**		**CLARAMENTE MAYOR**	
	RANGO	**ME-DIA**	**RANGO**	**ME-DIA**	**RANGO**	**ME-DIA**	**RANGO**	**ME-DIA**
1	0.010 - 0.070	0.040	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.250	0.225	0.300 - 0.400	0.350
2	0.010 - 0.050	0.030	0.070 - 0.100	0.085	0.150 - 0.200	0.175	0.250 - 0.400	0.325
3	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.200	0.125	0.250 - 0.400	0.325
4	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
5	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
6	0.010 - 0.070	0.040	0.100 - 0.200	0.150	0.250 - 0.300	0.275	0.400 - 0.400	0.400
7	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
8	0.010 - 0.050	0.030	0.070 - 0.100	0.085	0.150 - 0.200	0.175	0.250 - 0.400	0.325
9	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
10	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
11	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
12	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
13	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.200	0.175	0.250 - 0.400	0.325
14	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
15	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.150	0.100	0.200 - 0.400	0.300
16	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.050	0.035	0.070 - 0.100	0.085	0.150 - 0.400	0.275
17	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
18	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.200	0.150	0.250 - 0.400	0.325
19	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.150	0.100	0.200 - 0.250	0.225	0.300 - 0.400	0.350
20	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
21	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.150	0.100	0.200 - 0.250	0.225	0.300 - 0.400	0.350
22	0.000 - 0.000	0.000	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.400	0.275
23	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.100	0.075	0.150 - 0.200	0.175	0.250 - 0.400	0.325
24	0.010 - 0.050	0.030	0.070 - 0.100	0.085	0.150 - 0.250	0.200	0.300 - 0.400	0.350
25	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.050	0.050	0.070 - 0.400	0.235
26	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.150	0.100	0.200 - 0.250	0.225	0.300 - 0.400	0.350
27	0.010 - 0.020	0.015	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.400	0.300
28	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.200	0.125	0.250 - 0.400	0.325
29	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.150	0.100	0.200 - 0.400	0.300
30	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.020	0.020	0.050 - 0.070	0.060	0.100 - 0.400	0.250
31	0.010 - 0.070	0.040	0.100 - 0.150	0.125	0.200 - 0.250	0.225	0.300 - 0.400	0.350
32	0.010 - 0.010	0.010	0.020 - 0.050	0.035	0.070 - 0.070	0.070	0.100 - 0.400	0.250

33	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
34	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.050	0.035	0.070	-	0.150	0.110	0.200	-	0.400	0.300
35	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.100	0.075	0.150	-	0.200	0.175	0.250	-	0.400	0.325
36	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.020	0.020	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.400	0.250
37	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.070	0.045	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
38	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
39	0.000	-	0.000	0.000	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.070	0.045	0.100	-	0.400	0.250
40	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.100	0.075	0.150	-	0.200	0.175	0.250	-	0.400	0.325
41	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.200	0.150	0.250	-	0.400	0.325
42	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
43	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.020	0.020	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.400	0.250
44	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.100	0.060	0.150	-	0.200	0.175	0.250	-	0.400	0.325
45	0.010	-	0.050	0.030	0.070	-	0.070	0.070	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
46	0.010	-	0.050	0.030	0.070	-	0.150	0.110	0.200	-	0.250	0.225	0.300	-	0.400	0.350
47	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.100	0.075	0.150	-	0.200	0.175	0.250	-	0.400	0.325
48	0.010	-	0.070	0.040	0.100	-	0.200	0.150	0.250	-	0.300	0.275	0.400	-	0.400	0.400
49	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.050	0.035	0.070	-	0.150	0.110	0.200	-	0.400	0.300
50	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
51	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.020	0.020	0.050	-	0.100	0.075	0.150	-	0.400	0.275
52	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.070	0.045	0.100	-	0.200	0.150	0.250	-	0.400	0.325
53	0.010	-	0.050	0.030	0.070	-	0.100	0.085	0.150	-	0.200	0.175	0.250	-	0.400	0.325
54	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.150	0.100	0.200	-	0.200	0.200	0.250	-	0.400	0.325
55	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.050	0.035	0.070	-	0.100	0.085	0.150	-	0.400	0.275
56	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.020	0.020	0.050	-	0.100	0.075	0.150	-	0.400	0.275
57	0.010	-	0.010	0.010	0.020	-	0.020	0.020	0.050	-	0.150	0.100	0.200	-	0.400	0.300
58	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.250	0.175	0.300	-	0.400	0.350
59	0.010	-	0.020	0.015	0.050	-	0.070	0.060	0.100	-	0.150	0.125	0.200	-	0.400	0.300
	PARECIDO				**ALGO MAYOR**				**MAYOR**				**CLARAMENTE MAYOR**			
MEDIA	**0.010**	**-**	**0.022**	**0.016**	**0.042**	**-**	**0.072**	**0.057**	**0.107**	**-**	**0.164**	**0.136**	**0.214**	**-**	**0.400**	**0.307**
MODA	**0.010**	**-**	**0.010**	**0.010**	**0.020**	**-**	**0.020**	**0.020**	**0.050**	**-**	**0.150**	**0.125**	**0.200**	**-**	**0.400**	**0.300**

4.7.2.3 Análisis de resultados del experimento 2

De acuerdo a los resultados mostrados en la tabla 4.2, se recomiendan los siguientes rangos para los parámetros de la sección 4.4:

$\boldsymbol{\alpha}$: umbral que determina que *x*, *y* son parecidos,	$0.010 < \boldsymbol{\alpha} \leq 0.022$
$\boldsymbol{\beta}$: umbral que determina cuando *x* es mayor que *y*,	$0.107 < \boldsymbol{\beta} \leq 0.164$
$\boldsymbol{\gamma}$: umbral que determina cuando *x* empieza a ser claramente mayor que *y*,	$0.164 < \boldsymbol{\gamma} \leq 0.214$
$\boldsymbol{\delta}$: umbral que determina cuando *x* es claramente mayor que *y*,	$0.214 < \boldsymbol{\delta} \leq 0.400$

Queda a criterio del decisor utilizar los valores de media o moda para cada parámetro. También es válido aplicar este cuestionario al decisor y obtener específicamente los valores para los parámetros que mejor representen su criterio.

4.7.3 Obtención de la función de agregación que represente al operador lógico difuso de conjunción

Como se mencionó en la sección 4.7.1, es necesario corroborar las características que suponemos deben cumplir las funciones de agregación atendiendo el nivel de abstracción del que se trate (ver sección 4.6.1). Para lograr el objetivo deseado, se diseñó un cuestionario (se denominó experimento 3) cuyos resultados permitan obtener valores numéricos entre 0 y 1 que cada estudiante asocie para las etiquetas lingüísticas "cierto", "casi cierto", "más cierto que falso", ni cierto ni falso", "más falso que cierto", "casi falso" y "falso". Estas etiquetas lingüísticas son las posibles respuestas que pueden elegir en cada pregunta del experimento 1 de la sección 3.4.1. También se diseñó otro experimento (experimento 4), cuyos resultados nos permiten saber la manera en la que un decisor realiza la operación de conjunción cuando uno de los elementos de entrada es un criterio con capacidad de veto.

Para corroborar las características del operador de agregación del nivel 1 se utilizaron los resultados del experimento 4. Finalmente, se utilizaron los resultados del experimento 3 y los resultados del experimento 1 para corroborar las características del operador de agregación para el nivel 2.

Los cuestionarios de los experimentos 3 y 4 se aplicaron a los mismos estudiantes y en la misma sesión que el experimento 1 de la sección 3.4.1. El tiempo promedio de aplicación fue de 20 minutos. Se aplicaron de manera consecutiva.

4.7.3.1 Descripción del experimento 3

A continuación se muestra el cuestionario que se aplicó a cada estudiante para este experimento. Para obtener el rango de valores numéricos asociado a cada etiqueta lingüística se asocia el valor numérico respondido en cada pregunta de la sección 1 con las respuestas de la sección 2.

EXPERIMENTO 3

SECCIÓN 1

Escriba en la hoja de respuestas lo que para su sentido común considere lo más apropiado.

Si usted observa que el día de hoy presenta las mismas condiciones climatológicas que otros 10 días en los que ocurrió lo siguiente:

1.- Se cumplió que en **10** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ___________________

2.- Se cumplió que en **9** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

3.- Se cumplió que en **8** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

4.- Se cumplió que en **7** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

5.- Se cumplió que en **6** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

6.- Se cumplió que en **5** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

7.- Se cumplió que en **4** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

8.- Se cumplió que en **3** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

9.- Se cumplió que en **2** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

10.- Se cumplió que en **1** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ______________________

11.- Se cumplió que en **ninguno** de esos **10** días llovió. A su juicio, ¿Cuál es la probabilidad numérica de que llueva hoy? (Puede escribir un rango) ____________

EXPERIMENTO 3

SECCIÓN 2

Escriba en la hoja de respuestas lo que para su sentido común considere lo más apropiado.

Nota: Si tiene duda de escoger entre dos respuestas en una pregunta, puede escoger las dos respuestas para la misma pregunta.

Si usted observa que el día de hoy presenta las mismas condiciones climatológicas que otros 10 días en los que ocurrió lo siguiente:

1.- Se cumplió que en **10 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

2.- Se cumplió que en **9 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

3.- Se cumplió que en **8 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

4.- Se cumplió que en **7 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

5.- Se cumplió que en **6 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

6.- Se cumplió que en **5 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

7.- Se cumplió que en **4 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

8.- Se cumplió que en **3 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

9.- Se cumplió que en **2 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

10.- Se cumplió que en **1 de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

11.- Se cumplió que en **ninguno de esos 10 días llovió**, usted consideraría que:

a) Cree cierto que va a llover hoy.
b) Cree casi cierto que va a llover hoy.
c) Cree más cierto que falso que va a llover hoy.
d) Cree tan cierto como falso que va a llover hoy.
e) Cree más falso que cierto que va a llover hoy.
f) Cree casi falso que va a llover hoy.
g) Cree falso que va a llover hoy.

4.7.3.2 Resultados del experimento 3

Tabla 4.3.- Resultados del experimento 3

	ETIQUETAS LINGÜÍSTICAS						
ENTREVISTADO	CIERTO	CASI CIERTO	MAS CIERTO QUE FALSO	NI CIERTO NI FALSO	MAS FALSO QUE CIERTO	CASI FALSO	FALSO
1	1.000	0.825	0.750	0.675	0.575	0.525	0.500
2	0.980	0.915	0.760	0.650	0.455	0.190	0.040
3	1.000	0.940	0.650	0.000	0.300	0.195	0.000
4	1.000	0.900	0.800	0.650	0.400	0.150	0.000
5	1.000	0.890	0.640	0.490	0.340	0.100	0.000
6	0.850	0.725	0.575	0.475	0.300	0.250	0.050
7	0.980	0.950	0.900	0.850	0.800	0.600	0.175
8	1.000	0.990	0.750	0.500	0.300	0.075	0.000
9	1.000	0.895	0.650	0.500	0.350	0.105	0.000
10	1.000	0.850	0.650	0.500	0.300	0.100	0.000
11	1.000	0.850	0.650	0.500	0.350	0.100	0.000
12	0.975	0.925	0.800	0.650	0.450	0.300	0.100
13	0.975	0.950	0.750	0.550	0.400	0.300	0.100
14	0.980	0.875	0.675	0.480	0.380	0.300	0.100
15	1.000	0.825	0.600	0.200	0.070	0.050	0.000
16	0.850	0.650	0.500	0.250	0.100	0.050	0.000
17	0.990	0.840	0.640	0.490	0.340	0.140	0.010
18	1.000	0.950	0.750	0.550	0.350	0.150	0.050
19	0.950	0.800	0.650	0.500	0.350	0.150	0.050
20	1.000	0.875	0.800	0.550	0.325	0.100	0.000
21	1.000	0.900	0.750	0.650	0.525	0.225	0.000
22	0.950	0.750	0.600	0.450	0.300	0.150	0.000
23	1.000	0.850	0.650	0.450	0.250	0.100	0.000
24	0.950	0.800	0.650	0.450	0.300	0.150	0.010
25	0.900	0.800	0.650	0.500	0.450	0.250	0.100
26	0.925	0.725	0.575	0.500	0.325	0.175	0.025
27	0.900	0.750	0.650	0.500	0.360	0.055	0.000
28	0.900	0.765	0.600	0.540	0.425	0.225	0.050
29	0.975	0.875	0.700	0.500	0.450	0.300	0.100
30	0.950	0.750	0.600	0.450	0.300	0.150	0.000
31	0.950	0.750	0.600	0.500	0.350	0.150	0.000
32	0.900	0.810	0.675	0.495	0.315	0.110	0.000
33	0.900	0.700	0.600	0.500	0.350	0.200	0.050

34	1.000	0.950	0.675	0.500	0.315	0.100	0.010
35	0.950	0.850	0.650	0.450	0.300	0.100	0.010
36	1.000	0.750	0.550	0.500	0.200	0.100	0.000
37	1.000	0.875	0.650	0.400	0.200	0.100	0.000
38	0.950	0.800	0.660	0.500	0.315	0.100	0.000
39	0.900	0.700	0.600	0.500	0.350	0.200	0.050
40	0.990	0.900	0.750	0.500	0.300	0.200	0.000
41	0.950	0.750	0.550	0.400	0.250	0.100	0.000
42	0.950	0.800	0.650	0.450	0.300	0.150	0.000
43	1.000	0.900	0.700	0.550	0.400	0.200	0.050
44	1.000	0.850	0.600	0.400	0.250	0.225	0.000
45	1.000	0.875	0.725	0.475	0.350	0.250	0.100
46	1.000	0.950	0.750	0.550	0.350	0.150	0.000
47	0.900	0.700	0.550	0.450	0.300	0.100	0.000
48	1.000	0.900	0.650	0.400	0.200	0.100	0.000
49	0.950	0.850	0.700	0.600	0.425	0.250	0.000
50	0.950	0.750	0.600	0.500	0.300	0.100	0.000
51	0.975	0.800	0.725	0.575	0.450	0.300	0.055
52	1.000	0.850	0.650	0.500	0.400	0.200	0.000
53	1.000	0.850	0.700	0.550	0.350	0.150	0.000
54	0.900	0.700	0.550	0.450	0.300	0.150	0.075
55	0.900	0.700	0.600	0.500	0.350	0.150	0.050
56	1.000	0.850	0.650	0.450	0.300	0.150	0.000
57	1.000	0.900	0.745	0.545	0.345	0.195	0.045
58	0.975	0.800	0.500	0.450	0.300	0.065	0.000
59	1.000	0.900	0.650	0.450	0.300	0.100	0.000

	CIERTO	**CASI CIERTO**	**MAS CIERTO QUE FALSO**	**NI CIERTO NI FALSO**	**MAS FALSO QUE CIERTO**	**CASI FALSO**	**FALSO**
PROMEDIO	0.966	0.833	0.661	0.493	0.341	0.172	0.033

4.7.3.3 Descripción del experimento 4

El objetivo de este cuestionario es mostrarle al encuestado el grado de verdad de que se presente una relación de preferencia estricta entre dos individuos. A este grado de verdad se le denomina “Evaluación de preferencia del candidato”. Después se le pide que dé una nueva evaluación de preferencia del candidato tomando en cuenta ahora un efecto de veto que se le presenta bajo el concepto “probabilidad de NO rechazo del órgano”. Se le presentan diferentes situaciones de valores de entrada, con el fin de corroborar la manera de evaluar del encuestado ante valores bajos, intermedios o altos y verificar si permite algún grado de compensación.

A continuación se detalla el cuestionario aplicado a los estudiantes:

EXPERIMENTO 4

Descripción:

Suponga que usted es miembro del comité evaluador del consejo de trasplante de órganos y tejidos de un estado.

Llaman de un hospital para avisar que un donador de órganos acaba de fallecer y tienen disponible su corazón para trasplante.

Se tienen dos candidatos con la misma prioridad en la lista de espera.

Tras un análisis de los resultados en estudios físicos y clínicos el comité evaluador determina con cierto grado de certeza que un candidato es preferido sobre el otro para recibir el órgano y ese dato es el que se utiliza como evaluación del candidato. Ejemplo:

Candidato	Decisión	Evaluación de preferencia del candidato
Juan	El comité evaluador cree con un 90% de certeza que Juan es preferido sobre Pedro para recibir el órgano.	90%
Pedro	El comité evaluador cree con un 25% de certeza que Pedro es preferido sobre Juan para recibir el órgano.	25%

Debido a que el porcentaje de rechazo de órganos en la etapa de recuperación es alta, la junta directiva avisó al comité evaluador que entró en vigor un nuevo reglamento y que en la evaluación de preferencia del candidato ahora debe tomarse en cuenta también como requisito PRIMORDIAL que el candidato NO rechace el órgano en la etapa de recuperación.

Para evaluar que el candidato no rechace el órgano, se analizaron ciertos estudios clínicos que se le habían hecho previamente en la evaluación original a cada paciente en los cuales se debe garantizar que sean menores de cierto valor (es decir de un valor máximo permitido), caso contrario, es muy probable que el paciente rechace el órgano. Con el fin de evaluar este nuevo requerimiento, se diseñó un modelo que indica la probabilidad de 0 a 100% de que el paciente NO rechace el órgano, donde 0% indica que el paciente rechazará el órgano y el 100% indica que el paciente NO lo rechazará.

En base a esto usted debe dar una evaluación final de preferencia, en una escala de 0-100%, que contemple la evaluación original del candidato Y la probabilidad de que NO rechace el órgano, ahora primordial según el nuevo reglamento.

Evaluación.

Candidato	Evaluación de preferencia original del candidato Escala: 0-100%	Probabilidad de NO rechazo del órgano en la etapa de recuperación. Escala: 0-100%	Evaluación final de preferencia del candidato Escala: 0-100%
1	100	100	
2	75	100	
3	65	100	
4	50	100	
5	25	100	
6	0	100	
7	100	90	
8	75	90	
9	65	90	
10	50	90	
11	25	90	
12	0	90	
13	100	75	
14	75	75	
15	65	75	
16	50	75	
17	25	75	
18	0	75	
19	100	50	
20	90	50	
21	65	50	
22	50	50	
23	25	50	
24	0	50	
25	100	25	
26	75	25	
27	65	25	
28	50	25	
29	25	25	
30	0	25	
31	100	0	
32	75	0	
33	65	0	
34	50	0	
35	25	0	
36	0	0	

4.7.3.4 Resultados del experimento 4

En la tabla 4.4 se muestran los resultados del experimento que indica el porcentaje del total de preguntas que le corresponde a cada característica de interés.

Tabla 4.4.- Resultados del experimento 4

Característica de la salida respecto a los valores de entrada	Porcentaje de preguntas con esta característica
Menor que el mínimo	97.00%
Entre mínimo y máximo	3.00%
Mayor que el máximo	0.00%
Total	**100.00%**

4.7.3.5 Determinación de la función de agregación apropiada a partir de los resultados experimentales

Nivel de abstracción 1

Como puede observarse en la tabla 4.4, el 97% de las respuestas de todos los estudiantes tienen un comportamiento arquimediano (ver sección 2.3), es decir, no compensatorio. Con esto se verifica lo propuesto en la sección 4.6.1 para el nivel 1. Ahora bien, para escoger una familia de funciones de agregación se tiene que la gran mayoría de las preguntas tienen valores menores que el mínimo. De acuerdo a la sección 2.3, cualquier familia de funciones T-norma arquimedianas es adecuada para este caso. Se recomienda la familia de operadores Schweizer – Sklar, que se calcula de la siguiente manera: $(\max(x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1{,}0))^{1/\lambda}$ dónde: $-\infty < \lambda < +\infty$, ya que su límite inferior es el producto drástico y su límite superior es el mínimo. Con esto se tiene un rango excelente de valores que representen el comportamiento no compensatorio de cualquier decisor para el nivel 1.

A continuación, se hizo un segundo análisis sólo con las preguntas que tuvieron un valor menor que el mínimo, con el fin de determinar si es posible encontrar un valor para el parámetro λ que represente a todos los estudiantes encuestados. Para lograr esto, se calculó el valor de λ que mejor aproximara el valor de la conjunción para cada pregunta. En la tabla 4.4 se muestran los resultados.

Tabla 4.5.- Resultados de los valores del parámetro λ

Características del parámetro λ	**Porcentaje de preguntas con esta característica**
$-\infty < \lambda < -2$	25.5%
$-2 < \lambda < 2$	59%
$2 < \lambda < +\infty$	15.5%
Total	**100.00%**

De los resultados obtenidos, ha de notarse que no fue posible encontrar un valor de λ que representara a la mayoría de los estudiantes. Lo más que se logró fue clasificar los valores de λ obtenidos como en la tabla 4.5.

Nivel de abstracción 2

La información que contienen las preguntas del experimento 1 de la sección 3.4 corresponde al nivel de abstracción 2. Específicamente, en las preguntas P-1.2, P-1.3, P-2.2, P-3.2, P-3.3 y P-4.2 de la sección donde se evalúan condiciones de preferencia estricta así como en las preguntas I-1.2, I-2.2, I-3.2, I-4.2 e I-4.3 de la sección donde se evalúan condiciones de indiferencia de este experimento se presenta el operador de conjunción ($\wedge$). Lo que se desea es obtener valores numéricos de entrada y salida para el operador de conjunción de estas preguntas, con el fin de obtener las características que deba cumplir el operador de conjunción en este nivel de abstracción.

Para obtener los valores numéricos de entrada y salida de la conjunción de cada encuestado se realizó lo siguiente: Para cada una de las preguntas de interés se calcularon los índices de fuerza J^+, J^-, $J^=$, J^+_{int}, J^-_{int} de acuerdo a la sección 4.3.

Tomemos como ejemplo la pregunta P-1.2 correspondiente a la sección de preferencia estricta:

P1 - Razón en contra #1: Se cumple que J+ > J- pero también se cumple que J-int > J+int

Aspirante	H1	H2	H3	H4	H5	H6	H7	H8	H9	H10
	Habilidades									
Juan	8.5	8.5	8.5	8.5	8.5	10.0	7.0	6.0	6.0	6.0
Pedro	7.0	7.0	7.0	7.0	7.0	6.0	8.5	10.0	10.0	10.0

Habilidades:

A favor de Juan: **6** ----> Con mucha ventaja: **1**
Igual de buenos: **0**
A favor de Pedro: **4** ----> Con mucha ventaja: **3**

¿Qué tan cierto considera que Juan es mejor que Pedro?

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso
g) Falso

Fig 4.17.- Pregunta P-1.2 del experimento 1

De acuerdo a los detalles de experimento 1, los diez criterios a evaluar tienen la misma importancia y por lo tanto, los mismos pesos. En base a esto, para esta pregunta, tenemos que los valores de los índices de fuerza son los siguientes:

$J^+ = 0.6$ $\quad$ $J^+_{INT} = 0.1$

$J^= = 0.0$ $\quad$ $J^-_{INT} = 0.3$

$J^- = 0.4$

En la siguiente tabla se muestra en resumen lo que se evalúa en cada pregunta así como los valores de los índices de fuerza:

Tabla 4.6.- Resumen de las preguntas de interés del experimento 1

Preg	**Índices de fuerza**					**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**		
	J^+	**$J^=$**	**J^-**	**J^+_{INT}**	**J^-_{INT}**	**A favor**	**Y**	**No en contra**
P-1.2	0.6	0.0	0.4	0.1	0.3	$J^+ > J^-$	$\wedge$	$\neg(J^-_{INT} > J^+_{INT})$
P-1.3	0.3	0.5	0.2	0.0	0.0	$J^+ > J^-$	$\wedge$	$\neg(J^=$ es muy fuerte)
P-2.2	0.7	0.0	0.3	0.0	0.3	$J^+ >> J^-$	$\wedge$	$\neg(J^-_{INT} >> J^+_{INT})$
P-3.2	0.4	0.0	0.6	0.3	0.1	$J^+_{INT} > J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^- > J^+)$
P-3.3	0.2	0.6	0.2	0.2	0.1	$J^+_{INT} > J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^=$ es muy fuerte)
P-4.2	0.3	0.0	0.7	0.3	0.0	$J^+_{INT} >> J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^- >> J^+)$

Si se sustituyen los índices de fuerza por sus correspondientes valores numéricos y los predicados de comparación con su respectiva función de comparación en las columnas "A favor y "No en contra" de la tabla 4.6 se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 4.7.- Resumen con las funciones de comparación resultantes en las columnas "A favor" y "No en contra" de las preguntas de interés del experimento 1

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**		
	A favor	**Y**	**No en contra**
P-1.2	$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)]
P-1.3	$\mu_{>}$ (0.3, 0.2)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.5)]
P-2.2	$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)]
P-3.2	$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)]
P-3.3	$\mu_{>}$ (0.2, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.6)]
P-4.2	$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)]

Ahora tomemos como caso de estudio al entrevistado número 2. Las respuestas que obtuvo en las preguntas de interés del experimento 1 fueron las siguientes:

Tabla 4.8.- Respuestas del entrevistado No.2 en el experimento 1

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**			**Respuesta**
	A favor	**Y**	**No en contra**	
P-1.2	$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)]	Ni cierto ni falso
P-1.3	$\mu_{>}$ (0.3, 0.2)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.5)]	Ni cierto ni falso
P-2.2	$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)]	Ni cierto ni falso
P-3.2	$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)]	Ni cierto ni falso
P-3.3	$\mu_{>}$ (0.2, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.6)]	Mas cierto que falso
P-4.2	$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)]	Mas cierto que falso

Para calcular las funciones de comparación de las columnas "A favor" y "En contra" de la tabla 4.8 se necesita dar valores numéricos a los parámetros de comparación. Estos valores se obtienen de los resultados del experimento 2.

Los resultados obtenidos por el encuestado en el experimento 2 donde se obtienen los valores de los parámetros de comparación fueron los siguientes:

Tabla 4.9.- Resultados del experimento 2 del encuestado No. 2

Etiqueta	Rango	Valor medio
“parecido”	0.01 – 0.05	0.030
“algo mayor que”	0.07 – 0.10	0.085
“mayor que”	0.15 – 0.20	0.175
“claramente mayor que”	0.25 – 0.40	0.325

Al calcular las funciones de comparación de acuerdo a la sección 4.4 utilizando los valores promedio de la tabla 4.9 como los valores para los parámetros de comparación, se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 4.10.- Respuestas del entrevistado No.2 en el experimento 1

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**			**Respuesta**
	A favor	**Y**	**No en contra**	
P-1.2	1.000	$\wedge$	0.000	Ni cierto ni falso
P-1.3	0.483	$\wedge$	0.000	Ni cierto ni falso
P-2.2	1.000	$\wedge$	0.333	Ni cierto ni falso
P-3.2	1.000	$\wedge$	0.000	Ni cierto ni falso
P-3.3	0.483	$\wedge$	0.000	Mas cierto que falso
P-4.2	0.667	$\wedge$	0.000	Mas cierto que falso

El paso siguiente es remplazar las etiquetas lingüísticas de cada respuesta por su correspondiente valor numérico. Estos valores se obtienen del experimento 3.

Los resultados obtenidos por el encuestado número 2 en el experimento 3 donde se obtienen los valores para las etiquetas lingüísticas fueron los siguientes:

Tabla 4.11.- Resultados en el experimento 3 del encuestado No. 2

Etiqueta	Rango	Valor medio
“Cierto”	0.98 – 0.98	0.980
“Casi cierto”	0.88 – 0.95	0.915
“Más cierto que falso”	0.76 – 0.76	0.760
“Ni cierto ni falso”	0.65 – 0.65	0.650
“Más falso que cierto”	0.41 – 0.50	0.455
“Casi falso”	0.13 – 0.25	0.190
“Falso”	0.02 – 0.06	0.040

Ahora, se sustituyen los valores promedio de la tabla 4.11 en la tabla 4.10. Con esto se obtienen los valores de salida del operador de conjunción para el nivel de abstracción 2 para el entrevistado número 2:

Tabla 4.12.- Valores de entradas y salida resultantes para el entrevistado No.2

Preg	Se quiere evaluar: (preferencia estricta) A favor	Y	No en contra	Respuesta
P-1.2	1.000	$\wedge$	0.000	0.650
P-1.3	0.483	$\wedge$	0.000	0.650
P-2.2	1.000	$\wedge$	0.333	0.650
P-3.2	1.000	$\wedge$	0.000	0.650
P-3.3	0.483	$\wedge$	0.000	0.760
P-4.2	0.667	$\wedge$	0.000	0.760

El paso siguiente es analizar el valor de la salida respecto a los valores de entrada:

Tabla 4.13.- Característica de la salida respecto a los valores de entrada para el entrevistado No. 2

Preg	Se quiere evaluar: (preferencia estricta) A favor	Y	No en contra	Respuesta	Característica de la salida respecto a los valores de entrada
1.2	1.000	$\wedge$	0.000	0.650	Entre mínimo y máximo
1.3	0.483	$\wedge$	0.000	0.650	Mayor que el máximo
2.2	1.000	$\wedge$	0.333	0.650	Entre mínimo y máximo
3.2	1.000	$\wedge$	0.000	0.650	Entre mínimo y máximo
3.3	0.483	$\wedge$	0.000	0.760	Mayor que el máximo
4.2	0.667	$\wedge$	0.000	0.760	Mayor que el máximo

Este análisis se hizo para cada uno de los entrevistados. En la tabla 4.14 se muestran los resultados del análisis que indican el porcentaje del total de preguntas que le corresponde a cada característica de interés para el nivel 2.

Tabla 4.14.- Características del operador de conjunción para el nivel de abstracción 2

Característica de la salida respecto a los valores de entrada	**Porcentaje de preguntas con esta característica**
Menor que el mínimo	2.82%
Entre mínimo y máximo	81.92%
Mayor que el máximo	15.25%
Total	**100.00%**

Como puede observarse en la tabla 4.14, el 81.92% de las respuestas de todos los estudiantes tienen un comportamiento compensatorio. Con esto se verifica lo propuesto en la sección 4.6.1 para el nivel 2. Ahora bien, para escoger una familia de funciones de agregación se tiene que la gran mayoría de las preguntas están entre el mínimo y máximo. De acuerdo a la sección 2.3, cualquier familia de funciones promedio es adecuada para este caso. Por su simplicidad de cálculo se propone la familia paramétrica de funciones medias cuasi lineales generalizadas, que se calcula de la siguiente manera: $\frac{1}{n}\sum(x_n^p)^{1/p}$, donde: $-\infty < p < +\infty$.

A continuación, se hizo un segundo análisis sólo con las preguntas que tuvieron un valor entre mínimo y máximo, con el fin de determinar si es posible encontrar un valor para el parámetro p que represente a todos los estudiantes encuestados. Para lograr esto, se calculó el valor de p que mejor aproximara el valor de la conjunción para cada pregunta. En la tabla 4.15 y figura 4.19 se muestran los resultados.

Tabla 4.15.- Resultados de los valores del parámetro p

Características del parámetro P	Porcentaje de preguntas con esta característica
$-\infty < p < -1.75$	17.31%
$-1.75 < p < 2.40$	58.66%
$2.40 < p < +\infty$	24.03%
Total	**100.00%**

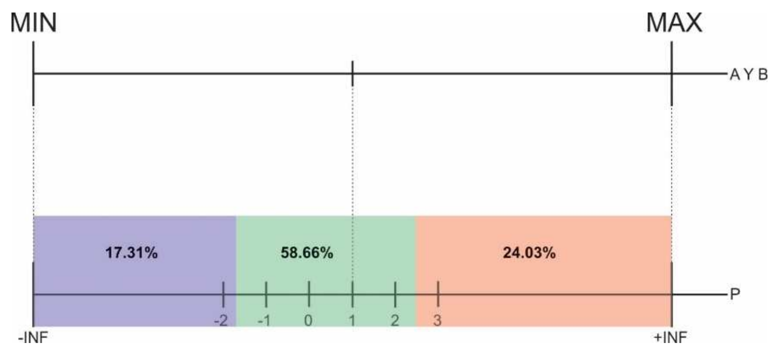


Figura 4.18.- Gráfica que representa los valores obtenidos de p

De los resultados obtenidos, no fue posible encontrar un valor de *p* que representara a la mayoría de los estudiantes. Lo más que se logró fue clasificar los valores de *p* obtenidos como en la tabla 4.15.

4.7.3.6 Conclusiones parciales

De acuerdo al análisis realizado en la sección 4.7.3.5, se concluye que los supuestos propuestos en la sección 4.6.1 son válidos. Para el nivel 1 se recomienda la familia paramétrica arquimediana de operadores Schweizer – Sklar y para el nivel 2 se recomienda la familia paramétrica de funciones medias cuasi lineales generalizadas. Ambas familias de operadores cumplen con el principio de dualidad (Fodor y Roubens, 1994) con el operador de negación fuerte $\neg(x) = 1-x$. Esto permite obtener el operador de disyunción ($\vee$) como el dual del operador de conjunción: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y) = 1-[(1-x) \wedge (1-y)]$, tal como se estableció en la sección 4.6.1. Así, para cada nivel se tienen los siguientes operadores lógicos difusos:

Tabla 4.16.- Resumen de operadores lógicos difusos propuestos para cada nivel, con el operador de disyunción definido como el dual del operador de conjunción y el operador de negación fuerte ¬(x)= 1-x

	Operador de Conjunción $\mathbf{x \wedge y}$	**Operador de Disyunción** $\mathbf{x \vee y}$
1	$T_{\lambda}^{SS}(x,y) = \begin{cases} \min(x,y), & \text{if } \lambda = -\infty, \\ T_P(x,y), & \text{if } \lambda = 0, \\ T_D(x,y), & \text{if } \lambda = \infty, \\ (\max((x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1), 0))^{\frac{1}{\lambda}} & \text{otherwise.} \end{cases}$ Donde: $-\infty < \lambda < +\infty$	$S_{\lambda}^{SS}(x,y) = \begin{cases} \max(x,y), & \text{if } \lambda = -\infty, \\ S_P(x,y), & \text{if } \lambda = 0, \\ S_D(x,y), & \text{if } \lambda = \infty, \\ 1 - (\max(((1-x)^{\lambda} + (1-y)^{\lambda} - 1), 0))^{\frac{1}{\lambda}} & \text{otherwise.} \end{cases}$ Donde: $-\infty < \lambda < +\infty$
2	$\frac{1}{n}\sum (x_n^p)^{1/p}$ Donde: $-\infty < p < +\infty$	$1 - \frac{1}{n}\sum (1 - x_n^p)^{1/p}$ Donde: $-\infty < p < +\infty$

Como no fue posible encontrar parámetros λ y p para las funciones de agregación propuestas tales que representaran a todos los encuestados, es necesario diseñar un procedimiento para instanciarlos a cada decisor. En el capítulo 5 se describe este procedimiento.

4.8 Ejemplos didácticos

Para finalizar este capítulo, a continuación se presentan dos ejemplos donde se aplica el modelo propuesto.

4.8.1 Ejemplo 1.

Calcular los índices de credibilidad para la relación de preferencia estricta P, la relación de indiferencia I, la relación de preferencia débil Q y la relación de no inferioridad S, para cada alternativa, atendiendo a los siguientes datos y a los valores de los parámetros obtenidos en la sección 5.3.

Sean los siguientes datos iniciales:

Tabla 4.17.- Criterios para el ejemplo 1.

CRITERIOS							
CÓD	NOMBRE	DIRECCIÓN DE LAS PREFERENCIAS (1)	CAPACIDAD DE VETO	ESCALA		UNIDAD DE MEDIDA	PESO
				VALOR MÍN	VALOR MÁX		
C01	EXTERIORES	ASCENDENTE	NO	1	7	-	1
C02	COSTO SERV_MAY	DESCENDENTE	NO	1500	5000	$ PESOS	1
C03	INTERIORES	ASCENDENTE	NO	1	7	-	1
C04	REND. GASOLINA	DESCENDENTE	NO	12	20	KM/L	1
C05	COLOR	ASCENDENTE	NO	1	7	-	1
C06	RINES	ASCENDENTE	NO	14	20	-	1
C07	VALOR DE REVENTA	ASCENDENTE	NO	1	7	-	1
C08	COSTO REFACC	DESCENDENTE	NO	1	5	-	1
C09	AÑO	ASCENDENTE	NO	2005	2015	AÑO	1
C10	ESTÉTICA	ASCENDENTE	NO	1	7	-	1

(1) Ascendente: valor mas grande es mejor.
Descendente: valor mas pequeño es mejor.

Tabla 4.18.- Matriz de evaluación para el ejemplo 1.

		C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
		EXTERIORES	COSTO SERV_MAY	INTERIORES	REND. GASOLINA	COLOR	RINES	VALOR DE REVENTA	COSTO REFACC	AÑO	ESTÉTICA
	ORDEN DE LAS PREF:	⇑	⇓	⇑	⇓	⇑	⇑	⇑	⇓	⇑	⇑
	CAPACIDAD DE VETO:	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	PESOS:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
UMBRALES	q:	(0, 1)	(0, 250)	(0, 1)	(0, 0.5)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	p:	(0, 2)	(0, 500)	(0, 2)	(0, 1)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)
	s:	(0, 3)	(0, 1500)	(0, 3)	(0, 2)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)
	r:	(0, 4)	(0, 2000)	(0, 4)	(0, 3)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)	(0, 4)
	v:	(0, 5)	(0, 10000)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)
	UNIDAD:	-	$ PESOS	-	KM/L	-	PULG	-	-	AÑO	-
A01	AUTO A	7	$2,000.00	7	15.00	3	15	4	2	2010	4
A02	AUTO B	3	$4,900.00	3	14.90	3	15	4	2	2010	6

Tabla 4.19.- Parámetros para las funciones de comparación del ejemplo 1

	Valor medio
$0.010 < \alpha \leq 0.050$	0.030
$0.070 < \beta \leq 0.100$	0.085
$0.150 < \gamma \leq 0.200$	0.175
$0.250 < \delta \leq 0.400$	0.325

Solución:

Atendiendo a la información anterior y de acuerdo a la sección 4.2 y 4.3 se obtienen los siguientes valores para los índices de fuerza:

$J^{+}(a,b) = 0.3$ $\quad$ $J^{+}(b,a) = 0.1$

$J^{=}(a,b) = 0.6$ $\quad$ $J^{=}(b,a) = 0.6$

$J^{-}(a,b) = 0.1$ $\quad$ $J^{-}(b,a) = 0.3$

$J^{+}_{INT}(a,b) = 0.3$ $\quad$ $J^{+}_{INT}(b,a) = 0.0$

$J^{-}_{INT}(a,b) = 0.0$ $\quad$ $J^{-}_{INT}(b,a) = 0.3$

De acuerdo a los valores de los índices mostrados anteriormente y a las secciones 4.4 y 4.5 se obtienen los índices de credibilidad de las relaciones de preferencia estricta, indiferencia, preferencia débil y no inferioridad para el par de alternativas *a* y *b*:

Alternativa A:	Alternativa B:
$\sigma(a\mathrm{P}b) = 1$	$\sigma(b\mathrm{P}a) = 0$
$\sigma(a\mathrm{I}b) = 0$	$\sigma(b\mathrm{I}a) = 0$
$\sigma(a\mathrm{Q}b) = 0$	$\sigma(b\mathrm{Q}a) = 0$
$\sigma(a\mathrm{S}b) = 1$	$\sigma(b\mathrm{S}a) = 0$

Para efectos de comparación se calcularon los índices de credibilidad con el método de ELECTRE III (véase sección 2.6.4.2.2) y se obtuvieron los siguientes resultados:

$\sigma(a\mathrm{S}b)= 0.9$
$\sigma(b\mathrm{S}a)= 0.7$

Como puede observarse, el modelo propuesto concuerda con el razonamiento del DM real mencionado en la sección 1, en la que establece que el grado de verdad de que el automóvil b es al menos tan bueno como el automóvil b es falso ($\sigma(b\mathrm{S}a)= 0$), mientras que el modelo de ELECTRE III no lo hace ($\sigma(b\mathrm{S}a)= 0.7$).

4.8.2 Ejemplo 2.

Calcular los índices de credibilidad para la relación de preferencia estricta P, la relación de indiferencia I, la relación de preferencia débil Q y la relación de no inferioridad S, para cada alternativa, atendiendo a los siguientes datos.

Sean los siguientes datos iniciales:

Tabla 4.20.- Criterios para el ejemplo 2

2.- CRITERIOS							
CÓD	NOMBRE	DIRECCIÓN DE LAS PREFERENCIAS	CAPACIDAD DE VETO	ESCALA		UNIDAD DE MEDIDA	PESO
				VALOR MÍN	VALOR MÁX		
C01	C1	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C02	C2	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C03	C3	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C04	C4	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C05	C5	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C06	C6	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C07	C7	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C08	C8	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C09	C9	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1
C10	C10	ASCENDENTE	NO	5	10	M	1

Tabla 4.21- Matriz de evaluación para el ejemplo 2

		C01	C02	C03	C04	C05	C06	C07	C08	C09	C10
		C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8	C9	C10
	ORDEN DE LAS PREF:	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑	⇑
	CAPACIDAD DE VETO:	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	PESOS:	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
UMBRALES	q:	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)	(0, 0.5)
	p:	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)	(0, 1)
	s:	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)	(0, 2)
	r:	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)	(0, 3)
	v:	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)	(0, 5)
	UNIDAD:	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M
A01	A	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	10.00	6.00	6.00	6.00	6.00
A02	B	9.00	9.00	9.00	9.00	9.00	9.00	10.00	10.00	10.00	10.00

Tabla 4.22.- Parámetros para las funciones de comparación del ejemplo 2

	Valor medio
$0.010 < \alpha \leq 0.050$	0.030
$0.070 < \beta \leq 0.100$	0.085
$0.150 < \gamma \leq 0.200$	0.175
$0.250 < \delta \leq 0.400$	0.325

Solución:

Atendiendo a la información anterior y de acuerdo a la sección 4.2 y 4.3 se obtienen los siguientes valores para los índices de fuerza:

$J^{+}(a,b) = 0.6$ $\quad J^{+}(b,a) = 0.4$

$J^{=}(a,b) = 0.0$ $\quad J^{=}(b,a) = 0.0$

$J^{-}(a,b) = 0.4$ $\quad J^{-}(b,a) = 0.6$

$J^{+}_{INT}(a,b) = 0.0$ $\quad J^{+}_{INT}(b,a) = 0.4$

$J^{-}_{INT}(a,b) = 0.4$ $\quad J^{-}_{INT}(b,a) = 0.0$

De acuerdo a los valores de los índices mostrados anteriormente y a las secciones 4.4 y 4.5 se obtienen los índices de credibilidad de las relaciones de preferencia estricta, indiferencia, preferencia débil y no inferioridad para el par de alternativas *a* y *b*:

Alternativa A: $\quad$ Alternativa B:

$\sigma(a\mathrm{P}b) = 0$ $\quad \sigma(b\mathrm{P}a) = 0$

$\sigma(a\mathrm{I}b) = 0$ $\quad \sigma(b\mathrm{I}a) = 0$

$\sigma(a\mathrm{Q}b) = 0$ $\quad \sigma(b\mathrm{Q}a) = 0$

$\sigma(a\mathrm{S}b) = 0$ $\quad \sigma(b\mathrm{S}a) = 0$

Para efectos de comparación se calcularon los índices de credibilidad con el método de ELECTRE III (véase sección 2.8.5.1) y se obtuvieron los siguientes resultados:

$\sigma(a\mathrm{S}b) = 0.6$

$\sigma(b\mathrm{S}a) = 0.4$

En los índices de fuerza se aprecia que $J^+(a,b)$ es mayor que $J^-(a,b)$, sin embargo, existe una coalición intensamente en contra ($J^-_{INT}(a,b) = 0.4$) lo cual provoca un efecto de veto aun cuando ningún criterio tenga capacidad de veto por sí solo. Esto conduce a que $\sigma(aSb)= 0$, lo que quiere decir que es falso que *a* sea al menos tan bueno como *b* debido a la coalición de criterios intensamente en su contra. Se aprecia también que con el método ELECTRE III se obtiene un valor de $\sigma(aSb)= 0.6$, ya que este modelo no es sensible a las intensidades en contra de la preferencia. Por último, en los índices de fuerza se aprecia que $J^+(b,a)$ es menor que $J^-(b,a)$ en una cantidad considerable, lo cual invalida por completo que *b* sea al menos tan bueno como *a*, por lo tanto $\sigma(bSa)$ debe ser cero.

5 Procedimiento experimental para instanciar parámetros del modelo a decisores específicos

5.1 Introducción

En el capítulo 4 se definieron las ecuaciones para calcular el grado de verdad de la existencia de cada una de las relaciones de preferencia básicas. Para poder realizar los cálculos, los siguientes parámetros se deben especificar (ver sección 4.1): Los vectores de pesos *w* y los vectores de umbrales de preferencia *q, p, s, r, v* y *d*. Los valores de estos parámetros se consideran existentes y sirven como información de entrada para el modelo. En la sección 4.4 se definieron nuevos parámetros necesarios (α, β, γ, δ, ε, ζ) cuyos valores representan los umbrales que el decisor percibe al comparar dos índices de fuerza. Además, en la sección 4.6, se definieron otros dos parámetros (λ, *p*) utilizados en los operadores de agregación que representan aproximadamente la manera en la que el decisor calcula la conjunción. En la sección 4.7 se desarrolló un experimento con el fin de obtener valores generales para los parámetros de comparación y para los operadores de agregación. En la sección 4.7.2.3 se muestran los rangos de valores obtenidos para los parámetros de comparación y se determinó que queda a criterio del decisor utilizar los valores de media o moda para cada parámetro. En la sección 4.7.3.6 se concluyó que no fue posible encontrar valores para los parámetros de los operadores de agregación que representaran a la mayoría de los encuestados. Ante esto surgen las siguientes preguntas:

¿Cómo obtener los parámetros de comparación en caso de que el decisor no acepte los valores promedio o de moda propuestos en la sección 4.7.2.3?

Ya que no fue posible encontrar valores que sirvan como referencia para los parámetros de las funciones de agregación, es decir, valores generales que representen a la mayoría de las personas ¿Cómo obtener estos valores de manera experimental para cada decisor?

El objetivo de este capítulo es ofrecer un procedimiento práctico para obtener los valores de los parámetros de comparación y de los operadores de agregación a partir de cuestionarios aplicados al decisor en cuestión.

Este procedimiento se deriva esencialmente de los experimentos mostrados en la sección 4.7:

a) Para el caso de los parámetros de comparación, se propone realizar específicamente el experimento 2 definido en la sección 4.7.2.1.

b) Para el caso de los parámetros de los operadores de agregación, el procedimiento propuesto consiste en aplicar los experimentos 3 y 4 definidos en la sección 4.7.3.1 y 4.7.3.3 respectivamente y también el experimento 1 definido en la sección 3.4.1, pero este último adaptado al problema de decisión que se quiere resolver. Para realizar esta adaptación, se diseña una estructura general basada en información inicial (pesos y umbrales de preferencia) para construir las preguntas para este experimento.

En resumen, este procedimiento consiste en aplicar al decisor los experimentos 1, 2, 3 y 4, con el experimento 1 adaptado al problema de decisión al que se esté enfrentando.

Ha de notarse que este procedimiento interactivo requiere de tiempo y concentración del decisor, lo cual puede ser una desventaja. Además, en este procedimiento se siguen asumiendo como existentes los valores de los vectores de pesos y los vectores de los umbrales de preferencia, los cuales, en la práctica, el decisor puede presentar dificultades en asignarles valores ya que son parámetros cuyos significados puede que apenas sean claros para él.

Ante este motivo, se plantea la inferencia de todos los parámetros necesarios en el modelo como un problema de optimización multiobjetivo, cuya solución se plantea como trabajo futuro, no incluido en este trabajo de tesis.

Este capítulo se conforma de la manera siguiente: En la sección 5.2 se describe el procedimiento propuesto. En la sección 5.3 se muestra una aplicación del procedimiento a un decisor real y en la sección 5.4 se plantea la inferencia de parámetros del modelo como un problema de optimización multiobjetivo.

5.2 Descripción del procedimiento

El objetivo de este procedimiento es obtener los parámetros de comparación así como los parámetros de los operadores de agregación.

De acuerdo a la sección 4.6.1, en el modelo propuesto se utilizan dos operadores:

a) Un operador de agregación que represente a la conjunción para el nivel de abstracción 1, donde se toma en cuenta el índice de veto y no se permite ningún efecto de compensación y
b) otro operador de agregación para el nivel de abstracción 2, donde se calculan los valores de $\mu(a\mathrm{P}_x b)$ y $\mu(a\mathrm{I}_x b)$, en donde no interviene aún el índice de veto y se permite además cierto grado de compensación.

Debido a esto, este procedimiento se divide en tres partes:

1. Un procedimiento para obtener los parámetros de las funciones de comparación
2. Un procedimiento para obtener el parámetro λ de la función de agregación para el nivel de abstracción uno y
3. Un procedimiento para obtener el parámetro *p* de la función de agregación para el nivel de abstracción dos

A continuación se muestra cada uno de estos procedimientos.

5.2.1 Obtener los parámetros de las funciones de comparación

Se aplica el experimento 2 descrito en la sección 4.7.2.1 para obtener los parámetros de las funciones de comparación:

- "parecido",
- "algo mayor que",
- "mayor que",
- "claramente mayor que".

5.2.2 Obtener el parámetro λ de la función de agregación de conjunción para el nivel de abstracción uno

El operador de conjunción para este nivel se representa con la familia de operadores Schweizer – Sklar, donde:

$$x \wedge y = (\max(x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1, 0))^{1/\lambda} \text{ dónde: } -\infty < \lambda < +\infty$$

Para obtener el valor de λ, se aplica el experimento 4 de la sección 4.7.3.3 y los valores de entrada y salida del experimento se introducen al software AOTOOL (ver sección 2.3). Con este software se obtiene un valor aproximado del parámetro λ de acuerdo a los datos del experimento.

5.2.3 Obtener el parámetro *p* para el operador lógico difuso de conjunción para el nivel de abstracción dos

El operador de conjunción para este nivel se representa con la familia paramétrica de funciones medias cuasi lineales generalizadas, que se calcula de la siguiente manera:

$$x \wedge y = \frac{1}{n}\sum (x_n^p)^{1/p}, \text{ donde: } -\infty < p < +\infty.$$

Para obtener el parámetro *p* se deberán realizar los siguientes pasos:

I. Aplicar el experimento 3 descrito en la sección 4.7.3.1 para obtener valores reales para las etiquetas lingüísticas siguientes:

a) Cierto
b) Casi cierto
c) Más cierto que falso
d) Ni cierto ni falso
e) Más falso que cierto
f) Casi falso

II. Del problema de decisión que se quiere resolver, se deberá obtener la siguiente información inicial:

- Criterios.
- Escala de evaluación de cada criterio.
- Pesos de cada criterio.
- Umbrales de preferencia e indiferencia de cada criterio.

III. Diseñar un cuestionario utilizando la siguiente estructura para crear las preguntas que reflejen situaciones de asimetría:

El experimento constará de 6 preguntas en total. En cada pregunta se van a evidenciar ciertas situaciones de preferencia en términos de los índices de fuerza definidos en la sección 4.3.

En cada pregunta se mostrará una tabla de evaluación de criterios entre dos alternativas, con el siguiente formato:

Tabla 5.1 – Tabla de evaluación de criterios

	Evaluación de Criterios									
Alternativa:	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**	**C9**	**Cn**
1										
2										

En cada pregunta se mostrará la siguiente información de ayuda:

- Fuerza de criterios a favor de la alternativa 1.
- Fuerza de criterios donde se consideran igual de buenos.
- Fuerza de criterios a favor de la alternativa 2.
- Fuerza de criterios a intensamente a favor de la alternativa 1.
- Fuerza de criterios a intensamente a favor de la alternativa 2.

La pregunta de decisión será la siguiente: ¿Qué tan cierto considera usted que la alternativa 1 es mejor que la alternativa 2?

El formato es de selección múltiple y cada pregunta tendrá las siguientes respuestas:

a) Cierto
b) Casi cierto.
c) Más cierto que falso.
d) Ni cierto ni falso.
e) Más falso que cierto.
f) Casi falso.
g) Falso.

Por último, la evaluación de criterios de cada pregunta deberá cumplir lo siguiente:

Tabla 5.2 – Situaciones de preferencia que se deben de evidenciar en cada pregunta

Pregunta	Se debe evidenciar que:
1	$J^{+}(a,b) > J^{-}(a,b)$ y $J^{-}_{int}(a,b) > J^{+}_{int}(a,b)$
2	$J^{+}(a,b) > J^{-}(a,b)$ y $J^{=}(a,b)$ es muy fuerte
3	$J^{+}(a,b) >> J^{-}(a,b)$ y $J^{-}_{int}(a,b) >> J^{+}_{int}(a,b)$
4	$J^{+}_{int}(a,b) > J^{-}_{int}(a,b)$ y $J^{-}(a,b) > J^{+}(a,b)$
5	$J^{+}_{int}(a,b) > J^{-}_{int}(a,b)$ y $J^{=}(a,b)$ es muy fuerte
6	$J^{+}_{int}(a,b) >> J^{-}_{int}(a,b)$ y $J^{-}(a,b) >> J^{+}(a,b)$

A continuación se va a ejemplificar la generación de la pregunta de la tabla 5.2. De forma similar se pueden generar las preguntas restantes.

Ejemplo 5.1:

Estructurar la pregunta 1 de acuerdo a la información inicial siguiente:

- Parámetro para la función de comparación "parecido a" (α): 0.05
- Parámetro para la función de comparación "mayor que" (β): 0.10
- Parámetro para la función de comparación "claramente mayor que" (δ): 0.25

Tabla 5.3 – Criterios para el ejemplo 5.1

Criterios	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**
Escala	0-100	0-100	0-100	0-100	0-100	0-100	0-100	0-100
Tipo	Ascendente	Ascendente	Ascendente	Ascendente	Ascendente	Ascendente	Ascendente	Ascendente
Peso (*w*)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Umbral *r*	20	20	20	20	20	20	20	20
Umbral *p*	10	10	10	10	10	10	10	10
Umbral *q*	5	5	5	5	5	5	5	5

Solución:

Pregunta 1: De acuerdo a la tabla 5.2 se debe evidenciar que $J^{+}(a,b) > J^{-}(a,b)$ y que también se cumpla que $J^{-}_{int}(a,b) > J^{+}_{int}(a,b)$. Se propone:

$J^{+}(a,b) = 0.50$ $\quad$ $J^{+}_{int}(a,b) = 0.00$

$J^{-}(a,b) = 0.30$ $\quad$ $J^{-}_{int}(a,b) = 0.30$

Recordando que los índices $J^{+}(a,b)$, $J^{-}(a,b)$, $J^{+}_{in}(a,b)_{t}$ y $J^{-}_{int}(a,b)$ se calculan de la manera siguiente:

$$J^{+}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{FAVOR}(a,b)\right).w_j \qquad (4.8)$$

$$J^{-}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{CONTRA}(a,b)\right).w_j \qquad (4.10)$$

$$J^{+}_{INT}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{FAVOR\_INT}(a,b)\right).w_j \qquad (4.11)$$

$$J^{-}_{INT}(a,b) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j\left(C_{CONTRA\_INT}(a,b)\right).w_j \qquad (4.12)$$

Donde $C_{FAVOR}(a,b)$ es el conjunto difuso de criterios que están a favor de la alternativa *a*, es decir es el conjunto de criterios donde $g_j(a) - g_j(b) >= p_j$, $C_{CONTRA}(a,b)$ es el conjunto difuso de criterios que están a favor de la alternativa *b*, es decir es el conjunto de criterios donde $g_j(b) - g_j(a) >= p_j$, $C_{FAVOR\_INT}(a,b)$ es el conjunto de criterios que están a favor de la alternativa *a*, es decir es el conjunto de criterios donde $g_j(a) - g_j(b) >= r_j$ y $C_{CONTRA\_INT}(a,b)$ es el conjunto de criterios que están a favor de la alternativa *b*, es decir, es el conjunto de criterios donde $g_j(b) - g_j(a) >= r_j$.

El siguiente paso es formar la tabla de evaluaciones para la pregunta 1. Se recomienda acomodar primero los criterios a favor de la alternativa 1, después los criterios (si los hay) donde ambas alternativas se consideren indiferentes y al final los criterios que estén en contra de la alternativa 1, esto con el fin de que sea más fácil de visualizar la información.

Tabla 5.4 – Tabla de evaluaciones para la pregunta 2

	Evaluación de Criterios							
Alternativa:	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**
a	90	90	90	90	90	75	75	75
b	80	80	80	80	80	100	100	100

En la tabla 5.4 se aprecia que los criterios C1-C5 están a favor de la alternativa *a*, no hay criterios donde las alternativas se consideran indiferentes y los criterios C6-C8 están intensamente en contra de la alternativa *a*.

En la tabla 5.5 se muestran los valores de la función de membresía de los conjuntos difusos $C_{FAVOR}(a,b)$, $C_{CONTRA}(a,b)$, $C_{FAVOR\_INT}(a,b)$ y $C_{CONTRA\_INT}(a,b)$ y los pesos w de cada criterio así como el valor de los índices de fuerza necesarios en la pregunta 1.

Tabla 5.5 – Cálculo de $J^{+}(a,b)$, $J^{-}(a,b)$, $J^{+}_{INT}(a,b)$ y $J^{-}_{INT}(a,b)$ *para la pregunta 1*

	Evaluación de Criterios							
Alternativa:	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**
a	90	90	90	90	90	75	75	75
b	80	80	80	80	80	100	100	100
$\mu_j(C_{FAVOR}(a,b))$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0	0.0
$\mu_j(C_{CONTRA}(a,b))$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.0	1.0	1.0
$\mu_j(C_{FAVOR\_INT}(a,b))$	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$\mu_j(C_{CONTRA\_INT}(a,b))$	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0
w	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
$J^{+}(a,b)$	0.5							
$J^{-}(a,b)$	0.3							
$J^{+}_{INT}(a,b)$	0.0							
$J^{-}_{INT}(a,b)$	0.3							

Como puede observarse en la tabla 5.5, se cumple la condición de que $J^{+}(a,b) > J^{-}(a,b)$ y $J^{-}_{int}(a,b) > J^{+}_{int}(a,b)$.

Finalmente la pregunta 1 queda estructurada de la siguiente forma:

Pregunta 1:

Alternativa:	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7	C8
a	90	90	90	90	90	75	75	75
b	80	80	80	80	80	100	100	100

Fuerza de criterios a favor de *a:* **50%**
Fuerza de criterios indiferentes*:* **0%**
Fuerza de criterios en contra de *a:* **30%**
Fuerza de criterios intensamente a favor de *a:* **0%**
Fuerza de criterios intensamente en contra de *a:* **30%**

¿Qué tan cierto considera usted que la alternativa *a* es mejor que la alternativa *b*?

a) Cierto
b) Casi cierto.
c) Más cierto que falso.
d) Ni cierto ni falso.
e) Más falso que cierto.
f) Casi falso.
g) Falso.

Fig. 5.1- Pregunta 1 resultante

Con esto se tiene la primera pregunta del cuestionario. Este procedimiento se debe realizar para generar cada una de las preguntas de la tabla 5.2. Ya que se tenga completo el cuestionario se puede proceder con el paso IV.

IV. Aplicar el cuestionario al decisor. De los resultados, obtener los datos de entrada y salida necesarios para obtener el parámetro *p* siguiendo el procedimiento de la sección 4.7.3.5 hasta obtener una tabla con la misma estructura de la tabla 4.12.

V. De la tabla obtenida al final del paso IV, vaciar la información en el software AOTOOL y obtener el valor del parámetro *p* que mejor represente a los datos resultantes del experimento.

Con este procedimiento práctico se obtienen los valores de los parámetros de comparación y de los operadores de agregación que mejor representan al decisor. Ha de notarse que no es un procedimiento sencillo. La tarea de elaborar este procedimiento recae en el analista, mientras que la tarea del decisor debe ser exclusivamente la de contestar el cuestionario generado de este procedimiento. Debe reconocerse que esta tarea le puede provocar ciertas dificultades para responder y/o comprender lo que se le pide, además del consumo de tiempo que pudiera requerirse.

5.3 Aplicación ilustrativa del procedimiento a un decisor real

A continuación se muestra el resultado de aplicar el procedimiento descrito en la sección 5.2 a un decisor real.

Ejercicio 5.1:

Suponga que se quiere resolver un problema de decisión que tiene la siguiente información inicial:

Tabla 5.6 – Criterios para el ejercicio 5.1

Criterios	**C1**	**C2**	**C3**	**C4**	**C5**	**C6**	**C7**	**C8**	**C9**	**C10**
Escala	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10	0-10
Tipo	Ascend	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.	Ascend.
Peso (*w*)	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1
Umbral *s*	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20
Umbral *p*	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
Umbral *q*	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5

Aplique el procedimiento descrito en la sección 5.2 para obtener:

a) Parametros de comparación:

   (α) –> "parecido"

   (β) –> "algo mayor que",

   (γ) –> "mayor que",

   (δ) –> "claramente mayor que".

b) Parámetro λ para el operador de agregación del nivel de abstracción 1.

c) Parámetro p^* para el operador de agregación del nivel de abstracción 2.

Solución:

a) Se aplicó el experimento 2 de la sección 4.7.2.1 y se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5.7 – Valores resultantes para los parámetros de comparación del ejercicio 5.1

	Valor medio
$0.010 < \alpha \leq 0.050$	0.030
$0.070 < \beta \leq 0.100$	0.085
$0.150 < \gamma \leq 0.200$	0.175
$0.250 < \delta \leq 0.400$	0.325

b) Se aplicó el experimento 4 de la sección 4.7.3.3 y se obtuvieron los siguientes resultados:

Tabla 5.8 – Respuestas dadas por el decisor para el inciso b) del ejercicio 5.1

	Valores de entrada		Valor de salida (Respuesta dada por decisor ante los valores de entrada)
Candidato	**Evaluación de preferencia original del candidato Escala: 0-100%**	**Probabilidad de NO rechazo del órgano en la etapa de recuperación. Escala: 0-100%**	**Evaluación final de preferencia del candidato Escala: 0-100%**
1	100	100	100
2	75	100	75
3	65	100	65
4	50	100	50
5	25	100	25
6	0	100	0
7	100	90	90
8	75	90	70
9	65	90	60
10	50	90	45
11	25	90	25
12	0	90	0
13	100	75	70
14	75	75	65
15	65	75	60
16	50	75	45
17	25	75	20
18	0	75	0
19	100	50	50
20	90	50	45
21	65	50	40

22	50	50	40
23	25	50	15
24	0	50	0
25	100	25	25
26	75	25	20
27	65	25	17.5
28	50	25	15
29	25	25	10
30	0	25	0
31	100	0	0
32	75	0	0
33	65	0	0
34	50	0	0
35	25	0	0
36	0	0	0

Los valores de entrada y salida se copian al software AOTOOL en la pestaña “Empirical data”:

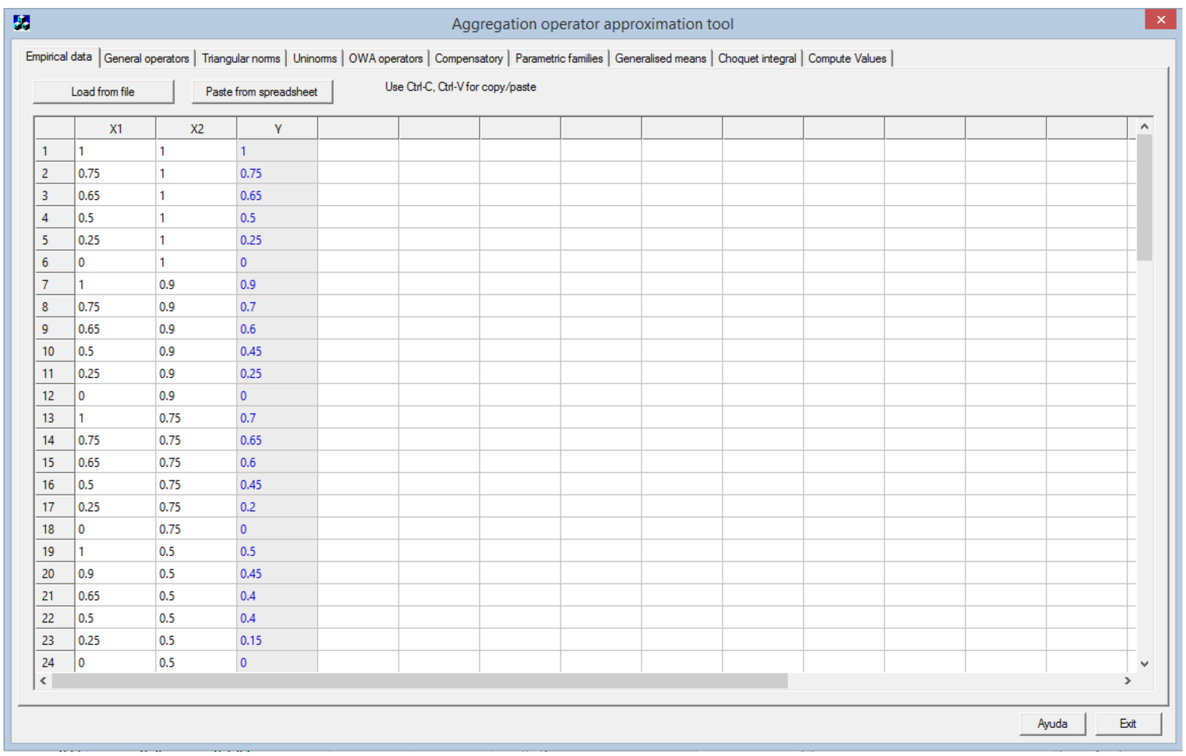


Fig. 5.2.- Pantalla del software AOTOOL que muestra los datos de entrada

Se pulsa en la pestaña “Parametric families” y se selecciona la familia “Schweizer and Sklar”. Se selecciona la opción “t-norm”. Se pulsa el botón “calculate” y se obtienen los siguientes resultados:

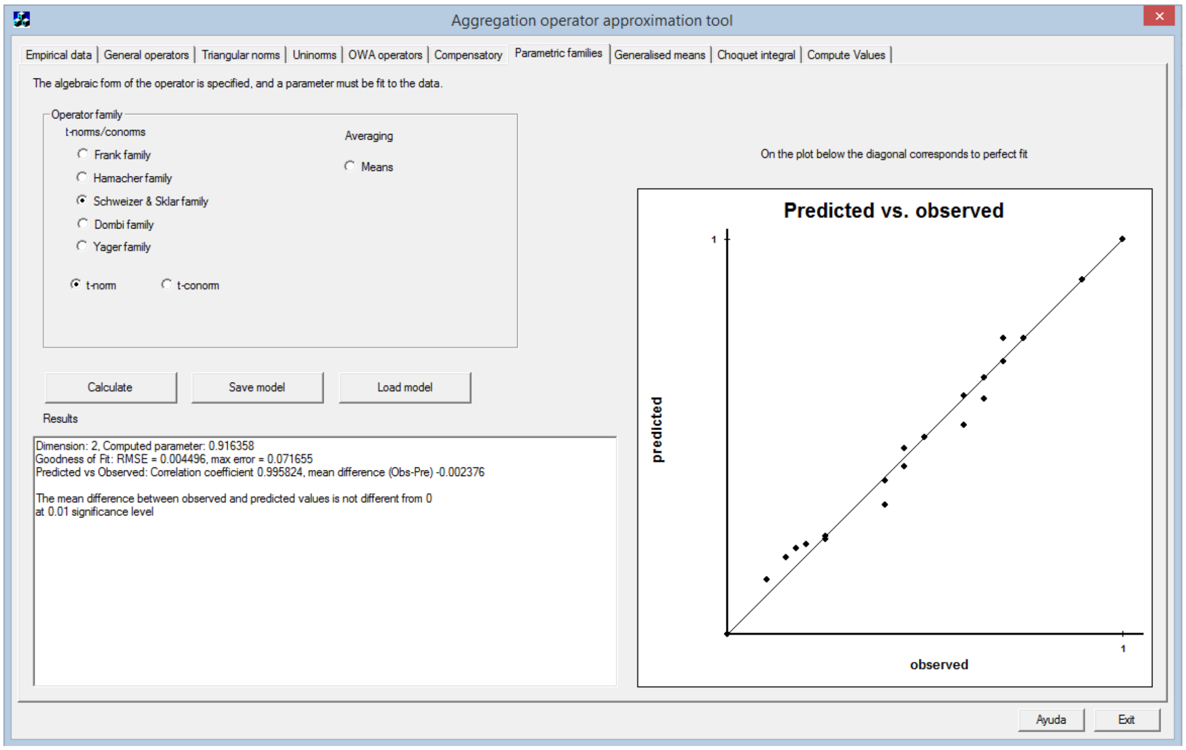
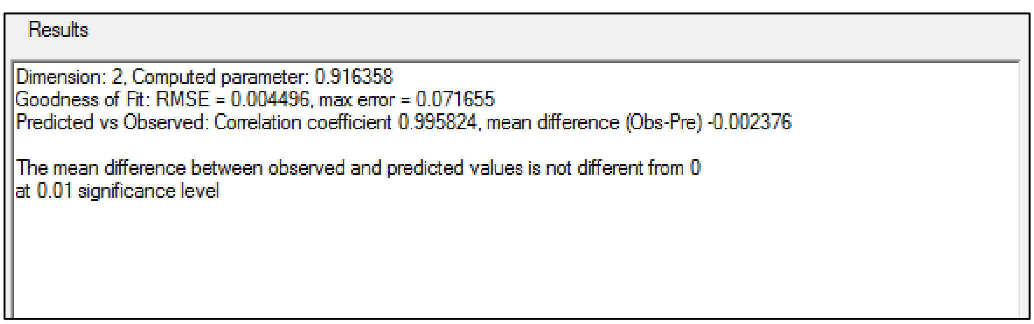


Fig. 5.3: Pantalla del software AOTOOL que muestra el ajuste del operador de agregación para obtener el parámetro λ

El valor “computed parameter” λ = 0.916358 es el que mejor se ajusta a los datos con un coeficiente de correlación de 0.995824.


Results

Dimension: 2, Computed parameter: 0.916358
Goodness of Fit: RMSE = 0.004496, max error = 0.071655
Predicted vs Observed: Correlation coefficient 0.995824, mean difference (Obs-Pre) -0.002376

The mean difference between observed and predicted values is not different from 0
at 0.01 significance level

Fig. 5.4: Pantalla del software AOTOOL que muestra los resultados para el parámetro λ

c) Se aplicó el procedimiento de la sección 5.3 y se obtuvieron las siguientes tablas de resultados:

Los resultados obtenidos por decisor en el experimento 3 donde se obtienen los valores para las etiquetas lingüísticas fueron los siguientes:

Tabla 5.9.- Resultados en el experimento 3 del decisor

Etiqueta	**Rango**	**Valor medio**
"Cierto"	1.00 – 1.00	1.00
"Casi cierto"	0.95 – 0.85	0.900
"Más cierto que falso"	0.75 – 0.55	0.650
"Ni cierto ni falso"	0.50 – 0.50	0.500
"Más falso que cierto"	0.45 – 0.30	0.375
"Casi falso"	0.25 – 0.05	0.150
"Falso"	0.00 – 0.00	0.000

En la siguiente tabla se muestra en resumen la estructura con la que se formaron las preguntas basadas en el experimento 1. Se muestran los índices de fuerza propuestos así como lo que se evalúa en cada pregunta:

Tabla 5.10.- Resumen de las preguntas de interés del experimento 1

Preg	**Índices de fuerza**					**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**		
	J^+	$J^=$	J^-	J^+_{INT}	J^-_{INT}	**A favor**	**Y**	**No en contra**
P-1	0.6	0.0	0.4	0.1	0.4	$J^+ > J^-$	$\wedge$	$\neg(J^-_{INT} > J^+_{INT})$
P-2	0.5	0.4	0.1	0.0	0.0	$J^+ > J^-$	$\wedge$	$\neg(J^=$ es muy fuerte)
P-3	0.7	0.0	0.3	0.0	0.3	$J^+ >> J^-$	$\wedge$	$\neg(J^-_{INT} >> J^+_{INT})$
P-4	0.4	0.1	0.5	0.3	0.1	$J^+_{INT} > J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^- > J^+)$
P-5	0.3	0.4	0.3	0.2	0.1	$J^+_{INT} > J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^=$ es muy fuerte)
P-6	0.3	0.0	0.7	0.3	0.0	$J^+_{INT} >> J^-_{INT}$	$\wedge$	$\neg(J^- >> J^+)$

Si se sustituyen los índices de fuerza por sus correspondientes valores numéricos y los predicados de comparación con su respectiva función de comparación en las columnas "A favor y "No en contra" de la tabla 5.10 se obtiene la siguiente tabla:

Tabla 5.11.- Resumen con las funciones de comparación resultantes en las columnas "A favor" y "No en contra" de las preguntas de interés del experimento 1

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**		
	A favor	**Y**	**No en contra**
P-1	$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.4, 0.1)]
P-2	$\mu_{>}$ (0.5, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.4)]
P-3	$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)]
P-4	$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.5, 0.4)]
P-5	$\mu_{>}$ (0.2, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.4)]
P-6	$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)]

El paso siguiente es colocar las respuestas que dio el decisor en cada pregunta para formar la siguiente tabla:

Tabla 5.12.- Respuestas del decisor en el experimento 1

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**			**Respuesta**
	A favor	**Y**	**No en contra**	
P-1	$\mu_{>}$ (0.6, 0.4)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.4, 0.1)]	Falso
P-2	$\mu_{>}$ (0.5, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.4)]	Más falso que cierto
P-3	$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)]	Más falso que cierto
P-4	$\mu_{>}$ (0.3, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>}$ (0.5, 0.4)]	Ni cierto ni falso
P-5	$\mu_{>}$ (0.2, 0.1)	$\wedge$	$\neg$[μ_{SIGNIF} (0.4)]	Más falso que cierto
P-6	$\mu_{>>}$ (0.3, 0.0)	$\wedge$	$\neg$[$\mu_{>>}$ (0.7, 0.3)]	Falso

Al calcular las funciones de comparación con los parámetros de la tabla 5.7 de acuerdo a la sección 4.4 y utilizando los valores promedio de la tabla 5.9, se obtiene la siguiente tabla con los datos de entrada y salida para el software AOTOOL:

Tabla 5.13.- Datos de entrada y salida resultantes del experimento1 aplicado al decisor

Preg	**Se quiere evaluar: (preferencia estricta)**			**Respuesta**
	A favor	**Y**	**No en contra**	
P-1	1.000	$\wedge$	0.000	0.000
P-2	1.000	$\wedge$	0.200	0.375
P-3	1.000	$\wedge$	0.333	0.375
P-4	1.000	$\wedge$	0.517	0.500
P-5	0.483	$\wedge$	0.200	0.375
P-6	0.667	$\wedge$	0.000	0.000

De manera similar, con los datos de la tabla 5.13 y con el software AOTOOL, se calcula el parámetro p^* dando como resultado p^*=-2.93 con un coeficiente de correlación de 0.92.

5.4 Inferencia de parámetros necesarios en el modelo formulado como un problema de optimización multiobjetivo evolutivo

Como ya se ha mencionado anteriormente, el modelo propuesto en el capítulo 4 requiere como información inicial los parámetros de pesos y umbrales de preferencia de cada criterio obtenidos del decisor (ver sección 4.1). Hasta este punto, en este trabajo no se ha planteado ningún procedimiento para licitar esa información, pero debe quedar claro que debe existir alguno cuya aplicación permita obtenerla, ya que es información inicial necesaria para el modelo propuesto y el procedimiento propuesto en la sección 5.2 no permite obtenerlos. A este procedimiento hay que agregarle otro más para poder utilizar el modelo propuesto: el procedimiento para obtener los parámetros de comparación y los parámetros de las funciones de agregación descrito en la sección 5.2.

Ha de notarse que el aplicar estos dos procedimientos al decisor le puede provocar ciertas dificultades para responder y/o comprender lo que se le pide, además del consumo de tiempo que pudiera requerirse.

En (Fernández, et. al., 2012), se menciona que esta información inicial se obtiene mediante procedimientos de licitación directa o indirecta. En el primer caso, el decisor debe especificar los valores de los parámetros preferenciales en un proceso interactivo con la ayuda de un analista (Doumpos, et al., 2009). Generalmente, el decisor presenta dificultades al pedírsele que asigne valores a parámetros cuyo significado no le sea tan claro como el analista pudiera pensar. Por otro lado, los procedimientos de licitación indirecta, los cuales componen los denominados análisis de desagregación de preferencias (PDA, por sus siglas en inglés), utilizan métodos para inferir un conjunto de parámetros a partir de una batería de ejemplos de decisión (Doumpos, et al., 2009). Tales ejemplos pueden ser proporcionados por:

a) Decisiones previas hechas por el decisor;
b) Decisiones sobre un conjunto limitado de acciones ficticias en el cual el decisor puede expresar fácilmente juicios preferenciales (política de decisión);
c) Decisiones sobre un subconjunto de acciones bajo consideración, en las cuales el decisor se sienta cómodo expresando una política de decisión.

De acuerdo a (Greco, et al., 2008), los procedimientos basados en desagregación de preferencias están teniendo un creciente interés porque implican relativamente menos esfuerzo cognitivo por parte del decisor. En (Fernández, et. al., 2012), se propone un método de licitación indirecta del conjunto de parámetros necesarios en el modelo ELECTRE III con preferencias reforzadas y contraveto, propuesto en (Roy y Slowinski, 2008). El método propuesto por Fernández, et. al. (2012), tiene un enfoque de optimización multiobjetivo resuelto con algoritmos evolutivos. En su trabajo, Fernández et al. muestran una buena cantidad de evidencia experimental, además, el método propuesto tiene buenos resultados incluso con conjuntos de referencia con cardinalidad pequeña. Otro punto interesante de su trabajo es que exploran la manera de obtener información preferencial del decisor de una manera operacional.

Debido a que el modelo propuesto en el capítulo 4 tiene una cantidad y naturaleza de parámetros parecidos al modelo propuesto por Roy y Slowinski, además de los buenos resultados mostrados en el trabajo de Fernández et al. (2012), en esta sección se plantea la inferencia del conjunto completo de parámetros necesarios para el modelo (pesos, umbrales de preferencia, parámetros de comparación y parámetros de los operadores de agregación) como un problema de optimización multiobjetivo que pueda ser resuelto por un enfoque evolutivo, como el mostrado en (Fernández, et. al., 2012). Este último paso no se aplica en este trabajo, quedando como trabajo futuro.

A continuación se hace el planteamiento de la inferencia de parámetros como un problema de optimización multiobjetivo basado en el trabajo de Fernández et al. (2012).

5.4.1 Suposiciones y definiciones adicionales

Sea una familia consistente de criterios $J=\{g_1,\ldots, g_n\}$ definida sobre un conjunto de decisión A. Sean $\succ$ y $\backsim$ relaciones de preferencia definidas sobre un subconjunto de $A\times A$ de tal manera que $x\succ y$ significa que el decisor confía suficientemente en la afirmación "hay al menos cierta preferencia de x sobre y" y que $x\backsim y$ significa que el decisor confía suficientemente en la afirmación "x es indiferente con y".

Suposición 1: El decisor puede proveer un conjunto de referencia $T \subset A\times A$ compuesto de pares de alternativas (a, b) que satisfagan la siguiente propiedad: Para cada par $(a, b) \in T$, una y sólo una de las cuatro declaraciones es verdadera:

i) $a \succ b$
ii) $a \backsim b$
iii) $b \succ a$
iv) ninguna de las anteriores

Sean $\sigma_P(x,y)$ y $\sigma_I(x,y)$ dos relaciones de preferencia difusas definidas sobre A. $\sigma_P(x,y)$ se puede interpretar como el grado de credibilidad de la afirmación "x es mejor que y" y $\sigma_I(x,y)$ se puede interpretar como el grado de credibilidad de la afirmación "x es indiferente con y". σ_P se calcula con la ecuación (4.22) y σ_I se calcula con la ecuación (4.28). Nos interesa considerar cómo las imágenes de σ_P y σ_I dependen de un arreglo específico de los parámetros del modelo (pesos, umbrales de preferencia, parámetros de comparación y parámetros de operadores de agregación). Denotemos como M el conjunto de parámetros a inferir del modelo. Entonces el cálculo del grado de credibilidad de "x es mejor que y" y de "x es indiferente con y" son funciones $\sigma_P(x, y, M)$ y $\sigma_I(x, y, M)$ respectivamente.

Suposición 2: El decisor tiene información adicional acerca de la importancia de criterios, simetría, asimetría y rangos aceptables para los parámetros. Usando dicha información, el decisor es capaz de realizar juicios preferenciales sobre diferentes arreglos de parámetros.

Ahora, denotemos como *M** a un arreglo específico de parámetros del modelo. Consideremos un valor real $\lambda \geq 0.5$ y las siguientes relaciones "nítidas" (no borrosas, de la palabra inglesa "crisp") binarias sobre T:

$(x, y) \in P_{(\lambda)}$ iff $\sigma_P(x, y, M^*) \geq \lambda$ (λ-preferencia)

$(x, y) \in I_{(\lambda)}$ iff $\sigma_I(x, y, M^*) \geq \lambda$ (λ-indiferencia)

$(x, y) \in R_{(\lambda)}$ iff $\sigma_P(x, y, M^*) < \lambda \wedge \sigma_P(y, x, M^*) < \lambda \wedge \sigma_I(y, x, M^*) < \lambda$ (λ-incomparabilidad)

5.4.2 Inferencia de parámetros utilizando una medida de error multicriterio

Un modelo de políticas de decisión de preferencias perfectamente consistente se refleja a través de las siguientes implicaciones lógicas:

$\forall (x, y) \in T$

$$\sigma_P(x, y, M^*) \geq \lambda \Leftrightarrow x \succ y \tag{5.1}$$

$$\sigma_I(x, y, M^*) \geq \lambda \Leftrightarrow x \backsim y \tag{5.2}$$

Utilizando las λ-relaciones de la sección anterior, las ecuaciones 5.1 y 5.2 se pueden transformar en:

$\forall (x, y) \in T$

$$xP_{(\lambda)}\, y \Leftrightarrow x \succ y \tag{5.3}$$

$$xI_{(\lambda)}\, y \Leftrightarrow x \backsim y \tag{5.4}$$

$$xR_{(\lambda)}\, y \Leftrightarrow no\ x \succ y \wedge no\ y \succ x \wedge no\ x \backsim y \tag{5.5}$$

Las condiciones

1) $(x, y) \in P_{(\lambda)}$ con *no* $x \succ y$
2) $(x, y) \notin P_{(\lambda)}$ con $x \succ y$
3) $(x, y) \in I_{(\lambda)}$ con *no* $x \backsim y$
4) $(x, y) \notin I_{(\lambda)}$ con $x \backsim y$
5) $(x, y) \in R_{(\lambda)}$ con $x \succ y \vee y \succ x \vee x \backsim y$
6) $(x, y) \notin R_{(\lambda)}$ con *no* $x \succ y \wedge$ *no* $y \succ x \wedge$ *no* $x \backsim y$

se identifican como inconsistencias con $P_{(\lambda)}$, $I_{(\lambda)}$ y $R_{(\lambda)}$ respectivamente. Tales discrepancias se pueden interpretar como errores o desviaciones de $\sigma_P(x, y, M^*)$ y $\sigma_I(x, y, M^*)$ de un buen modelo que calcule el grado de verdad de los predicados "*x* es mejor que *y*" y "*x es igual* de bueno que *y*" respectivamente. Tales inconsistencias se pueden dar debido a asignaciones inadecuadas de algunos parámetros del modelo.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$D_{P1}= \{(x, y) \in P_{(\lambda)}$ con *no* $x \succ y\}$

$D_{P2}=\{(x, y) \notin P_{(\lambda)}$ con $x \succ y\}$

$D_{I1}=\{(x, y) \in I_{(\lambda)}$ con *no* $x \backsim y\}$

$D_{I2}=\{(x, y) \notin I_{(\lambda)}$ con $x \backsim y\}$

$D_{R1}=\{(x, y) \in R_{(\lambda)}$ con $x \succ y \vee y \succ x \vee x \backsim y\}$

$D_{R2}=\{(x, y) \notin R_{(\lambda)}$ con *no* $x \succ y \wedge$ *no* $y \succ x \wedge$ *no* $x \backsim y\}$

Las variables n_{P1}, n_{P2}, n_{I1}, n_{I2}, n_{R1} y n_{R2} denotan las respectivas cardinalidades de los conjuntos mencionados anteriormente. Obviamente, estos valores dependen de *M*.

Los parámetros del modelo deben ser inferidos de la mejor solución compromiso del siguiente problema de optimización multiobjetivo:

$$\mathit{Minimizar}\ (n_{P1}, n_{P2}, n_{I1}, n_{I2}, n_{R1}, n_{R2}) \qquad (5.6)$$

$$M \in R_F$$

Donde R_F es una región factible dentro del espacio de parámetros. Esta región está determinada por restricciones que el decisor impone sobre los parámetros del modelo (suposición 2). Las medidas de inconsistencias n_{P1} y n_{P2} tienen la misma importancia, por lo tanto pueden ser unidas como un solo objetivo $n_P = n_{P1} + n_{P2}$. Lo mismo sucede con las medidas de error n_{I1} y n_{I2} así como n_{R1} y n_{R2}, uniéndose en objetivos simples $n_I = n_{I1} + n_{I2}$ y $n_R = n_{R1} + n_{R2}$ respectivamente, quedando el problema definido en (5.6) de la siguiente manera:

$$\mathit{Minimizar}\ (n_P, n_I, n_R) \qquad (5.7)$$

$$M \in R_F$$

Denotando $(n_P, n_I, n_R)^*$ como la mejor solución compromiso del problema descrito en (5.7) en el espacio de objetivos.

La complejidad para resolver el problema planteado en (5.7) sugiere la aplicación de algoritmos evolutivos. Estos algoritmos son particularmente convenientes para resolver problemas de optimización multiobjetivo porque logran aproximaciones a la frontera de Pareto en una primera corrida (Coello, et al., 2007).

Para terminar esta sección, se enumeran los parámetros necesarios que se necesitan inferir aplicando la optimización multiobjetivo evolutiva:

i) El vector de pesos (w)
ii) El vector de umbrales de indiferencia (q)
iii) El vector de umbrales de preferencia (p)
iv) El vector de umbrales de preferencia pre-intensa (s)
v) El vector de umbrales de preferencia intensa (r)
vi) El vector de umbrales de veto (v)
vii) El vector de umbrales de dictadura (d)
viii) El parámetro α para la función de comparación “parecido a”
ix) El parámetro β para la función de comparación “mayor que”
x) El parámetro γ para la función de comparación “pre-claramente mayor que”
xi) El parámetro δ para la función de comparación “claramente mayor que”
xii) El parámetro ε para la función de comparación “parte pre-significativa del total”

xiii) El parámetro ζ para la función de comparación "parte significativa del total"

xiv) El parámetro λ' para la función de agregación paramétrica Schweizer – Sklar;

xv) El parámetro p' para la función de agregación paramétrica media cuasi lineal general

xvi) El nivel de corte λ

Queda como trabajo futuro resolver el problema 5.7 bajo un enfoque evolutivo. En (Fernández, et. al., 2012) se resuelve un problema muy similar al planteado en esta sección.

6 Conclusiones y trabajo futuro

6.1 Análisis del cumplimiento de objetivos y de las respuestas a las preguntas de investigación

En este trabajo se presentó un procedimiento para calcular el grado de credibilidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas. Este procedimiento está basado en la validación de argumentos los cuales se plantean a partir de la definición planteada por Roy (1996) donde afirma que para que se pueda establecer una relación de preferencia básica deben existir razones claras y positivas de que se presenten ciertas condiciones.

Los argumentos propuestos inicialmente se obtuvieron haciendo ingeniería del conocimiento a expertos, donde se les cuestionó sobre cuáles deberían ser esas claras y positivas razones tomando en cuenta la manera en la que un decisor real lo analizaría.

Con base en la manera intuitiva en la que un decisor forma conjuntos de criterios para después comparar entre sí la cardinalidad de cada uno de ellos, los argumentos propuestos toman en cuenta diferentes escenarios donde se analiza lo siguiente:

- La fuerza de la coalición de criterios a favor de cada alternativa
- La fuerza de la coalición de criterios intensamente a favor de cada alternativa
- La fuerza de la coalición de criterios en contra de cada alternativa
- La fuerza de la coalición de criterios intensamente en contra de cada alternativa
- La fuerza de la coalición de criterios indiferentes entre alternativas
- La fuerza de criterios con capacidad de veto
- La fuerza de criterios con capacidad de dictadura

Los argumentos propuestos son predicados compuestos de comparaciones entre las fuerzas de las coaliciones de criterios mencionados anteriormente. Estos argumentos reflejan el sentido común de un decisor cuando éste establece o asigna el grado de verdad de las relaciones de preferencia entre cualquier par de objetos.

Con el fin de formalizar y validar los argumentos propuestos, se utilizó la teoría de la argumentación, mediante la cual se estructuraron los argumentos como esquemas de argumentación.

Para validar los esquemas de argumentación, se diseñaron y aplicaron experimentos cuyo objetivo fue obtener evidencia empírica, la cual sirvió como información que respalda las premisas contenidas en los esquemas de argumentación, y a su vez, para respaldar la estructura de los mismos.

Con los esquemas de argumentos ya validados, se desarrolló un modelo matemático basado en lógica difusa. Las ecuaciones matemáticas de este modelo se derivan de la información contenida en los esquemas de argumentación.

En el modelo propuesto, el primer paso es calcular la fuerza de cada una de las coaliciones de criterios. En el segundo paso, a partir de esa información, se calcula el grado de credibilidad de la existencia de cada una de las relaciones de preferencia básicas.

Ahora bien, el modelo obtenido depende de una gran cantidad de parámetros cuyos valores representan de manera subjetiva las preferencias del decisor. Para este punto, se desarrolló un experimento para obtener de manera empírica un rango de valores de referencia para los parámetros del modelo. Estos rangos de valores se obtuvieron de la aplicación de un cuestionario a un grupo de estudiantes, de tal manera que los rangos obtenidos son valores promedio que representan a dicho conjunto. Estos rangos de valores pueden servir como referencia para el decisor, de tal manera que los valores medios de cada rango se puedan utilizar como valores aceptables para los parámetros.

Para el caso en el que el decisor o analista no acepte o no crea conveniente utilizar esos valores medios recomendados, también se desarrolló y aplicó un procedimiento para obtener de manera indirecta estos parámetros. Este procedimiento se aplicó a decisores reales, obteniendo buenos resultados.

Sin embargo, en la práctica, se observó que este procedimiento tiene la desventaja de necesitar tiempo y esfuerzo cognitivo de cierta consideración, esto sin tomar en cuenta que también es necesario obtener del decisor, ya sea por un método directo o indirecto, los valores para los pesos y umbrales de preferencia de cada criterio, también necesarios en el modelo. Esto conlleva a que, para que el modelo propuesto tenga resultados afines al decisor, sea necesario aplicarle estos dos procedimientos para obtener los valores de los parámetros que se necesitan, aumentando el tiempo requerido y el esfuerzo cognitivo.

Tomando en consideración lo anterior, se hizo una pequeña extensión en el capítulo 6 donde se plantea la obtención indirecta de los parámetros totales del modelo como un problema de optimización multiobjetivo, el cual puede resolverse con algoritmos evolutivos. Con este procedimiento, no incluido en este trabajo más allá de un planteamiento formal, se puede reducir de manera significativa el esfuerzo cognitivo por parte del decisor, ya que se le pide cierta información inicial mucho más sencilla, como pueden ser ejemplos de casos de decisión.

Por último, se hicieron pruebas con diferentes escenarios donde se obtuvieron buenos resultados. En síntesis, el objetivo general así como los objetivos específicos planteados inicialmente se alcanzaron de manera satisfactoria.

A continuación se da respuesta a las preguntas de investigación planteadas inicialmente.

1.- ¿Cómo calcular el grado de credibilidad de la existencia de las relaciones de preferencia básicas de una manera lógica basado en argumentos y lógica difusa que expresen la manera en que un DM real realiza esa tarea?

Lo que se busca es definir una serie de argumentos cuyas premisas reflejen la evaluación de la existencia de las relaciones de preferencia básicas. De esta serie de argumentos se deriva un modelo matemático que permite evaluar el grado de verdad de la existencia de esas relaciones. Dicho esto, para obtener este cálculo se realizan los siguientes pasos:

I. Definir los argumentos:

Los argumentos se definen a partir de la forma intuitiva en la que un decisor real evalúa la existencia de las relaciones de preferencia básicas. La definición de los argumentos se realizó con el apoyo de la ingeniería del conocimiento y en conceptos de la teoría de la ayuda a la decisión, específicamente, la estructura de relaciones de preferencia básicas hechas por Roy en (Roy, 1996). La manera intuitiva en la que un decisor evalúa la existencia de las relaciones de preferencia es formando coaliciones de criterios que considera importantes. Después, compara entre sí la fuerza (cardinalidad en este caso) de las mismas. Bajo esta idea, los argumentos propuestos son predicados compuestos de comparaciones entre la fuerza de las coaliciones de criterios de interés. Estos predicados deben reflejar situaciones claras y positivas de que se presente una relación de preferencia básica determinada. En la sección 3.2 se definen los argumentos.

II. Dar coherencia a los argumentos propuestos:

Con el uso de la teoría de la argumentación, se da formalidad y coherencia a los argumentos, mediante la estructuración de los mismos como esquemas de argumentación. Estos esquemas son la base para la determinación de las ecuaciones del modelo matemático propuesto. En la sección 3.3 se describen los esquemas de argumentación.

III. Validar los esquemas de argumentación:

Para que las ecuaciones del modelo tengan sentido, se deben validar primero los esquemas de argumentación. Para lograr esto, se diseñan experimentos cuyo objetivo sea obtener evidencia empírica que respalde las premisas contenidas en los esquemas de argumentación, y a su vez, sirva para respaldar la estructura de los mismos. En la sección 3.4 se describe este procedimiento de validación.

IV. <u>Establecer las ecuaciones que permiten calcular los índices de credibilidad de las relaciones de preferencia básicas:</u>

La determinación de estas ecuaciones se hace a partir de los esquemas de argumentación. En este punto se realizan los siguientes pasos:

a) Definir conjuntos difusos para las coaliciones de criterios:

La información de entrada o datos de los esquemas de argumentación son la fuerza de cada coalición de criterios de interés. Por lo tanto, primero se definen conjuntos difusos para para cada una de estas coaliciones. Las funciones de pertenencia de estos conjuntos difusos dependen de valores llamados umbrales de preferencia, los cuales representan las preferencias del decisor. Estos conjuntos difusos se definen en la sección 4.2.

b) Calcular los índices de fuerza:

Las premisas contenidas en los esquemas de argumentación consisten de comparaciones entre la fuerza de las coaliciones de criterios. Por lo tanto, se debe representar matemáticamente la fuerza de cada una de esas coaliciones. Con las funciones de pertenencia de cada conjunto difuso y con los valores de los pesos de cada criterio se calcula el índice de fuerza de cada coalición. La definición de estos índices se hace en la sección 4.3.

c) Establecer funciones de comparación entre índices de fuerza:

Como las premisas contenidas en los esquemas de argumentación están formadas de comparaciones entre índices de fuerza, se deben definir también funciones que representen las comparaciones en cuestión. Estas funciones de comparación dependen de parámetros que representan de manera subjetiva las preferencias del decisor. En la sección 4.4 se describen estas funciones.

d) Establecer ecuaciones para calcular los índices de credibilidad:

De la información contenida en los esquemas de argumentación, se construyen las ecuaciones necesarias para calculas los índices de credibilidad para cada una de las relaciones de preferencia básicas. Estas ecuaciones dependen de los índices de fuerza, de las funciones de comparación y de funciones de agregación que representan a los operadores lógicos difusos de conjunción, disyunción y negación.

2.- ***¿Existe un conjunto de operadores lógicos difusos (conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$) y negación ($\neg$)) que representen de manera general la forma en la que los DM reales los perciben en problemas de decisión? ¿Qué características deben cumplir?***

Para contestar esto, la idea principal consistió en encontrar un operador de agregación que modele a la conjunción ($\wedge$). Este operador debe cumplir con la propiedad de dualidad (Fodor y Roubens, 1994), de tal manera que, con el operador de negación fuerte $\neg(x) = 1 - x$, la disyunción ($\vee$) se obtenga como el dual del operador de conjunción: $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y) = 1-[(1-x) \wedge (1-y)]$.

Al hacer una reflexión sobre los argumentos definidos en la sección 3.3, se propuso que era necesario considerar un operador de agregación para calcular los índices de credibilidad $\sigma(a\mathrm{P}b)$ (ec. 4.22), $\sigma(a\mathrm{I}b)$ (ec.4.28), $\sigma(a\mathrm{Q}b)$ (ec.4.33), $\sigma(aRb)$ (ec.4.34) y $\sigma(a\mathrm{S}b)$ (ec.4.35) y otro operador de agregación para calcular $\mu(a\mathrm{P}_x b)$ (ecs. 4.23 - 4.27) y $\mu(a\mathrm{I}_x b)$ (ecs. 4.29 – 4.32), ya que en cada uno el DM podría tomar una actitud distinta debido al contexto. Estas formas de razonar pueden ser las siguientes:

En el cálculo de los índices de credibilidad $\sigma(a\mathrm{X}b)$ del capítulo 4 interviene el índice de veto. Por el mismo significado restrictivo de este índice, el DM no debería aceptar algún tipo de compensación en los valores de salida ante ciertos valores de entrada. Debido a esto, es posible que el decisor se comporte de la siguiente manera (a este contexto lo llamamos **Nivel de abstracción 1**):

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores muy bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.
- Antes valores dispares en las entradas, no se permite ningún grado de compensación en el valor de salida.

Ahora bien, como en el cálculo de $\mu(aP_xb)$ y $\mu(aI_xb)$ definidos en el capítulo 4 no interviene el índice de veto, es posible que el decisor se comporte de la siguiente manera (a este contexto lo llamamos **Nivel de abstracción 2**):

- Valores bajos de las entradas debe dar como resultado valores bajos en la salida.
- Valores altos en las entradas debe dar como resultado valores altos en la salida.
- Antes valores dispares en las entradas, se permite cierto grado de compensación en el valor de salida.

En resumen, se propuso que era necesario un operador de agregación que represente a la conjunción en el nivel de abstracción 1 y otro operador de agregación diferente para el nivel de abstracción 2. Además, los operadores en cuestión deben cumplir con los puntos mencionados anteriormente.

Para verificar esto, en la sección 4.7 se muestran una serie de experimentos cuya finalidad era corroborar lo anteriormente expuesto. Del análisis de resultados de los mismos, se concluyó que, efectivamente, cuando existen condiciones de veto el decisor se comporta de la manera planteada en el nivel de abstracción 1.

Del análisis de distintas familias de operadores de agregación, y con la ayuda del software AOTOOL, se encontró que el operador de agregación adecuado para este nivel es la familia de operadores Schweizer – Sklar, que se calcula de la siguiente manera: $x \wedge \mathrm{y} = (\max(x^{\lambda} + y^{\lambda} - 1{,}0))^{1/\lambda}$ dónde: $-\infty < \lambda < +\infty,$ ya que el límite inferior para este operador es el producto drástico y el límite superior es el mínimo. Con esto, se tiene un rango excelente de valores que representen el comportamiento no compensatorio de cualquier decisor para el nivel 1.

En el experimento realizado para corroborar las características necesarias que debe cumplir el operador de agregación para el nivel de abstracción 2, se encontró que cuando no existen condiciones de veto a considerar, el decisor permite cierto grado de compensación, corroborándose lo propuesto para el nivel de abstracción 2. También con la ayuda del software AOTOOL, se encontró que la familia paramétrica de funciones medias cuasi lineales generalizadas, que se calcula $x \wedge \mathrm{y} = \frac{1}{n}\sum(x_n^p)^{1/p}$, donde: $-\infty < p < +\infty$, es un operador adecuado, ya que su límite inferior es el mínimo y su límite superior es el máximo. Con esto, se tiene un rango excelente de valores que representen el comportamiento compensatorio de cualquier decisor para el nivel 2.

De lo expuesto anteriormente, tenemos dos operadores de agregación diferentes que representan a la conjunción, donde cada uno cumple con las características requeridas según el nivel de abstracción donde se apliquen.

Para responder a la pregunta de si existe un operador u operadores de agregación que representen de manera general a los operadores lógicos difusos en el contexto de decisión, la respuesta podría considerarse afirmativa si existiera un valor para el parámetro λ para la familia de operadores Schweizer – Sklar y un valor p para la familia paramétrica de funciones medias cuasi lineales generalizadas que represente a la mayoría de los decisores. De los datos obtenidos en los experimentos en el capítulo 4, no se encontraron valores para los parámetros λ y p que representaran a la mayoría del conjunto de personas que intervinieron en el experimento, concluyéndose que no es posible considerar operadores de agregación que representen de manera general a todos los decisores, sino que cada decisor tiene que ser representado con valores de λ y p que reflejen su manera de realizar una conjunción.

6.2 Trabajo futuro

Desde el punto de vista práctico, tenemos lo siguiente:

1) Como se vio en este trabajo, es necesario obtener valores para los parámetros que el modelo necesita. Si bien se planteó un procedimiento práctico para obtener algunos de ellos, vemos que es necesario resolver el problema de optimización multicriterio planteado al final del capítulo 6 de tal manera que el proceso de obtención de los parámetros por parte del decisor no requiera mucho tiempo ni esfuerzo cognitivo.
2) Implementar a mano el modelo propuesto es un proceso complicado, si bien se desarrolló una hoja en MICROSOFT EXCEL que realiza los cálculos ante valores de entrada, lo correcto es desarrollar un software que implemente el modelo propuesto cuyos resultados se puedan utilizar como información de entrada para procedimientos de explotación en general.
3) Otro trabajo práctico e interesante a desarrollar es la de comparar resultados de procesos de explotación utilizando como proceso de construcción el modelo propuesto contra otros, por ejemplo, el utilizado en los métodos ELECTRE.

Desde el punto de vista metodológico tenemos lo siguiente:

La mayoría de procedimientos de explotación utilizan la matriz con índices de credibilidad de relaciones de no inferioridad con valores de $\sigma(a\mathrm{S}b)$. El modelo propuesto no sólo sirve para obtener esta matriz de valores, sino que también es posible obtener matrices independientes con valores de $\sigma(a\mathrm{P}b)$, $\sigma(a\mathrm{I}b)$, $\sigma(a\mathrm{Q}b)$ y $\sigma(a\mathrm{R}b)$ respectivamente. Es un trabajo interesante explorar nuevos métodos de explotación o modificación de métodos existentes que utilicen los valores de estas matrices resultantes al aplicar nuestro modelo.

El desarrollo de estos temas completaría el alcance de este trabajo y constituirían un aporte en modelación multicriterio. Como ocurre generalmente en la investigación científica, estos trabajos pueden ser de una envergadura similar o superior al trabajo aquí expuesto. Estamos conscientes de que solo hemos aportado un paso infinitesimal en el avance de la ciencia, y también creemos que es evidente que nuestro trabajo debe tener continuadores.

Referencias

ABGUEGUEN R., (1971) : La Sélection des Supports de Presse, *Robert Laffon*.

ALLAIS, M. (1979). The so-called Allais paradox and rational decisions under uncertainty. *In Expected utility hypotheses and the Allais paradox* (pp. 437-681). Springer Netherlands.

ALMEIDA, A. T., (2005): Multicriteria modelling of repair contract based on utility and ELECTRE I method with dependability and service quality criteria. *Annals of Operations Research*, 138(1), pp. 113-126.

ALSINA, C., TRILLAS, E., & VALVERDE, L. (1983). On some logical connectives for fuzzy sets theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 93(1), 15-26.

ARROW, K. J. (1963). Social choice and individual values (No. 12). Yale university press.

ATIENZA, M. (2005). Las razones del derecho: Teorías de la argumentación jurídica. UNAM.

BANA E COSTA C.A., Y VANSNICK J.C., (1994): MACBETH: An interactive path towards the construction of cardinal value function, *International Transactions on Operations Research* 1, pp. 489-500.

BARD H., DUPUY J., Y LENCIONI P., (1990): Multicriteria location of thermal power plants, *European Journal of Operational Research* 45, pp. 332-346.

BELIAKOV G., (2000a): Numerical Construction of Membership Functions and Aggregation Operators from Empirical Data, *Proceedings of FUSION 2000 Conf.*, Paris, pp. TuC4.

BELIAKOV G., (2000b): Approximation of aggregation operators using splines, *Proceedings of IPMU 2000 Conf.*, Madrid, pp. 680-685.

BELIAKOV G. AND WARREN J., (2001a): Appropriate choice of aggregation operators in fuzzy decision support systems, *IEEE Transactions On Fuzzy Systems*, 9, 773-784.

BELIAKOV G., (2001b): Fuzzy clustering of non-convex patterns using global optimization, *Proceedings of FUZZ-IEEE, Conf*. Melbourne.

BELIAKOV G., (2002a): Monotone approximation of aggregation operators using least squares splines, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems*, 10.

BELIAKOV G., (2002b): Approximation of membership functions and aggregation operators using splines, in *Technologies for constructing intelligent systems*, Springer, Berlin, pp. 159-172.

BELIAKOV G., (2002c): Three new techniques of approximating aggregation operators from empirical data, *Proceedings of IPMU2002 Conf., Annecy*, 2002, pp. 945-952.

BELIAKOV G., MESIAR R. AND VALASKOVA L., (2004): Fitting generated aggregation operators to empirical data, *Int. J. of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12, 219–236.

BELIAKOV G., PRADERA A., CALVO T., (2007): Aggregation functions: A guide for practitioners, Springer.

BELLMAN, R., & GIERTZ, M. (1973). On the analytic formalism of the theory of fuzzy sets. *Information Sciences*, 5, 149-156.

BELLMAN, R. E., & ZADEH, L. A. (1977). Local and fuzzy logics. *In Modern uses of multiple-valued logic* (pp. 103-165). Springer Netherlands.

BELTON, V., & STEWART, T. (2002). Multiple criteria decision analysis: an integrated approach. Springer Science & Business Media.

BENCH-CAPON, T., & DUNNE, D. (2005). Argumentation and dialogue in artificial intelligence. IJCAI 2005 tutorial notes.

BESNARD, P., & HUNTER, A. (2008). Elements of argumentation (Vol. 47). Cambridge: MIT press.

BONISSONE, P. P., & DECKER, K. S. (2013). Selecting uncertainty calculi and granularity: An experiment in trading-off precision and complexity. *arXiv preprint arXiv*:1304.3425.

BORDOGNA, G., & PASI, G. (1993). A fuzzy linguistic approach generalizing boolean information retrieval: A model and its evaluation. *Journal of the American Society for Information Science*, 44(2), 70.

BORDOGNA, G., FEDRIZZI, M., & PASI, G. (1997). A linguistic modeling of consensus in group decision making based on OWA operators. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 27(1), 126-133.

BOSSERT, W., & SUZUMURA, K. (2010). Consistency, choice, and rationality. *Harvard University Press*.

BOUYSSOU D., (1990): "Build criteria: A prerequisite for MCDA", In C.A. Bana e Costa, editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid, Springer-Verlag, Berlin*, pp. 58-80.

BOUYSSOU D., MARCHANT TH., PERNY P., TSOUKIAS A., Y VINCKE PH., (2000): *Evaluations and Decision Models: a critical perspective*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

BRANS, J. P., & VINCKE, P. (1985). A Preference Ranking Organization Method: (The PROMETHEE Method for Multiple Criteria Decision-Making). *Management science*, 31(6), 647-656.

BREWKA, G. (1991). *Nonmonotonic reasoning: logical foundations of commonsense* (Vol. 12). Cambridge University Press.

BREWKA, G., DIX, J., & KONOLIGE, K. (1997). *Nonmonotonic reasoning: an overview* (Vol. 73). Stanford: CSLI publications.

BRUGHA, C. M. (2004). Structure of multi-criteria decision-making. *Journal of the Operational Research Society*, 55(11), 1156-1168.

BUFFET P., GRÉMY J., MARC M., Y SUSSMANN B., (1967): “Peut-on chosir en tenant compte de critères multiples ? Une méthode (ELECTRE) et trois applications”, Revue METRA 6, no. 2.

CALVO, T., KOLESÁROVÁ, A., KOMORNÍKOVÁ, M., & MESIAR, R. (2002). Aggregation operators: properties, classes and construction methods. *In Aggregation Operators* (pp. 3-104). Physica-Verlag HD.

CHECKLAND, P. (1981). *Systems thinking, systems practice*. New York, USA, Wiley.

CHEN, S. J., & HWANG, C. L. (1992). Fuzzy multiple attribute decision making methods. *In Fuzzy Multiple Attribute Decision Making* (pp. 289-486). Springer Berlin Heidelberg.

CLIMACO J., MARTINS A., Y TRACA-ALMEIDA A., (1988): “On a multicriteria based approach for energy planning”, *Communication to Congrès EURO IX-TIMS XXVIII*, Paris July 6-8.

DELGADO, M., HERRERA, F., HERRERA-VIEDMA, E., & MARTINEZ, L. (1998). Combining numerical and linguistic information in group decision making. *Information Sciences*, 107(1-4), 177-194.

DONINI, F. M., LENZERINI, M., NARDI, D., PIRRI, F., & SCHAERF, M. (1990). *Nonmonotonic reasoning. Artificial Intelligence Review*, 4(3), 163-210.

DOUMPOS M., Y ZOPOUNIDIS C., (2002): “Multicriteria classification and sorting methods: A literature review”, *European Journal of Operational Research* 138, April, pp. 229-246.

DOUMPOS, M., & ZOPOUNIDIS, C. (2002b). Multicriteria decision aid classification methods (Vol. 73). Springer Science & Business Media.

DUBOIS, D., & PRADE, H. (1980a). Fuzzy sets and systems: theory and applications (Vol. 144). Academic press.

DUBOIS, D., & PRADE, H. (1980b). Theory and applications, fuzzy sets and systems. New York: Academic.

DUBOIS, D., & PRADE, H. (1985). A review of fuzzy set aggregation connectives. *Information sciences,* 36(1-2), 85-121.

DUBOIS, D., & PRADE, H. (2004). On the use of aggregation operations in information fusion processes. *Fuzzy sets and systems*, 142(1), 143-161.

DUBOIS, D., & PRADE, H. (Eds.). (2012). Fundamentals of fuzzy sets (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

DYCKHOFF H. AND PEDRYCZ W., (1984): Generalized means as model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems*, 14 , pp. 143-154.

DYER, J. S. (2005). MAUT—multiattribute utility theory. *In Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys* (pp. 265-292). Springer New York.

E COSTA, C. A. B., & VANSNICK, J. C. (1994). MACBETH—An interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International transactions in operational Research*, 1(4), 489-500.

EDWARDS, W., & VON WINTERFELDT, D. (1986). Decision analysis and behavioral research. Cambridge, Cambridge University press.

ESPIN, R. A., MARX-GÓMEZ, J., MAZCORRO, G., FERNÁNDEZ, E., LECICH, M. I. (2006): "Compensatory Logic: A fuzzy normative model for decision making", *Revista Investigación Operacional*, vol 27 (2), pp 188.197.

ESPÍN, R, FERNÁNDEZ, E. (2006) Compensatory Logic: a fuzzy normative model for decision making, *Investigación Operaciona*l vol. 27, no. 2, pp. 188-197.

ESPÍN, R, FERNÁNDEZ, E., GONZÁLEZ, E. (2011): Un sistema lógico para el razonamiento y la toma de decisiones: la Lógica Difusa Compensatoria Basada en la Media Geométrica, *Revista Investigación Operacional*, vol. 32, pp. 230-245.

ESPÍN, R, FERNÁNDEZ, E., GONZÁLEZ, E. (2014): Compensatory fuzzy logic: a frame for reasoning and modeling preference knowledge in intelligent systems *en R. Espin, R. Pérez, A. Cobo, J. Marx, A.R. Valdés (eds.) Soft computing for Business Intelligence*, Springer , 2014.

ESPÍN, R., GONZÁLEZ, E., PEDRYCZ, W., FERNÁNDEZ, E. (2015): Archimedean-Compensatory fuzzy logic systems, *International Journal of Computational Intelligence Systems*, vol.8-2, pp. 54-62 . DOI: 10.1080/18756891.2015.1129591

FERNÁNDEZ E., NAVARRO, J., BERNAL S., (2009): Multicriteria sorting using a valued indifference relation under a preference disaggregation paradigm, *European Journal of Operational Research*, 198, 2, pp. 602-609.

FERNÁNDEZ E., NAVARRO J., MAZCORRO G., (2012): Evolutionary multi-objective optimization for inferring outranking model's parameters under scarce reference information and effects of reinforced preference., *Foundations of Computing and Decision Sciences*, Vol. 37, No 3, pp.163-197.

FERNÁNDEZ, E. (2013). Comunicación privada.

FIGUEIRA, J., MOUSSEAU, V., & ROY, B. (2005): ELECTRE Methods. Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer Science + Bussiness Media (pp. 133-154). New York: Greco y Erghott (eds.).

FIGUEIRA, J. R., GRECO, S., ROY, B., & SŁOWIŃSKI, R. (2010). ELECTRE methods: main features and recent developments. *In Handbook of multicriteria analysis* (pp. 51-89). Springer Berlin Heidelberg.

FISHBURN, P. C. (1970). Utility theory for decision making (No. RAC-R-105). Research Analysis Corp Mclean va.

FISHBURN, P. C. (1977): “Condorcet Social Choice function”, *SIAM Journal of Applied Mathematics*, vol. 33, pp 469-489.

FISHBURN, P. C. (1989). Non-transitive measurable utility for decision under uncertainty. *Journal of Mathematical Economics*, 18(2), 187-207.

FODOR, J. C. (1993). On contrapositive symmetry of implications in fuzzy logic. In *First European Congress on Fuzzy and Intelligent Technologies*, Aachen (pp. 1342-1348).

FODOR, J., ROUBENS, M., (1994): Fuzzy Preference Modeling and Multicriteria Decision Support, Kluwer, Dordrecht.

FRENCH, S., (1993): Decision Theory: An Introduction to the Mathematics of Rationality, Ellis Horwood, London.

GASTÉLUM, D., (2014): Un enfoque evolutivo multiobjetivo para el problema de ordenamiento multicriterio de un conjunto de alternativas de tamaño mediano (tesis doctoral), Universidad de Occidente, Culiacán, Sinaloa.

GENARD, J. L., & PIRLOT, M. (2002). Multi-criteria decision-aid in a philosophical perspective. *Aiding Decisions with Multiple Criteria*, 89-117.

GINSBERG, M. L., ed. (1987) Readings in Nonmonotonic Reasoning. Los Altos CA: Morgan Kaufmann.

GRIMALDI, R. P. (1998). Matemáticas discreta y combinatoria: introducción y aplicaciones. Pearson Educación.

HAMBLIN, C. L. (1970). Fallacies. Methuen, London, UK, 1970.

HASTINGS, A. C. (1963). A Reformulation of the Modes of Reasoning in Argumentation. PhD thesis, Evanston, Illinois

HERRERA, F., & HERRERA-VIEDMA, E. (1996). A model of consensus in group decision making under linguistic assessments. *Fuzzy sets and Systems*, 78(1), 73-87.

HOHLE, U., (1998), Mathematics of Fuzzy Sets, Kluwer Academic Publishers.

HORTY, J. F., (2001), Nonmonotonic Logic, in *Goble, Lou, ed., The Blackwell Guide to Philosophical Logic*. Blackwell.

HOWARD R.A., Y MATHESON J.E., (1984): The principles and applications of Decision Analysis, Strategic Decision Group, Menlo Park, California.

HUMPHREYS, P., SVENSON, O., & VÁRI, A. (Eds.). (2000). Analysing and aiding decision processes (Vol. 14). Elsevier.

JOHNSON, R. H. (1987). The blaze of her splendors: Suggestions about revitalizing fallacy theory. *Argumentation*, 1(3), 239-253.

KAHNEMAN, D., & TVERSKY, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica: Journal of the econometric society*, 263-291.

KAHNEMAN, D., SLOVIC, P., TVERSKY, A. (1981): Judgment under uncertainty – heuristics and biases. Cambridge, UK, Cambridge University Press.

KAHNEMAN, D., TVERSKY, A. (2000): Choices, values and frames, Cambridge University Press, New York.

KATZAV, J., & REED, C. A. (2004). On argumentation schemes and the natural classification of arguments. *Argumentation*, 18(2), 239-259.

KEENEY, R.L., RAIFFA H. (1976): Decisions with multiple objectives. Preferences and value trade-offs, Wiley and Sons, NY.

KEENEY, R. L., & KEENEY, R. L. (2009). Value-focused thinking: A path to creative decision making. Harvard University Press.

KIENPOINTNER, M. (1986). Towards a typology of argument schemes. *Proceedings of ISSA 1986. Conference of the Society of the Study of Argument (ISSA'86).* Amsterdam University Press.

KLIR, G., & YUAN, B. (1995). Fuzzy sets and fuzzy logic (Vol. 4). New Jersey: Prentice hall.

KOOPMANS, T. C. (Ed.). (1951). Activity analysis of production and allocation (No. 13). New York: Wiley.

GOLETSIS, Y., PSARRAS, J., & SAMOUILIDIS, J. E., (2003): Project ranking in the Armenian energy sector using a multicriteria method for groups. *Annals of Operations Research*, 120(1-4), pp. 135-157.

HINLOOPEN, E., NIJKAMP, P., & RIETVELD, P. (1983). The regime method: A new multicriteria technique. *In Essays and surveys on multiple criteria decision making* (pp. 146-155). Springer Berlin Heidelberg.

LANDRY, M., MALOUIN, J. L., & ORAL, M. (1983). Model validation in operations research. *European Journal of Operational Research*, 14(3), 207-220.

LARICHEV, O. I., & MOSHKOVICH, H. M. (1995). ZAPROS-LM—A method and system for ordering multiattribute alternatives. *European Journal of Operational Research*, 82(3), 503-521.

LEVRAT, E., VOISIN, A., BOMBARDIER, S., & BRÉMONT, J. (1997). Subjective evaluation of car seat comfort with fuzzy set techniques. *International Journal of Intelligent Systems*, 12(11-12), 891-913.

LUKASIEWICZ, J. (1970), Selected Works (Reidel, Amsterdam).

LUKASZEWICZ, W. (1990). Non-monotonic reasoning: formalization of commonsense reasoning. Ellis Horwood Limited.

LUCE, R. D., & RAIFFA, H. (1957). Games and decisions: Introduction and critical surveys. New York: Wiley.

MARCH, J. G. (1994). Primer on decision making: How decisions happen. Simon and Schuster.

MARTEL J.M., Y NADEAU R., (1988): Revealed preference modeling with ELECTRE II: an interactive approach, *Communication to Congrès EURO IX-TIMS XXVIII*, Paris July 6-8.

MARTEL, J. M., MATARAZZO, B. (2005): “Other Outranking Approaches,” In: F. J. Salvatore and G. M. Ehrgott, Eds., Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys, Springer, New York,pp. 197-262.

MARTÍNEZ, L., (1999): Un nuevo modelo de representación de información lingüística basado en 2-tuplas para la agregación de preferencias lingüísticas (tesis doctoral), Universidad de Granada, Granada, España.

MATARAZZO, B. (1990). A pairwise criterion comparison approach: the MAPPAC and PRAGMA methods. *In Readings in multiple criteria decision aid* (pp. 253-273). Springer Berlin Heidelberg.

MAVROTAS, G., DIAKOULAKI, D., & CAPROS, P., (2003): Combined MCDA–IP approach for project selection in the electricity market. *Annals of Operations Research*, 120(1-4), pp. 159-170.

MILLER, G. (1956). Human memory and the storage of information. *IRE Transactions on Information Theory*, 2(3), 129-137.

MONTGOMERY, H., & SVENSON, O. (1976). On decision rules and information processing strategies for choices among multiattribute alternatives. *Scandinavian Journal of Psychology*, 17(1), 283-291.

MONTGOMERY, H. (1983). Decision rules and the search for a dominance structure: Towards a process model of decision making. *Advances in psychology*, 14, 343-369.

MOUSSEAU V. AND DIAS L., (2004): Valued outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures. *European Journal of Operational Research*, 156(2), 467-482.

NAVARRO, J., (2005): Herramientas Inteligentes para la Evaluación y Selección de Proyectos de Investigación-Desarrollo en el Sector Público (tesis doctoral), Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, Sinaloa.

OLMEDO, R., (2009): Avances en la modelación basada en relaciones borrosas de sobreclasificación para sistemas de apoyo a la decisión en grupo (tesis doctoral), Universidad Autónoma de Sinaloa, Culiacán, Sinaloa.

OSTANELLO A., (1983): “Outranking Methods”, In B. Fandel, G., Spronk, J., Matarazzo, editor, *International Summer School on Multiple Criteria Decision Making Methods, Applications and Software* 1, Acireale, Italy, pp. 41-60.

OUERDANE, W., MAUDET, N., & TSOUKIAS, A. (2007). Arguing over actions that involve multiple criteria: A critical review. In *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches to Reasoning and Uncertainty* (pp. 308-319). Springer Berlin Heidelberg.

OUERDANE, W., MAUDET, N., & TSOUKIAS, A. (2008). Argument schemes and critical questions for decision aiding process. *Frontiers in artificial intelligence and applications*, 172, 285.

OUERDANE, W, (2009), Multiple Criteria Decision Aiding: a Dialectical Perspective (Doctoral thesis), Université Paris Dauphine, Paris, France.

OUERDANE, W., MAUDET, N., & TSOUKIAS, A. (2010). Argumentation theory and decision aiding. *In Trends in Multiple Criteria Decision Analysis* (pp. 177-208). Springer US.

OVCHINNIKOV, S. V. (1983). General negations in fuzzy set theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 92(1), 234-239.

PAELINCK, J. H. (1978). Qualiflex: a flexible multiple-criteria method. *Economics Letters*, 1(3), 193-197.

PARDALOS, P. M., SISKOS, Y., & ZOPOUNIDIS, C. (Eds.). (2013). Advances in multicriteria analysis (Vol. 5). Springer Science & Business Media.

PASTIJN H., VE LEYSEN J. (1989) "Constructing an Outranking Relation with ORESTE" *Mathematical and Computer Modelling: An International Journal*, 12(10-11), 1255-1268.

PEDRYCZ, W., & GOMIDE, F. (1998). An introduction to fuzzy sets: analysis and design. Mit Press.

PEDRYCZ, W. (Ed.). (2012). Fuzzy modelling: paradigms and practice (Vol. 7). Springer Science & Business Media.

PERELMAN, C., & OLBRECHTS-TYTECA, L. (1969). The New Rhetoric, trans. John Wilkinson and Purcell Weaver (Notre Dame, Ind.: University of Notre Dame Press, 1969), 412.

POULTON, E. C. (1994). Behavioral decision theory: A new approach. Cambridge University Press.

PRAKKEN, H., & SARTOR, G. (2002). The role of logic in computational models of legal argument: a critical survey. *In Computational logic: Logic programming and beyond* (pp. 342-381). Springer Berlin Heidelberg.

RAHWAN, I., & LARSON, K. (2009). Argumentation and game theory. In Argumentation in Artificial Intelligence (pp. 321-339). Sprin ger US.

REED, C., & NORMAN, T. (Eds.). (2003). Argumentation machines: New frontiers in argument and computation (Vol. 9). Springer Science & Business Media.

ROY B. (1985): Méthodologie multicritère d'aide à la décision, Economica, Paris, France, 423 pages.

ROY, B., (1990): The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods, in: C.A. Bana e Costa (Ed.), Reading in Multiple Criteria Decision Aid., Springer-Verlag, Berlin, pp. 155-183.

ROSENHEAD, J. (1989). Rational Analysis for a Problematic World: Structuring Methods for Complexity, Uncertainty and Conflict.

ROY, B. (1993). Decision science or decision-aid science?. European journal of operational research, 66(2), 184-203.

ROY B., VANDERPOOTEN D., (1995): "The european school of MCDA: A historical review". *En Slowinski R., (ed.), OR: Toward Intelligent Decision Support, 14th European Conference on Operational Research,* 39-65.

ROY, B., (1996): Multicriteria methodology for Decision Aiding, Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, Boston, London.

ROY, B., SŁOWIŃSKI, R., (2008): Handling effects of reinforced preference and counter-veto in credibility of outranking, *European Journal of Operational Research*, Volume 188, Issue 1, Pages 185-190, ISSN 0377-2217.

ROY, B. (2010). Two conceptions of decision aiding. *International Journal of Multicriteria Decision Making*, 1(1), 74-79.

SAATY T.L., (1980): The Analytic HierarchyProcess, McGraw-Hill, New York.

SAATY, T. L. (1996). Decision making with dependence and feedback: The analytic network process (Vol. 4922). Pittsburgh: RWS publications.

SAVAGE LEONARD, J. (1954). The foundations of statistics. NY, John Wiley, 188-190.

SIMON, H., & MARCH, J. (2005). Administrative behavior and organizations. *Organizational Behavior 2: Essential Theories of Process and Structure*, 2, 41.

SIMON, H. A. (1955). A behavioral model of rational choice. *The quarterly journal of economics*, 69(1), 99-118.

SLOWINSKI R., Y TREICHEL W., (1988): "MCDM methodology for regional water supply system programming", *Communication to Congrès EURO IX-TIMS XXVIII*, Paris July 6-8.

SLOWINSKI R., GRECO S., Y MATARAZZO B., (2002): Axiomatic Basis of Aggregation Functions: Utility Function, Associative Operator, Sugeno Integral, Max-Min Weighted Sum, Decision Rules. *Invited Lecture in XVI MCDM World Conference*, Semmering, Austria.

SUGENO, M. (1977). Fuzzy measures and fuzzy integrals: a survey,(MM Gupta, GN Saridis, and BR Gaines, editors) *Fuzzy Automata and Decision Processes*, 89–102.

SVENSON, O. (1996). Decision making and the search for fundamental psychological regularities: What can be learned from a process perspective?. *Organizational behavior and human decision processes*, 65(3), 252-267.

TORRA, V. (1996). Negation functions based semantics for ordered linguistic labels. *International Journal of Intelligent Systems*, 11(11), 975-988.

TOULMIN, S. E. (2003). The uses of argument. Cambridge university press.

TSOUKIAS, A., PERNY, P., & VINCKE, P., (2002): From concordance/discordance to the modelling of positive and negative reasons in decision aiding. *In Aiding decisions with multiple criteria* (pp. 147-174). Springer US.

TSOUKIAS, A., (2008): "From decision theory to decision aiding methodology", *European Journal of Operational Research*, vol. 187 (1), pp. 138-161.

TVERSKY, A. (1969). Intransitivity of Preferences. *Preference, Belief, and Similarity*, 433.

TVERSKY, A. (1972). Elimination by aspects: A theory of choice. *Psychological review*, 79(4), 281.

TVERSKY, A. (1977). On the elicitation of preferences: Descriptive and prescriptive considerations. Conflicting objectives in decisions, 209-222.

VANDERPOOTEN, D. (2002). Modelling in decision aiding. *Aiding Decisions with Multiple Criteria*, 195-210.

VAN EEMEREN, F. H., GARSSEN, B., KRABBE, E. C., HENKEMANS, A. S., VERHEIJ, B., & WAGEMANS, J. H. (2014). *Handbook of argumentation theory*. Dordrecht: Springer.

VERHEIJ, B. (2003). Dialectical argumentation with argumentation schemes: An approach to legal logic. *Artificial intelligence and Law*, 11(2), 167-195.

VINCKE, P. (1992). Multicriteria decision-aid. New York, USA, Wiley.

VON NEUMANN, J., & MORGENSTERN, O. (1944). Game theory and economic behavior. Princeton, Princeton University.

WAKKER, P. P. (2013). Additive representations of preferences: A new foundation of decision analysis (Vol. 4). Springer Science & Business Media.

WALTON, D. N. (1990). What is reasoning? What is an argument?. *The Journal of Philosophy*, 87(8), 399-419.

WALTON, D. (2001). Abductive, presumptive and plausible arguments. Informal Logic, 21(2).

WALTON, D., REED, C., & MACAGNO, F. (2008). Argumentation schemes. Cambridge University Press.

WALTON, D. (2005). Justification of argumentation schemes. *The Australasian Journal of Logic*, 3: 1–13.

WALTON, D., & GORDON, T. F. (2005). Critical questions in computational models of legal argument. *Argumentation in artificial intelligence and law*, 103.

WATZLAWICK, P., WEAKLAND, J., & FISH, R. (1974). Change: Principles of problem resolution and problem formation.

WEBER, E. U., & COSKUNOGLU, O. (1990). Descriptive and prescriptive models of decision-making: implications for the development of decision aids. *IEEE transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 20(2), 310-317.

YAGER, R. R. (1980). On a general class of fuzzy connectives. *Fuzzy sets and Systems*, 4(3), 235-242.

YAGER, R. R. (1993). Non-numeric multi-criteria multi-person decision making. *Group decision and negotiation*, 2(1), 81-93.

YAGER, R. R. (1995). An approach to ordinal decision making. *International Journal of Approximate Reasoning*, 12(3-4), 237-261.

YAZICI, A., GEORGE, R. (1999). Fuzzy Database Modeling Studies. In *Fuzziness and Soft Computing* (vol. 26).

ZADEH, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and control*, 8(3), 338-353.

ZADEH, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning—I. *Information sciences*, 8(3), 199-249.

ZADEH, L. A. (1975). The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning-III. *Information sciences*, 9(1), 43-80.

ZADEH, L. A. (1983). A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages. *Computers & Mathematics with applications*, 9(1), 149-184.

ZIMMERMANN H.-J., (1996): Fuzzy set theory - and its applications, Kluwer, Boston.

ZIMMERMANN H.-J. AND ZYSNO P., (1980): Latent connectives in human decision making, *Fuzzy Sets and Systems*, 4, pp. 37-51.

ZIMMERMANN, H. J. (2011). Fuzzy set theory—and its applications. Springer Science & Business Media.

ZIMMERMANN, H. J. (2012). Fuzzy sets, decision making, and expert systems (Vol. 10). Springer Science & Business Media.

ZOPOUNIDIS, C., PARDALOS, P. (2010): Handbook of multicriteria analysis. *Chapter III. Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 155–183.

ZOPOUNIDIS, C., & DOUMPOS, M. (2000). PREFDIS: a multicriteria decision support system for sorting decision problems. *Computers & Operations Research*, 27(7), 779-797.