

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA  
FACULTAD DE INFORMÁTICA Y FACULTAD DE CIENCIAS DE LA  
TIERRA Y EL ESPACIO  
MAESTRÍA EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN



ANÁLISIS DE ROBUSTEZ DE UN MÉTODO DE  
DESAGREGACIÓN DE PREFERENCIAS BASADO EN UN  
ENFOQUE EVOLUTIVO

Que como requisito parcial para obtener el grado de  
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN  
presenta

EDGAR COVANTES OSUNA

DIRECTOR DE TESIS: DR. JORGE ADALBERTO NAVARRO CASTILLO  
CO-DIRECTOR DE TESIS: DR. EDUARDO RENÉ FERNÁNDEZ GONZÁLEZ

Culiacán, Sinaloa a 2013

*No sólo no habiéramos sido nada sin ustedes, sino con toda la gente que estuvo a nuestro alrededor desde el comienzo. Algunos siguen hasta hoy. ¡Gracias...totales!.*

*Gracias totales - Gustavo Cerati*

## AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento especial a mí director de tesis, el Doctor Jorge Adalberto Navarro Castillo y co-asesor, el Doctor Eduardo Rene Fernández González por su incondicional apoyo y guía durante mis estudios de maestría y desarrollo del presente trabajo de investigación en la Facultad de Informática de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Ha sido una gran experiencia de aprendizaje y un privilegio trabajar con ellos en los pasados años.

Agradezco a mis maestros del postgrado por su apoyo, así como por el conocimiento que me transmitieron para el desarrollo de mi formación profesional. A mis compañeros de generación Daniel, Jorge, Rosendo, Miguel, Marcia y al compañero de doctorado Oswaldo por hacer de la Facultad un lugar agradable.

Agradezco a mi hermano César (compañero también en mis estudios de maestría), Gerardo, que se encuentra cursando sus estudios de licenciatura y en especial a mi madre Elvia y padre César por estar siempre al pendiente de mi bienestar.

Agradezco a mi familia en general por estar interesados en mi desarrollo personal, en especial a mis abuelos y amigos Juan José, Perla, Nestor, Pedro y Miguel que desde mis estudios de licenciatura se han mantenido al pendiente de mí.

Agradezco a mis sinodales y comité revisor, por haberse tomado el tiempo en la lectura de este trabajo y aportar conocimiento en sus críticas para el enriquecimiento de esta investigación.

Finalmente, agradezco a las instituciones que me apoyaron en mis estudios, la Facultad de Informática y Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio de la Universidad Autónoma de Sinaloa y al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por su apoyo financiero bajo la beca no. 264342.

## ÍNDICE GENERAL

ÍNDICE DE FIGURAS . . . . .	<b>IV</b>
ÍNDICE DE TABLAS . . . . .	<b>V</b>
ÍNDICE DE ALGORITMOS . . . . .	<b>VI</b>
ÍNDICE DE SÍMBOLOS . . . . .	<b>VII</b>
RESUMEN . . . . .	<b>1</b>
INTRODUCCIÓN . . . . .	<b>2</b>
<b>CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA . . . . .</b>	<b>6</b>
1.1. Planteamiento del problema . . . . .	6
1.2. Motivación y justificación . . . . .	8
1.3. Hipótesis . . . . .	10
1.4. Objetivos generales . . . . .	10
1.5. Objetivos específicos . . . . .	10
1.6. Preguntas de investigación . . . . .	11
<b>CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO REFERENCIAL . . . . .</b>	<b>12</b>
2.1. Ayuda a la decisión multicriterio . . . . .	12
2.1.1. Problema de selección ( $P_\alpha$ ) . . . . .	16
2.1.2. Problema de clasificación ( $P_\beta$ ) . . . . .	16
2.2. Enfoque Relacional . . . . .	17
2.2.1. Notaciones y definiciones preliminares . . . . .	18
2.2.2. Relación de sobreclasificación “borrosa” . . . . .	21
2.2.3. Método THESEUS . . . . .	23
2.3. Análisis de desagregación de preferencias . . . . .	26
2.3.1. Enfoque multiobjetivo para inferir los parámetros del modelo . . . . .	34
2.4. Algoritmos evolutivos para la optimización multiobjetivo . . . . .	36
2.5. Robustez . . . . .	40
2.5.1. Análisis de robustez . . . . .	42
2.5.2. Valoración . . . . .	45
2.5.3. Importancia . . . . .	45
2.5.4. Enfoque del análisis de robustez en la investigación . . . . .	49

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA Y EVALUACIÓN EMPÍRICA . . . . .	<b>51</b>
3.1. Esquema metodológico y experimental . . . . .	51
3.2. Generación de parámetros y objetos . . . . .	52
3.2.1. Restricciones en los parámetros . . . . .	52
3.2.2. Generación del núcleo de referencia THESEUS-compatible . . . . .	53
3.3. Inferir conjuntos de parámetros mediante el procedimiento PDA evolutivo . . . . .	54
3.3.1. Enfoque evolutivo . . . . .	55
3.3.2. Proceso de reparación . . . . .	56
3.4. Clasificación por el método THESEUS con parámetros obtenidos del PDA . . . . .	57
3.5. Estructura y evaluación de los experimentos . . . . .	58
3.5.1. Estructura de los experimentos . . . . .	58
3.5.2. Evaluación de los experimentos . . . . .	60
CAPÍTULO 4. RESULTADOS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES . . . . .	<b>63</b>
4.1. Resultados . . . . .	63
4.2. Discusión y conclusiones . . . . .	70
4.3. Trabajo futuro . . . . .	74
BIBLIOGRAFÍA . . . . .	<b>76</b>
ANEXO A. COMPORTAMIENTO DEL CENTROIDE POR CARACTERÍSTICA DEL PROBLEMA . . . . .	<b>85</b>
A.1. Clases . . . . .	85
A.2. Criterios . . . . .	87
A.3. Objetos . . . . .	88

## ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 2.1. Problemas de decisión. . . . .	14
FIGURA 2.2. Contribución de los enfoques de MCDA en los problemas de toma a la decisión discretos y continuos. . . . .	15
FIGURA 2.3. Proceso de decisión de PDA comparado con MAUT y ORT. . .	32
FIGURA 3.1. Esquema metodológico y experimental. . . . .	51
FIGURA 3.2. Codificación de individuos. . . . .	55
FIGURA 3.3. Posibles puntos de pre-cruza. . . . .	55
FIGURA 4.1. Aciertos por individuo en ambos escenarios. . . . .	68
FIGURA 4.2. Aciertos por número de objetos e individuos en ambos escenarios.	68
FIGURA 4.3. Aciertos por número de criterios e individuos en ambos escenarios.	69
FIGURA 4.4. Aciertos por número de clases e individuos en ambos escenarios.	69
FIGURA 4.5. Vaguedades por individuo en ambos escenarios. . . . .	70
FIGURA A.1. Resultados con 3 clases . . . . .	85
FIGURA A.2. Resultados con 5 clases . . . . .	86
FIGURA A.3. Resultados con 7 clases . . . . .	86
FIGURA A.4. Resultados con 9 clases . . . . .	86
FIGURA A.5. Resultados con 3 criterios . . . . .	87
FIGURA A.6. Resultados con 5 criterios . . . . .	87
FIGURA A.7. Resultados con 7 criterios . . . . .	87
FIGURA A.8. Resultados con 9 criterios . . . . .	88
FIGURA A.9. Resultados con 50 objetos . . . . .	88
FIGURA A.10. Resultados con 100 objetos . . . . .	88
FIGURA A.11. Resultados con 200 objetos . . . . .	89

## ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 3.1.	Hipótesis nulas e hipótesis alternativas . . . . .	60
TABLA 3.2.	Intervalos de confianza y nivel de significancia para pruebas bilaterales. . . . .	62
TABLA 4.1.	Resultados estadísticos para ambos escenarios. . . . .	63
TABLA 4.2.	Conteo de igualdades por número de objetos y escenario. . . . .	65
TABLA 4.3.	Conteo de igualdades por criterios y escenarios. . . . .	65
TABLA 4.4.	Conteo de igualdades por clase y escenario. . . . .	66
TABLA 4.5.	Total de aciertos obtenidos por individuo seleccionado en cada escenario. . . . .	66

## ÍNDICE DE ALGORITMOS

1.	Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II (NSGA-II) . . . . .	39
2.	Generar conjunto de referencia THESEUS-compatible . . . . .	54
3.	Clasificación por el método THESUS . . . . .	57

## ÍNDICE DE SÍMBOLOS

DM	Decisor (Decision Maker)	1
PDA	Análisis de Desagregación de Preferencias (Preference Disaggregation Analysis)	1
MOEA	Algoritmo evolutivo multiobjetivo (multiobjective Evolutionary Algorithm)	1
MCDA	Ayuda a la Decisión Multicriterio (Multicriteria Decision Aid)	4
$P_\alpha$	Problema de decisión en la denominación de Roy (selección)	13
$P_\gamma$	Problema de decisión en la denominación de Roy (ranking)	13
$P_\beta$	Problema de decisión en la denominación de Roy (clasificación)	13
$A$	Conjunto potencial de acciones (o alternativas)	18
$a, b, c$	Elementos de $A$	18
$G$	Familia consistente de criterios	18
$g_i$	$i$ -ésimo criterio	18
$g_i(x_j)$	Evaluación hecha de una acción $x_j$ sobre el $i$ -ésimo criterio	18
$E_j$	Dominio de $g_i$	18
$\Rightarrow$	Implicación material	18
$e$	Consecuencia en el $j$ -ésimo criterio	18
$S$	Relación de sobreclasificación	18
$xSy$	$x$ sobreclasifica a $y$	18
$x\neg Sy$	$x$ no sobreclasifica a $y$	18
$\neg$	Operador de negación	19
$I$	Relación de indiferencia	19
$xIy$	Alternativas equivalentes	19
$P$	Relación de preferencia estricta	19
$xPy$	$x$ es significativamente preferida a $y$	19
$Q$	Relación de preferencia débil	19
$xQy$	Situación de duda entre $xPy$ y $xIy$	19
$R$	Relación de incomparabilidad	19
$xRy$	Alternativas incomparables	19
$\vee$	Operador disyuntivo	19
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	19
$xP_iy$	$x$ es preferida estrictamente a $y$ con respecto al $i$ -ésimo criterio	20
$xI_iy$	$x$ es indiferente a $y$ con respecto al $i$ -ésimo criterio	20
$\varphi$	Umbral de preferencia entre los pesos de los atributos utilizado para modelar las relaciones AI, MI, y LI	20
$\varepsilon$	Umbral de indiferencia entre los pesos de los atributos utilizado para modelar las relaciones AI, MI, y LI	20
$xQ_iy$	$x$ es preferida débilmente a $y$ con respecto al $i$ -ésimo criterio	20

$\sigma(x, y)$	Grado de credibilidad de $xSy$	21
$q_j$	Umbral de indiferencia del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$p_j$	Umbral de preferencia del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$u_j$	Umbral de discordancia del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$v_j$	Umbral de veto del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$w_j$	Peso en el $j$ -ésimo criterio	21
$rp_j$	Umbral de reforzamiento de preferencia del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$k_j$	factor de refuerzo del modelo de sobreclasificación en el $j$ -ésimo criterio	21
$C(x, y)$	Índice de concordancia entre dos alternativas	22
$D(x, y)$	Índice de discordancia entre dos alternativas	22
$\wedge$	Operador conjuntivo	22
$\cdot$	Operador producto	22
$Nd(x, y)$	Grado de verdad del predicado de no-discordancia	22
$c_j$	Índice marginal de concordancia asociado al $j$ -ésimo criterio	22
$C(yPx)$	Grado de mayoría entre los criterios a favor de $yPx$	22
$C(yQx)$	Grado de mayoría entre los criterios a favor de $yQx$	22
$C(xSy)$	Grado de mayoría entre los criterios a favor de $ySx$	22
mín	Clasificador simple: mínimo	22
$d_j(x, y)$	Índice marginal de discordancia asociado al $j$ -ésimo criterio	22
$\Delta_j$	Sustracción entre las evaluaciones de dos acciones ( $g_j(y) - g_j(x)$ ) en el $j$ -ésimo criterio	23
$\lambda$	Credibilidad de la relación de sobreclasificación	23
$C_{sug}(x_j)$	Subconjunto de categorías sugeridas	24
$C_k$	Categoría en la $k$ -ésima posición	24
$\times$	Producto cartesiano	24
$S(\lambda)$	Conjunto de alternativas que satisfacen el $\lambda$ -corte de la sobreclasificación	24
$P(\lambda)$	Conjunto de alternativas que satisfacen el $\lambda$ -corte de la preferencia estricta	24
$Q(\lambda)$	Conjunto de alternativas que satisfacen el $\lambda$ -corte de la preferencia débil	24
$I(\lambda)$	Conjunto de alternativas que satisfacen el $\lambda$ -corte de la indiferencia	24
$R(\lambda)$	Conjunto de alternativas que satisfacen el $\lambda$ -corte de la incomparabilidad	24
$T$	Conjunto de referencia	24
$C(x)$	Asignación potencial de la acción $x$ a una categoría	24
$xP(\lambda)y$	$x$ es estrictamente preferida a $y$ de acuerdo al nivel de corte $\lambda$	25

$xQ(\lambda)y$	$x$ es débilmente preferida a $y$ de acuerdo al nivel de corte $\lambda$	25
$xI(\lambda)y$	$x$ es indiferente a $y$ de acuerdo al nivel de corte $\lambda$	25
$\succeq$	“al menos tan bueno como”	25
$D_P$	Inconsistencias en el conjunto $P(\lambda)$	25
$D_Q$	Inconsistencia en el conjunto $Q(\lambda)$	25
$D_I$	Inconsistencia en el conjunto $I(\lambda)$	25
$D_{1I}$	Inconsistencia en el conjunto $I(\lambda)$ de primer orden	26
$D_{2I}$	Inconsistencia en el conjunto $I(\lambda)$ de segundo orden	26
$n_P$	Cardinalidad del conjunto de inconsistencias $D_P$	26
$n_Q$	Cardinalidad del conjunto de inconsistencias $D_Q$	26
$n_{1I}$	Cardinalidad del conjunto de inconsistencias $D_{1I}$	26
$n_{2I}$	Cardinalidad del conjunto de inconsistencias $D_{2I}$	26
$N_1$	Total de inconsistencias $N_1 = n_P + n_Q + n_{1I}$	26
$N_2$	Total de inconsistencias $N_2 = n_{2I}$	26
argmin	Operador para minimización de argumentos	26
card( $\{C_j\}$ )	Cardinalidad del conjunto $C_j$	26
$C_{k^*}$	Conjunto de categorías sugeridas	26
$C_L$	La menor categoría a la cual puede asignarse un acciones	26
$C_H$	La mayor categoría a la cual puede asignarse un acciones	26
$A^*$	Subconjunto de acciones donde el DM puede expresar preferencias	29
$\subset$	Relación de subconjunto	29
MAUT	Teoría de la utilidad multiatributo (Multiattribute Utility Theory)	31
ORT	Teoría de la relación de sobreclasificación (Outranking Relation Theory)	31
$P^*$	Asignación específica de parámetros preferenciales	34
$\sigma(x, y, P^*)$	Grado de credibilidad de $xSy$ dependiente de los parámetros preferenciales suministrados	34
$D_{\succeq}$	Inconsistencia en el conjunto de sobreclasificación	36
$n_{\succeq}$	Cardinalidad del conjunto de inconsistencias en $D_{\succeq}$	36
$R_F$	Región factible en el espacio de parámetros	36
MO	Optimización multiobjetivo (Multiobjective Optimazation)	36
$u = (u_1, \dots, u_n)$	Vector de valores	37
GA	Algoritmo genético (Genetic Algorithm)	37
VEGA	Vector Evaluated GA	37
NSGA-II	Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II	38
$K$	Tamaño de la población en el algoritmo evolutivo	38
$\alpha$	Fuente de incertidumbre asociada al pobre conocimiento de las características del problema	44
$\beta$	Fuente de incertidumbre asociada al estado del medio ambiente donde se ejecuta la decisión	44

$\gamma$	Fuente de incertidumbre asociada a la falta de claridad en los sistemas de valores, posiblemente incompletos	44
RF	Representación formal	46
CVR	Contexto de la vida real	46
$\neq$	Operador de desigualdad	46
<i>CRT</i>	Conjunto de referencia THESEUS-compatible	52
$H_0, H_A$	Hipótesis nula y alternativa (respectivamente)	59
$\mu_i$	Media en términos de la hipótesis	59
$z$	Estadística de prueba para dos muestras aleatorias simples independientes de gran magnitud	60
$\bar{x}_i$	Media de la población $i$	60
$\sigma_i^2$	Varianza de la población $i$	60
$n_i$	Tamaño de de población $i$	60
$I_i$	Individuo $i$	65

## RESUMEN

Establecer los valores de los parámetros del modelo de sobreclasificación es generalmente una tarea exigente para el decisor (decision maker, DM), debido que es necesario proveer un gran número de parámetros (umbrales, pesos y un nivel de corte). El uso de los métodos indirectos (análisis de desagregación de preferencias o PDA por sus siglas en inglés) para inferir el conjunto de parámetros a partir de un conjunto de ejemplos de decisión permite al DM evitar la tarea de especificar estos valores.

En este trabajo se realizó un análisis de robustez del método PDA basado en un enfoque evolutivo propuesto por Fernández *et al.* (2012). En este caso se usa el método THESEUS como un DM artificial y su regla de asignación para evaluar cada individuo de la población del algoritmo evolutivo multiobjetivo (MOEA por sus siglas en inglés). Se eligen distintos individuos de la población y se evalúan mediante un análisis estadístico con el objetivo de establecer si las capacidades de clasificación pueden ser consideradas estadísticamente equivalentes.

Concluyéndose en base a la investigación que el método propuesto por Fernández *et al.* (2012) no es robusto, *i.e.*, el método es sensible, por lo tanto, sus individuos tienen capacidades de clasificación consideradas estadísticamente diferentes. Además, se identificó como mejor solución al individuo centroide dentro del conjunto solución. Asimismo, se propone continuar con las investigaciones del comportamiento de las vaguedades de primer y segundo nivel, así como la caracterización de la mejor zona con el objetivo de seleccionar el mejor conjunto de parámetros.

## INTRODUCCIÓN

Una de las actividades que el ser humano realiza de manera natural durante su vida, es la toma de decisiones. Es sobre la base en la forma como enfrenta y resuelve los problemas en su día a día que decide su proceder para cada una de las actividades desde las más simples hasta las más complejas. La solución del problema puede venir dada mediante la asignación de un orden, clasificación o agrupación de actividades u objetos con base en un conjunto de características definidas por el decisor. Las características relevantes a tomar en cuenta en el proceso de decisión pueden tener su origen en las necesidades y/o preferencias del decisor, en la disponibilidad, costo, importancia o accesibilidad de las alternativas, y/o en la valoración de las consecuencias.

La teoría de la decisión se ocupa de analizar cómo elige una persona aquella acción que, de entre un conjunto de acciones posibles, le conduce al mejor resultado dadas sus preferencias. En el caso más simple, un problema de decisión consiste en decidir si se realiza o no una acción. Cuando un decisor posee una sola opción, no se está frente a un problema de decisión; por lo que es normal considerar un conjunto de opciones potenciales, las cuales se distinguen por las consecuencias que cada una acarrea, y que constituyen el objeto del problema de decisión.

Durante el proceso de decisión, las consecuencias a considerar para cada alternativa se vuelven criterios que permiten elegir la mejor alternativa. Un criterio es la base para una decisión que puede medirse y evaluarse. Existen problemas donde solo se considera un criterio, para los cuales se han desarrollado un conjunto de herramientas de solución en dependencia del número de alternativas. En el presente trabajo se consideran los problemas cuyas alternativas poseen dos o más criterios a tomar en cuenta, denominados problemas de decisión multicriterio.

El problema de toma de decisiones con múltiples criterios quizás es el área de desarrollo más activo en los últimos años en el campo de la ciencia de la decisión. Las razones fundamentales de este aumento en la atención, es el acercamiento que se logra a las consideraciones reales que realiza un decisor humano y a la complejidad que acarrea la resolución de los problemas de decisión cuando se consideran múltiples criterios.

Muchos problemas de decisión pueden ser modelados mediante el análisis de decisión multicriterio. De acuerdo con Doumpos y Zopounidis (2002), el principal objetivo de dicho análisis es proveer un conjunto de metodologías que permitan el desarrollo de modelos para el soporte a la decisión considerando el sistema o políticas preferenciales de la entidad encargada de tomar la decisión llamado decisor o “decision maker” (DM). Estos procesos comúnmente no llevan a tomar la decisión óptima, sino a apoyar al DM a realizar decisiones acordes a sus preferencias.

Estos conjuntos de metodologías mencionadas en el párrafo anterior obligan al DM a reflexionar acerca de sus preferencias y reflejarlas en una estructura matemática específica (modelo). Como todo modelo matemático, es necesario definir parámetros para su construcción y utilización; en la determinación de los valores de los parámetros del modelo es donde se refleja la política de decisión del DM. De acuerdo con Dias *et al.* (2002), definir estos parámetros preferenciales es la clave para crear un modelo que reflejará el sistema de preferencias del DM, un aspecto crucial en la construcción de un modelo de decisión multicriterio.

Tomando en cuenta las consideraciones anteriores, la determinación de los valores de los parámetros de un modelo de decisión es muy importante, ya que estos reflejan el sistema de valores del DM. El proyecto que aquí se presenta se centra en el análisis de un proceso de obtención de estos parámetros preferenciales. El presente estudio tiene como fin realizar un análisis de robustez del método propuesto por Fernández *et al.* (2012), método de desagregación de preferencias basado en un enfoque evolutivo. Con esto se busca observar si este método proporciona soluciones (conjuntos de

parámetros) con la misma capacidad de clasificación; en caso de que así lo fuera, la selección de un conjunto de parámetros sería indistinta; en caso contrario, las soluciones son sensibles, y debe proponerse una solución que sea lo más compatible con las preferencias del DM.

En el Capítulo 1, se aborda la importancia que tiene la realización de un análisis de robustez como parte fundamental en el marco de trabajo dentro de la ayuda a la decisión multicriterio (MCDA, por sus siglas en inglés). El resto de este documento se estructura de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se presenta una revisión de los conceptos y temas necesarios para comprender tanto el problema como la propuesta. Se inicia con una descripción de la ayuda a la decisión multicriterio en la Sección 2.1. En la Sección 2.2 se detalla el enfoque relacional, donde se tratarán los métodos de la escuela descriptiva y se mencionan algunos de los métodos basados en la relación de sobreclasificación. En la Sección 2.3 se define el análisis de desagregación de preferencias, así como el enfoque multiobjetivo para inferir los parámetros del modelo de sobreclasificación. Los algoritmos evolutivos para la optimización multiobjetivo son vistos en la Sección 2.4. Finalmente, en la Sección 2.5 se define el término de robustez utilizado en la presente investigación, así como su importancia.

El apartado metodológico y experimental planteado en la investigación se aborda en el Capítulo 3. La creación del modelo de sobreclasificación y conjunto de referencia basado en las características del método THESEUS (conjunto llamado THESEUS-compatible) se define en la Sección 3.2. En la Sección 3.3 se describe el proceso de inferencia de los valores de los parámetros mediante el procedimiento de desagregación de preferencias evolutivo, la obtención de los individuos solución, así como la selección de los individuos más representativos del conjunto solución. En la Sección 3.4 se describe el proceso de clasificación de un subconjunto de alternativas del universo utilizando los diferentes conjuntos de parámetros, asociados a los individuos más representativos obtenidos del procedimiento de inferencia. Al final se obtiene como resultado de dicho proceso, un conjunto de alternativas clasificadas por cada conjunto

de parámetros utilizado. En la Sección 3.5 se discute el proceso de evaluación de los experimentos para determinar si las distintas capacidades de realizar correctas clasificaciones pueden considerarse estadísticamente equivalentes o no.

Por último, los resultados y conclusiones obtenidas del análisis de robustez se describen en el Capítulo 4 y se detallan algunos puntos que quedan abiertos para su futuro análisis.

# CAPÍTULO 1

## PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

### 1.1. Planteamiento del problema

Para obtener los valores de los parámetros preferenciales existen dos formas, los procedimientos directos e indirectos. En el primer caso, el DM proporciona los valores de los parámetros preferenciales a través de un proceso interactivo guiado por el analista de la decisión. Puede ser un proceso viable, principalmente cuando la decisión involucra opciones estratégicas de carácter no repetitivo, *i.e.*, la misma decisión no tendrá que realizarse muchas veces o en plazos cortos de tiempo, o bien, si el número de parámetros es pequeño, si el decisor tiene muy claras sus preferencias y entiende claramente el significado de los parámetros dentro del modelo.

Por otro lado, se sabe que el DM puede no tener idea (o su idea ser demasiado vaga) de los valores de los parámetros. Obligarlo a precisar sus valores es una tarea ardua y con resultados poco confiables. De acuerdo con Doumpos *et al.* (2009), la asignación directa de los parámetros es cuestionable, debido a limitaciones de tiempo, *i.e.*, cuando el proceso de decisión es necesario hacerse en tiempo real, a la renuencia del DM a participar activamente en el proceso interactivo de asignación paramétrica debido a las dificultades cognitivas o porque desconoce el significado de los parámetros preferenciales asociados al modelo.

En la segunda forma, los procedimientos indirectos son definidos por Jacquet-Lagrèze y Siskos (2001) como aquellos que se encuentran relacionados con el análisis de desagregación de preferencias (PDA, por sus siglas en inglés); métodos donde se busca inferir el conjunto de parámetros del modelo que reflejan las preferencias del DM a partir de un conjunto de ejemplos de decisión, entrenamiento o referencia, *i.e.*, objetos o acciones donde ya se ha tomado una decisión. La asunción clave, mencionan

Doumpos *et al.* (2009) en el análisis de desagregación de preferencias, es que el DM no es capaz o se encuentra reacio a proveer cualquier información de forma directa acerca de su sistema de preferencias; resulta más cómodo para el DM expresar sus decisiones utilizando elementos sobre los que él/ella haya decidido anteriormente o esté dispuesto a decidir.

Bajo el contexto anterior, inferir los parámetros preferenciales mediante un conjunto de referencia puede ser de gran ayuda en el proceso de ayuda/toma de decisión para obtener un modelo que refleje las políticas de decisión del DM. El proceso de inferir el modelo tiene como objetivo principal definir los valores de los parámetros de la forma más sencilla como sea posible desde el punto de vista del DM y que reflejen, lo más fielmente posible sus preferencias. Si los parámetros del modelo se encuentran en concordancia con el sistema preferencial actual del DM, entonces el modelo puede ser utilizado como sustituto del DM para resolver futuros problemas de decisión.

Por otra parte, si el modelo es consistente con el conjunto de referencia, pero los valores de los parámetros son inconsistentes con el sistema preferencial del DM, (lo cual puede pasar si, *e.g.*, el conjunto de referencia es inadecuado, *i.e.*, el número de objetos en el conjunto de referencia puede ser escaso, el conjunto de referencia se encuentra mal balanceado, contiene decisiones equivocadas), entonces el DM-analista tienen una base inicial con la cual valorar cambios de algunos objetos en el conjunto de referencia, y vislumbrar los valores que puedan llegar a tener los parámetros del modelo.

Algunos métodos a menudo proveen al analista un conjunto de soluciones denominados población (en el caso de los algoritmos evolutivos); valores aceptables de los parámetros a inferir. Es necesario elegir un conjunto de valores para los parámetros de acuerdo a alguna medida de idoneidad. Al estudio donde se busca realizar conclusiones válidas para todas (o al menos la mayoría) de las soluciones es llamado análisis de robustez (Roy, 1998; Mousseau y Słowiński, 1998). Roy (2010) define a la robustez como la capacidad de soportar “aproximaciones vagas” y/o “zonas de ignorancia” con

el objetivo de prevenir impactos indeseados o degradación de las propiedades que se desean mantener.

De acuerdo con Ródenas y Barberis (2003), el análisis de robustez busca identificar el dominio de los puntos en el espacio de solución donde un resultado en particular se continúa perpetuando.

La investigación se conecta con el método de inferencia propuesto por Fernández *et al.* (2012), al utilizar un algoritmo evolutivo para optimizar ciertas medidas de desviación modelo-realidad para modelos que emplean las relaciones de sobreclasificación “borrosa” de los métodos ELECTRE III y ELECTRE TRI. Pero el algoritmo evolutivo genera una población de soluciones, cualquiera de las cuales en principio podría ser la asignación adecuada. Se carece de un criterio, sustentado en experimentación que guíe a la selección del mejor conjunto de valores.

El presente trabajo busca realizar un análisis de robustez de las soluciones obtenidas por el método de desagregación de preferencias propuesto por Fernández *et al.* (2012), que permita seleccionar la mejor solución. Como mejor solución se considerará la que mejor refleja las preferencias del DM. El método es robusto si las soluciones obtenidas son capaces de mantener la misma capacidad de clasificación sin importar qué conjunto de parámetros se utilice. De otra forma, si el método falla en mantener la misma capacidad de clasificación, se concluirá que el método provee soluciones sensibles. En consecuencia, será necesario encontrar la zona en el conjunto solución donde los valores de los parámetros sean los más compatibles con el sistema de preferencias del DM.

## 1.2. Motivación y justificación

Lo señalado anteriormente se justifica, porque de acuerdo con Roy (2010), la ayuda a la toma de decisión será:

- ejecutada en un problema de la vida real, en donde se tendrá que seleccionar

y aplicar un modelo de ayuda a la decisión en base a las características del problema o a la experiencia del analista de la decisión; y

- se tendrá que emplear parámetros preferenciales que parezcan ser los adecuados para un problema que pudiera no estar bien definido; como resultado, estos parámetros preferenciales pudieran no corresponder exactamente a los requeridos para crear y explotar el modelo.

En muchas ocasiones diversos trabajos relacionados con la programación matemática, teoría de la utilidad multiatributo, relación de sobreclasificación (Outranking) y en particular los basados en el análisis de desagregación de preferencias, se encuentran orientados a la aplicación de un modelo, ya creado, o nueva propuesta para solucionar un problema específico. En raras ocasiones se realiza un análisis de robustez que caracterice el comportamiento del modelo en diferentes situaciones, reconociendo que es posible que un método o modelo puede comportarse de manera correcta bajo cierta situación y bajo otras condiciones resultar no ser la mejor opción.

Es por ello que la realización de un análisis de robustez puede considerarse un aporte original, que contribuye a la caracterización de la propuesta hecha por Fernández *et al.* (2012), y a la recomendación que debe emanar de ella.

Debido a que los parámetros preferenciales son de vital importancia porque reflejan las preferencias del DM, y a que el método PDA proporciona un conjunto de soluciones, es necesario tener una forma que guíe la selección de la mejor solución. El presente trabajo de investigación, resuelve el problema de seleccionar la mejor solución mediante un análisis de robustez y al mismo tiempo plantea un marco de trabajo integral que permite definir bajo qué características es posible plantear el problema con el objetivo de alcanzar el mayor grado de satisfacción.

### 1.3. Hipótesis

La problemática y motivos planteados dan lugar a la demostración de dos hipótesis: la primera sobre la robustez del método de desagregación de preferencias propuesto por Fernández *et al.* (2012); la segunda es relativa al problema de, selección del mejor conjunto de valores para los parámetros del modelo relacional dado un conjunto de posibles soluciones mediante un análisis estadístico. Ambas hipótesis se detallan a continuación:

**El método PDA propuesto por Fernández *et al.* (2012) es robusto.** *Las soluciones obtenidas del método de desagregación de preferencias son capaces de mantener la misma capacidad de clasificación sin importar el conjunto de parámetros seleccionado.*

En el caso de que la hipótesis anterior no se verifique:

**Es posible determinar la mejor solución.** *Es posible encontrar el conjunto de valores de los parámetros más compatible con las preferencias del DM.*

### 1.4. Objetivos generales

Los siguientes propósitos se encuentran orientados a la demostración de las hipótesis anteriormente mencionadas:

- *Evaluar la robustez de las soluciones obtenidas por el método PDA.*
- *Dado un conjunto de posibles soluciones no equivalentes proporcionadas por el método PDA, determinar la mejor solución.*

### 1.5. Objetivos específicos

Si el método careciera de la robustez suficiente, se plantea además lograr los siguientes objetivos específicos:

- *Evaluar las capacidades de clasificación de cada conjunto de valores de los parámetros contenidos en el conjunto solución del método PDA.*
- *Evaluar qué zonas del conjunto de soluciones se apegan mejor a las políticas del DM.*

## **1.6. Preguntas de investigación**

Los supuestos y objetivos relacionados, plantean las siguientes interrogantes de investigación que estarán guiando el presente trabajo:

- *¿Cuál es la robustez de las soluciones obtenidas del PDA?*
- *¿Qué zonas del conjunto de soluciones se apegan más a las políticas del DM?*
- *¿Cuál es el comportamiento en las capacidades de clasificación de las distintas zonas del conjunto de soluciones al modificar las características del problema (número de objetos en el núcleo de referencia, criterios y clases)?*

## CAPÍTULO 2

### MARCO TEÓRICO REFERENCIAL

#### 2.1. Ayuda a la decisión multicriterio

Doumpos y Zopounidis (2002) mencionan que la ciencia de la decisión es un campo de investigación que se encuentra evolucionando de forma rápida a niveles tanto teóricos como prácticos, diversos problemas (ubicación, gestión de recursos, transpor-tación y logística, control de producción e inventario, planeación de mano de obra, mercadeo, finanzas, etc.) han creado un nuevo contexto para su solución median-te la integración de acercamientos metodológicos flexibles y realistas. La naturaleza de estos problemas es ampliamente diversa en términos de complejidad, el tipo de soluciones que deben investigarse, así como las metodologías que pueden aplicarse.

Roy (1990) menciona que el objetivo de la ayuda a la decisión multicriterio (Mul-ticriteria Decision Aid, MCDA) es permitir mejorar el grado de conformidad y cohe-rencia entre la evolución de un proceso de toma de decisión, el sistema de valores y objetivos de aquellos involucrados en este proceso. El propósito de la ayuda a la decisión multicriterio es elaborar:

- un modelo matemático que permita comparar un conjunto de acciones o alter-nativas potenciales de manera integral,
- o procedimientos que ayuden a reflexionar y progresar en la formulación de las distintas formas de comparar dos acciones.

Los esfuerzos anteriormente mencionados van enfocados a resolver distintos pro-blemas de decisión, Roy (2005) define estos problemas como la forma en que se propor-ciona la ayuda a la decisión. La problemática lidia con las respuestas a las siguientes

preguntas: ¿En qué términos se debería plantear el problema? ¿Qué tipo de resultados se deben tratar de obtener? ¿Cómo se ve a sí mismo el analista en el proceso de decisión para ayudar a llegar a estos resultados? ¿Qué tipo de procedimiento parece el más adecuado para guiar la investigación?

En base a lo anterior, Doumpos y Zopounidis (2002) definen dos categorías de problemas de decisión:

- Problemas discretos: problemas que toman en cuenta un conjunto discreto de alternativas, cada alternativa es descrita junto algunos atributos. Dentro del contexto de toma de decisiones, estos atributos tienen la forma de criterios de evaluación.
- Problemas continuos: Esta categoría incluye los casos donde el conjunto de alternativas define una región continua. En estos casos solo se toma en cuenta un subconjunto de alternativas las cuales tienen sentido en el proceso de decisión (región factible).

Roy (2005) define los problemas de decisión como:

$P_\alpha$  identificar la mejor alternativa o seleccionar un conjunto limitado de las mejor alternativas;

$P_\gamma$  realizar una jerarquización (ranking) de todas las alternativas en orden decreciente de preferencia.

$P_\beta$  dividir las alternativas en categorías previamente definidas (clasificación absoluta) o en grupos homogéneos (clasificación relativa o clustering).

Cuando se considera un problema de toma de decisión discreto, Perny (1998) divide estos problemas de decisión en dos grupos: los que se basan en preferencias y los que se basan en similitud, dentro de los primeros se encuentran aquellos problemas de decisión definidos como  $P_\alpha$  y  $P_\gamma$ ; dentro de los segundos, aquellos definidos por  $P_\beta$ .

Además de los anteriores, Roy (2005) define otro problema de decisión llamado que consiste en identificar los rasgos distintivos de las alternativas y realizar su descripción sobre la base de estas características. Todos estos problemas de decisión se representan en la Figura 2.1.

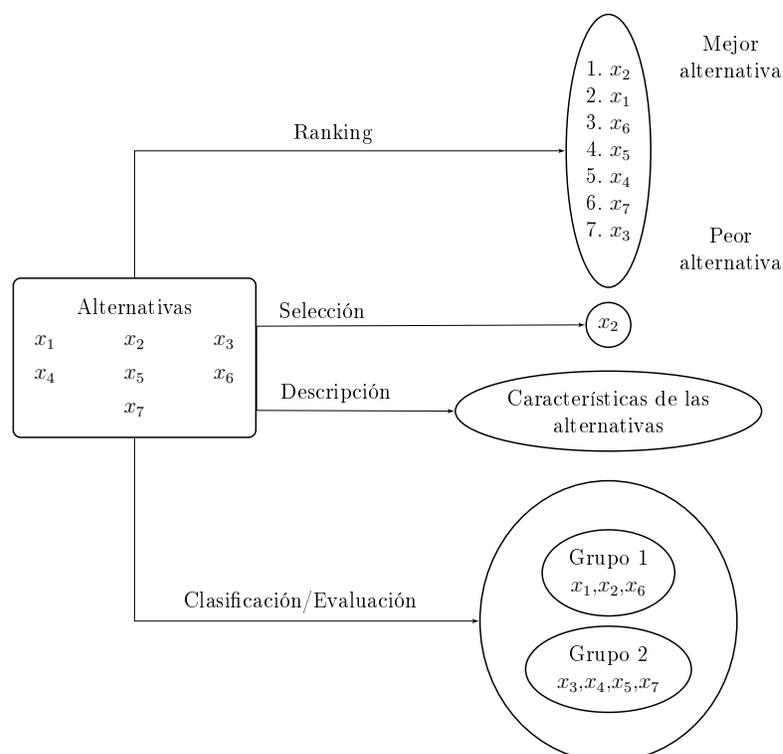


Figura 2.1: Problemas de decisión.

Las cuatro problemáticas descritas anteriormente no son las únicas (*cf.* Bana e Costa, 1992; Costa *et al.*, 1997). Cualquiera que sea la problemática elegida, el resultado obtenido por un tratamiento de un conjunto de datos mediante un solo procedimiento no es suficiente (salvo en condiciones excepcionales) para fundamentar una recomendación.

Pardalos *et al.* (1995) sugieren un esquema alternativo considerando las características tanto para el desarrollo de modelos como al proceso en el desarrollo del modelo:

1. Programación matemática multiobjetivo.
2. Teoría de la utilidad multiatributo.
3. Relación de sobreclasificación (Outranking).
4. Análisis de desagregación de preferencias.

La Figura 2.2 ilustra cómo estas cuatro corrientes metodológicas de MCDA contribuyen al análisis de los problemas en toma de decisiones. En esta figura las líneas solidas indican una contribución directa y las punteadas una indirecta. En particular, la teoría de la utilidad multiatributo, relación de sobreclasificación y análisis de desagregación de preferencias se usan tradicionalmente en problemas discretos. Estos tres enfoques llevan al desarrollo de un modelo de decisión que permite al DM evaluar el funcionamiento de un conjunto discreto de alternativas para los propósitos de  $P_\alpha$ ,  $P_\gamma$  o  $P_\beta$ . Por otro lado, la programación matemática multiobjetivo es más apropiada para problemas continuos.

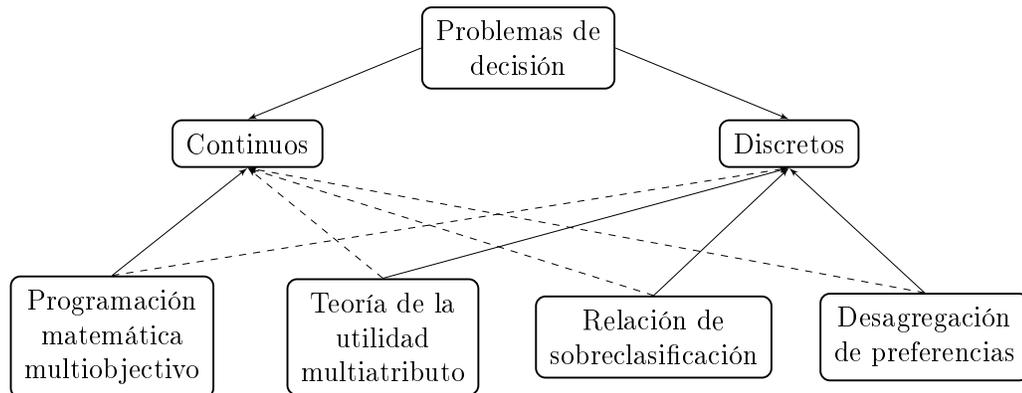


Figura 2.2: Contribución de los enfoques de MCDA en los problemas de toma a la decisión discretos y continuos.

La presente investigación se encuentra directamente relacionada con los problemas de decisión discretos y el análisis de desagregación de preferencias, ya que se realiza un análisis de robustez del método de desagregación de preferencias propuesto por

Fernández *et al.* (2012); en el mismo se busca estimar los valores de los parámetros del modelo de relación de sobreclasificación utilizado por el método THESEUS para la problemática de clasificación. Los temas mencionados anteriormente relacionados con el desarrollo de la presente investigación se desarrollarán en secciones posteriores.

### **2.1.1. Problema de selección ( $P_\alpha$ )**

El objetivo de esta problemática consiste en ayudar al DM en la selección de un subconjunto de acciones, lo más pequeño posible, de tal forma que una sola acción pueda ser finalmente seleccionada (Figueira *et al.*, 2005). Esto no significa que la selección se encuentra necesariamente orientada hacia la determinación de una o varias acciones consideradas como óptimas; el procedimiento de selección puede también, de manera más modesta, estar basado en comparaciones entre acciones de manera que sea posible justificar la eliminación del mayor número posible de ellas, entonces, el subconjunto restante puede ser seleccionado como el conjunto de acciones más satisfactorio, entre las cuales carece de importancia una comparación ulterior (Roy, 2005).

### **2.1.2. Problema de clasificación ( $P_\beta$ )**

De acuerdo con Doumpos y Zopounidis (2004), un gran número de problemas del mundo real relacionados con la toma de decisiones requieren la asignación de un conjunto discreto de alternativas descritas mediante un conjunto de atributos en grupos homogéneos previamente definidos. Tales problemas son usualmente llamados como problemas de “discriminación” o “clasificación”. Estos términos son comúnmente usados por estadistas, así como por investigadores en el campo de la inteligencia artificial (redes neuronales, aprendizaje automático, etc.). Se refieren a problemas donde los grupos son definidos de forma nominal, en estos casos las alternativas pertenecientes a diferentes grupos poseen diferentes características, sin ser posible establecer cualquier

tipo de relación de preferencia entre ellos (Doumpos y Zopounidis, 2002). En el caso donde los grupos se encuentren definidos de forma ordinal, los investigadores de MC-DA han introducido el término “evaluación” (sorting). En problemas de evaluación los atributos que describen las alternativas tienen la forma de criterios de evaluación, mientras los grupos están definidos en orden preferencial del más al menos preferido. Por razones de simplicidad, de aquí en adelante se usará el término “clasificación”, sin embargo, la distinción entre evaluación y clasificación se hará cuando sea necesario.

Finalmente, Doumpos y Zopounidis (2002) enfatizan en la diferencia entre la clasificación y el agrupamiento (clustering); en clasificación los grupos son definidos a priori, mientras que en agrupamiento, el objetivo es identificar los grupos (clusters) de alternativas que comparten características similares. En otras palabras, en los problemas de clasificación el analista conoce de antemano como los resultados del análisis deben organizarse, mientras que en el agrupamiento, el analista trata de organizar el conocimiento incorporado en los datos en la forma más apropiada de acuerdo a alguna medida de similitud.

## 2.2. Enfoque Relacional

En esta sección se tratan métodos pertenecientes a la escuela descriptiva o constructiva (Navarro, 2005). Entre los procedimientos más importantes de esta escuela se encuentran los métodos basados en la relación de sobreclasificación (outranking). De acuerdo con Navarro (2005), el concepto de sobreclasificación tuvo orígenes en las dificultades encontradas en diversos problemas concretos (Laffy, 1966; Buffet *et al.*, 1967; Abguegoen, 1971; Bêtolaud y Férvrier, 1973; Charpentier y Jacquet-Lagrèze, 1976). Desde entonces han sido desarrolladas numerosas aplicaciones (Climaco *et al.*, 1988; Martel y Nadeau, 1988; Roy *et al.*, 1986; Roy, 1996). Dentro de estos métodos quizás los más relevantes son los denominados métodos ELECTRE, considerados como parte de una filosofía de ayuda a la decisión. ELECTRE fue concebido por Bernard Roy

(en sus diversas formas) e implementa el concepto de relación de “outranking” o de sobreclasificación. Las diferentes versiones de los métodos ELECTRE se apoyan en los mismos conceptos fundamentales y difieren en diversas características y en el tipo de problema de decisión al que se aplican. Existen nueve versiones de los métodos ELECTRE: I, II, III, IV, TRI, TRI-B, TRI-C, TRI-NC e IS (*cf.* Figueira *et al.*, 2005; Zopounidis y Pardalos, 2010).

### 2.2.1. Notaciones y definiciones preliminares

De acuerdo con Navarro (2005), para entender cuál es la filosofía de los métodos ELECTRE y qué clase de problemas puede resolver, es necesario especificar los supuestos iniciales y que se utilizan en el presente trabajo.

Existe un conjunto potencial de acciones (o alternativas),  $A = \{a, b, c, \dots\}$  a considerar. Tales acciones no son necesariamente excluyentes. Cada una de ellas está perfectamente identificada, pero no necesariamente conocida de manera exacta en todas sus consecuencias cuantitativas o cualitativas (Roy, 1991).

Existe una familia consistente de criterios  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  (Bouyssou, 1990), mediante los cuales se caracteriza cada una de las acciones y pueden analizarse sus consecuencias.  $g_i(x_j)$  caracteriza la evaluación hecha (con mayor o menor precisión o subjetividad) de una acción sobre el  $i$ -ésimo criterio, siendo  $E_j$  el conjunto de consecuencias posibles del  $j$ -ésimo criterio. De manera formal tenemos que:  $g_j: x \in A \Rightarrow e = g_j(x) \in E_j$ .

Siguiendo a Navarro (2005), los métodos ELECTRE implementan el concepto de relación de sobreclasificación ( $S$ ). Diremos que  $xSy$  si tomando en cuenta el conjunto de criterios se tienen argumentos suficientemente fuertes (poder de la coalición de concordancia) para considerar verdadero el enunciado “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ” y se carece de argumentos de peso (debilidad de la coalición discordancia) para refutar esa afirmación. Diremos que si los argumentos a favor de la proposición “ $x$

es al menos tan buena como  $y$ ” no son suficientes (debilidad de la coalición de concordancia), o si existen razones fuertes (existencia de una coalición de veto, forma de poder de la coalición de discordancia) que se opongan a ella, siendo  $\neg$  el operador lógico para la negación.

Otra forma de definir la relación  $S$  es a través de la definición previa de un “sistema relacional de preferencias” formado por cuatro relaciones fundamentales (Roy, 1996; Öztürké *et al.*, 2005):

- Indiferencia ( $I$ ):  $xIy$  significa que existen razones claras y positivas para considerar ambas alternativas equivalentes.  $I$  es una relación simétrica.
- Preferencia estricta ( $P$ ):  $xPy$  significa que existen razones claras y positivas para justificar que una alternativa ( $x$ ) es significativamente preferida a la otra ( $y$ ).  $P$  es una relación asimétrica.
- Preferencia débil ( $Q$ ):  $xQy$  refleja una situación de duda entre  $xPy$  y  $xIy$ . Es una relación asimétrica.
- Incomparabilidad ( $R$ ):  $xRy$  las alternativas son incomparables en el sentido que ninguna de las tres situaciones anteriores predomina.

Entonces, la equivalencia  $xPy \vee xQy \vee xIy \Leftrightarrow xSy$  sirve como definición de la relación de sobreclasificación  $S$ .

Note que:

$$xSy \wedge ySx \Leftrightarrow xIy;$$

$$xSy \wedge y\neg Sx \Leftrightarrow xPy \vee xQy;$$

$$x\neg Sy \wedge y\neg Sx \Leftrightarrow xRy$$

En adelante y sin perder generalidad, se considera que el sentido de la preferencia es el incremento numérico de la imagen de las funciones criterio.

Criterios verdaderos: Es la forma más simple de los criterios, donde no existen umbrales, y las diferencias entre los valores de los criterios se utilizan para determinar cuál acción se prefiere.

Se dice que la acción “ $x$ ” es preferida a la acción “ $y$ ” con respecto al  $i$ -ésimo criterio si su valor es superior, es decir:

$$xP_iy \Leftrightarrow g_i(x) > g_i(y)$$

Se dice que la acción “ $x$ ” es indiferente a la opción “ $y$ ” con respecto al  $i$ -ésimo criterio si sus valores son iguales, es decir:

$$xI_iy \Leftrightarrow g_i(x) = g_i(y)$$

Pseudo-criterios: Un pseudo-criterio reconoce dos tipos de umbrales de discriminación para las diferencias de sus valores. La utilización del valor de un criterio verdadero para modelar las preferencias es con frecuencia poco realista. La realidad demuestra que existe una zona intermedia dentro de la cual la información preferencial es contradictoria o indeterminada. Esto da fundamento a la utilización de dos umbrales ( $\varphi$ ,  $\varepsilon$ ) para modelar los diferentes niveles de preferencias en cada criterio. Primero, un umbral de indiferencia  $\varphi$ , dentro del cual el DM muestra indiferencia, y segundo, un umbral de preferencia  $\varepsilon$ , encima del cual el DM expresa una preferencia estricta (sin lugar a duda). En medio se encuentra una zona que representa una situación de preferencia débil. Las expresiones que aparecen a continuación muestran el rol de los umbrales:

$$xP_iy \Leftrightarrow g_i(x) > g_i(y) + \varepsilon(g_i(y))$$

$$xQ_iy \Leftrightarrow g_i(y) + \varepsilon(g_i(y)) \geq g_i(x) > g_i(y) + \varphi(g_i(y))$$

$$xI_iy \Leftrightarrow g_i(y) + \varphi(g_i(y)) \geq g_i(x) \text{ y } g_i(x) + \varphi(g_i(x)) \geq g_i(y)$$

### 2.2.2. Relación de sobreclasificación “borrosa”

En esta sección se proveerá un esquema acerca de cómo construir la relación de sobreclasificación borrosa  $S$  de cada par de acciones  $(x, y)$ . Esta relación borrosa asocia un nivel o grado de credibilidad de la sobreclasificación, que se identifica mediante la notación  $\sigma(x, y)$  y cumple que  $0 \leq \sigma(x, y) \leq 1$ . A continuación se explica brevemente cómo se define esta relación.

La proposición  $xSy$  (“ $x$  sobreclasifica  $y$ ”) se mantiene si, el DM posee los suficientes argumentos a favor de “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ” y no existen argumentos lo suficientemente fuertes en contra de ella (Fernández *et al.*, 2012).

Recordando las notaciones de la Sección 2.2.1, consideremos un conjunto finito de acciones  $A = \{a, b, c, \dots\}$  y cada acción se encuentra caracterizada por una familia de criterios  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ . Cada criterio  $g_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , puede estar asociado a umbrales de indiferencia, preferencia, pre-veto o discordancia (sólo si se emplea la simplificación sugerida por Mousseau y Dias, 2004), veto y pesos denotados como  $q_j$ ,  $p_j$ ,  $u_j$ ,  $v_j$  y  $w_j$ , respectivamente (Fernández *et al.*, 2012); además pueden definirse parámetros para el refuerzo de las preferencias que consisten en los vectores de valores asociados al umbral de reforzamiento de preferencia denotado por  $rp_j$  y un factor de refuerzo definido como  $k_j$  (Roy y Słowiński, 2008).

La construcción de la relación de sobreclasificación se encuentra basada en dos conceptos principales conocidos como concordancia y discordancia (Figueira *et al.*, 2005).

- *Concordancia.* Existe una suficiente mayoría de criterios a favor de la aserción  $xSy$ .
- *Discordancia.* Cuando se mantiene la condición de concordancia, ninguno de los criterios en la minoría debe oponerse fuertemente a la aserción  $xSy$ .

La relación de sobreclasificación  $xSy$  se caracteriza por el índice de credibilidad

$\sigma(x, y)$ , este puede ser expresada por la siguiente equivalencia lógica (Perny, 1998).

$$xSy \Leftrightarrow C(x, y) \wedge \neg D(x, y) \quad (2.1)$$

donde  $C(x, y)$  es el predicado que representa el grado de mayoría entre los criterios a favor de la aserción “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ”,  $D(x, y)$  es el predicado acerca de la fuerza de la coalición de discordancia,  $\wedge$  y  $\neg$  son conectores lógicos para la conjunción y negación, respectivamente.

Usando el operador “producto” para la conjunción, el grado de credibilidad de  $xSy$  se calcula:

$$\sigma(x, y) = C(x, y) \cdot Nd(x, y) \quad (2.2)$$

El grado de concordancia es definido como sigue (Perny, 1998):

$$C(x, y) = \sum_{j=1}^n w_j c_j(x, y) \quad (2.3)$$

donde  $w_j$  es el peso para el  $j$ -ésimo criterio y  $c_j$  representa la credibilidad marginal donde el criterio  $j$ -ésimo está a favor de la aserción  $xSy$ ; este índice se calcula como sigue:

$$c_j(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \in C(yPx) \\ (g_j(x) - g_j(y) + p_j)/(p_j - q_j), & \text{si } j \in C(yQx) \\ 1, & \text{si } j \in C(xSy) \end{cases} \quad (2.4)$$

donde:

- $C(yPx) = \{g_j \in G: g_j(x) \leq g_j(y) - p_j\}$ ;
- $C(yQx) = \{g_j \in G: g_j(y) - p_j \leq g_j(x) < g_j(y) - q_j\}$ ;
- $C(xSy) = \{g_j \in G: g_j(x) \geq g_j(y) - q_j\}$ .

El  $Nd(x, y)$  denota el grado de verdad del predicado de no-discordancia y se calcula como sigue:

$$Nd(x, y) = \min_{j \in C(yPx)} [1 - d_j(x, y)] \quad (2.5)$$

donde el grado de discordancia  $d_j(x, y)$  se define como

$$d_j(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } \Delta_j \geq v_j \\ (\Delta_j - u_j)/(v_j - u_j), & \text{si } u_j < \Delta_j < v_j \\ 0, & \text{si } \Delta_j \leq u_j \end{cases} \quad (2.6)$$

donde  $\Delta_j = g_j(y) - g_j(x)$  y se calcula para todo criterio que pertenezca a la coalición de concordancia  $C(yPx)$ .

El índice de credibilidad  $\sigma(x, y)$  es calculado al combinar las ecuaciones 2.3-2.6 con la ecuación 2.2. Así, los siguientes vectores de parámetros deben especificarse:

1. umbral de indiferencia ( $q_j$ );
2. umbral de preferencia ( $p_j$ );
3. umbral de discordancia o pre-veto ( $u_j$ );
4. umbral de veto ( $v_j$ );
5. pesos ( $w_j$ );

Adicionalmente, si se construye una relación de sobreclasificación precisa sobre  $A$ , entonces un nivel de corte  $\lambda$  también debe especificarse.

$$xSy \Leftrightarrow \sigma(x, y) \geq \lambda \quad (2.7)$$

Finalmente, si se desea aplicar el método propuesto por Roy y Słowiński (2008) y utilizar los umbrales de refuerzo de preferencia, se tendrá entonces que definir los valores de los vectores  $rp_j$  y  $k_j$ .

### 2.2.3. Método THESEUS

Como se mencionó al término de la Sección 2.1, el presente trabajo de investigación hace uso de este método como DM artificial y su regla de asignación como un operador de evaluación para cada individuo en el algoritmo evolutivo descrito en apartados siguientes.

Creado por Fernández y Navarro (2011), este método se basa en la relación de sobreclasificación borrosa para la problemática de evaluación multicriterio. Este método compara todas las posibles asignaciones (una acción contra otro elemento perteneciente a un conjunto de categorías ordenadas previamente definidas) con la información de varias relaciones de preferencia derivadas de una relación de sobreclasificación borrosa definida en el conjunto de acciones. La apropiada asignación se determina al resolver un problema de selección.

THESEUS sugiere un subconjunto de categorías ( $C_{sug}(x_j)$ ) como posibles clasificaciones para un objeto  $x_j$  basándose en la consideración del conjunto de categorías  $C_k, \dots, C_M$  ( $k = 1, \dots, M$ ) como posibles clases donde  $x_j$  puede asignarse mediante modelos de relaciones de preferencia e indiferencia y resolviendo un problema multiobjetivo. Los autores Fernández y Navarro (2011) declaran las siguientes definiciones: sea  $\sigma(x, y)$  la relación de sobreclasificación borrosa definida en  $A \times A$  y considerando un valor real  $\lambda > 0,5$ .

**Definición 1.** *En el universo, se definen las siguientes relaciones binarias precisas (no borrosas) mediante las siguientes expresiones:*

$$\begin{aligned}
 (x, y) \in S(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y) \geq \lambda \text{ (} \lambda \text{ - sobreclasificación)} \\
 (x, y) \in P(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x) < 0,5 \text{ (} \lambda \text{ - preferencia estricta)} \\
 (x, y) \in Q(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y) \geq \lambda \wedge 0,5 \leq \sigma(y, x) < \lambda \text{ (} \lambda \text{ - preferencia débil)} \\
 (x, y) \in I(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x) \geq \lambda \text{ (} \lambda \text{ - indiferencia)} \\
 (x, y) \in R(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y) < \lambda \wedge \sigma(y, x) < \lambda \text{ (} \lambda \text{ - incomparabilidad)} \tag{2.8}
 \end{aligned}$$

**Definición 2.** *Se dice que un conjunto de referencia  $T$  cubre  $C_t$  si para cada  $C_k \in C_t$  existe al menos un  $y \in T \ni C(y) = C_k$ .*

De acuerdo con THESEUS, debe de existir al menos un elemento en cada categoría en el conjunto de referencia o entrenamiento  $T$  (Definición 2). Ahora,  $C(x)$  denota

una asignación potencial de la acción  $x$  y  $C(y)$  es la asignación actual de  $y$ ,  $C(x)$  debe satisfacer las ecuaciones 2.9a, 2.9b, 2.9c.

$$\forall x \in A, \forall y \in T$$

$$\begin{aligned} xP(\lambda)y \Rightarrow C(x) \succsim C(y) &\Leftrightarrow C(x) \geq C(y) \\ yP(\lambda)x \Rightarrow C(y) \succsim C(x) &\Leftrightarrow C(y) \geq C(x) \end{aligned} \quad (2.9a)$$

$$\begin{aligned} xQ(\lambda)y \Rightarrow C(x) \succsim C(y) &\Leftrightarrow C(x) \geq C(y) \\ yQ(\lambda)x \Rightarrow C(y) \succsim C(x) &\Leftrightarrow C(y) \geq C(x) \end{aligned} \quad (2.9b)$$

$$xI(\lambda)y \Rightarrow C(x) \succsim C(y) \geq C(y) \succsim C(x) \Leftrightarrow C(x) = C(y) \quad (2.9c)$$

donde  $\succsim$  significa que el DM sostiene que la alternativa “ $x$ ” es al menos tan buena como “ $y$ ”; operacionalmente, no se sentiría defraudado si se le forzara a tomar “ $x$ ” (preferencia débil).

Es necesario notar que  $C(x)$  es una variable cuyo dominio es el conjunto de categorías ordenadas. Las expresiones 2.9a, 2.9b y 2.9c expresan la necesaria consistencia entre el modelo preferencial, el conjunto de referencia y la apropiada asignación de  $x$ . La asignación de  $C(x)$  debe de ser lo más compatible posible con el actual conocimiento acerca de las políticas de asignación.

THESEUS usa las inconsistencias con las expresiones 2.9a, 2.9b y 2.9c para comparar las posibles asignaciones de  $x$ , específicamente:

- El conjunto  $P(\lambda)$ -inconsistencias para  $x$  y  $C(x)$  se define como
 
$$D_P = \{(x, y), (y, x), y \in T : 2.9a \text{ es FALSO}\};$$
- el conjunto  $Q(\lambda)$ -inconsistencias para  $x$  y  $C(x)$  se define como
 
$$D_Q = \{(x, y), (y, x), y \in T : 2.9b \text{ es FALSO}\};$$
- el conjunto  $I(\lambda)$ -inconsistencias para  $x$  y  $C(x)$  se define como
 
$$D_I = \{(x, y), y \in T : 2.9c \text{ es FALSO}\}.$$

Algunas  $I(\lambda)$ -inconsistencias pueden explicarse por la “discontinuidad” de la descripción basada en el conjunto de categorías; se denominan inconsistencias de segundo orden; se agrupan en el conjunto  $D_{2I}$  y corresponden al siguiente escenario  $xI(\lambda)y \wedge |k - j| = 1$ ; por otra parte, las demás  $I(\lambda)$ -inconsistencias pertenecen al conjunto llamado de primer orden y se encuentran contenidas en  $D_{1I} = D_I - D_{2I}$ . Sea  $n_P, n_Q, n_{1I}, n_{2I}$  la cardinalidad de los conjuntos de inconsistencias definidas anteriormente. Entonces se definen  $N_1 = n_P + n_Q + n_{1I}$  y  $N_2 = n_{2I}$ , THESEUS sugiere una asignación que minimice las inconsistencias anteriores mediante prioridad lexicográfica favoreciendo  $N_1$ , como criterio con mayor importancia y en caso de empate, usar  $N_2$  para desempatar. La regla básica de asignación es:

1. Asignar el mínimo nivel de credibilidad  $\lambda > 0,5$ .
2. Empezar con  $k = 1, \dots, M$  y considerar cada  $y_{k,h} \in T$ , calcular  $N_1(C_k)$ .
3. Identificar el conjunto  $\{C_j\}$  cuyos elementos mantengan  $C_j = \operatorname{argmin}_{\{C_j\}} N_1(C_k)$ .
4. En caso de que  $\operatorname{card}(\{C_j\}) > 1$ , identificar el conjunto  $C_{k^*} = \operatorname{argmin}_{\{C_j\}} N_2(C_i)$ .
5. Si  $C_{k^*}$  es una sola solución, asignar  $x_j$  a  $C_{k^*}$ ; otras situaciones son descritas a continuación.

La sugerencia puede ser una sola categoría o una secuencia de categorías. En el primer caso se trata de una asignación bien definida; de otra forma, la solución obtenida refleja la mayor categoría ( $C_H$ ) y la menor categoría ( $C_L$ ) que son aceptables para asignar dicha acción, pero falla en determinar la más apropiada.

### 2.3. Análisis de desagregación de preferencias

Una de las principales dificultades, menciona Mousseau y Słowiński (1998), que el analista debe enfrentar cuando interactúa con el DM con el objetivo de construir

un procedimiento de ayuda a la decisión, es la obtención de los parámetros del modelo preferencial del DM (definidos en la Sección 2.2.2). Los valores asignados a estos parámetros determinarán cómo debe integrarse la información multicriterial en la evaluación de las alternativas. Dias *et al.* (2002) consideran que el DM, en el proceso de decisión, está inseguro acerca de cuál valor asignar a cada parámetro; dicha inseguridad puede resultar de desconocimiento, incertidumbre, información imprecisa o inadecuada, así como por falta de consenso entre grupos de actores en el rol de DM.

Con el fin de obtener los valores de estos parámetros, Doumpos *et al.* (2009) mencionan que existen dos formas, los procedimientos de obtención directa e indirecta. En el primer caso, el DM debe especificar los valores de los parámetros preferenciales mediante un proceso interactivo guiado por el analista de la decisión. Algunos autores (*cf.* Jacquet-Lagrèze y Siskos, 1982; Belton y Vickers, 1990; Bana e Costa y Vansnick, 1994; Mousseau, 1995) han propuesto técnicas para la representación de preferencias (Preference Elicitation Techniques, PETs) que ayudan al analista en la asignación de valores a los parámetros preferenciales. Normalmente las PETs proceden directamente mediante un interrogatorio y “traducen” las respuestas del DM en valores de los parámetros preferenciales mediante la aplicación de alguna regla de agregación específica (Dias *et al.*, 2002).

De acuerdo con Doumpos *et al.* (2009), en algunos casos los procedimientos directos pueden ser aplicables, principalmente cuando la decisión involucra opciones estratégicas de carácter no repetitivo. En otros casos, cuando es necesario tomar decisiones en tiempo real, tales procedimientos no pueden ser aplicados. De acuerdo con Mousseau y Słowiński (1998), no es realista (aparte de algunos casos específicos) asumir que el DM será capaz de brindar explícitamente los valores de estos parámetros. Son muy diferentes de los términos naturales en los cuales el DM normalmente expresa sus preferencias y experiencia, por lo tanto se asume que el DM tiene una idea de los valores que pudiesen tener los parámetros, pero proveerlos específicamente es usualmente una tarea muy ardua. Esta dificultad se debe a restricciones de tiempo

y/o a la renuencia de los DMs en participar activamente en el proceso interactivo que pudiera conducir a la asignación de los parámetros. Los métodos directos han sido criticados recientemente de manera severa. Por ejemplo, Marchant (2010) asegura que la única información válida sobre las preferencias del DM dimana de la expresión de las mismas al comparar o evaluar objetos.

La segunda forma, definida por Doumpos *et al.* (2009) (los procedimientos indirectos) son los relacionados con los llamados análisis de desagregación de preferencias; métodos de regresión para inferir un conjunto de parámetros de un conjunto de ejemplos de decisión o referencia (en adelante para referirnos a estos métodos emplearemos las siglas PDA del inglés “Preference Disaggregation Analysis” y nos referiremos a los ejemplos de decisión como conjunto o núcleo de referencia).

Los cimientos de PDA se han establecido por investigadores en un intento de desarrollar técnicas de regresión no-paramétricas usando formulaciones tipo “goal-programming”. Los primeros estudios de este problema fueron hechos durante los 1950s por Karst (1958); Kelley (1958); Wagner (1959). Durante los 1970s Srinivasan y Shocker (1973) usaron formulaciones mediante “goal-programming” para el desarrollo de modelos de regresión ordinal. A finales de los 1970s y a inicios de los 1980s, Jacquet-Lagrèze y Siskos (Jacquet-Lagrèze y Siskos, 1978, 1982, 1983) introdujeron el concepto de PDA para los propósitos de ayuda a la decisión mediante el desarrollo del método UTA (UTilités Additives). Una revisión del enfoque metodológico de MCDA y el desarrollo hecho a través de las pasadas dos décadas es presentada en el trabajo de Jacquet-Lagrèze y Siskos (2001).

El objetivo de PDA según Doumpos y Zopounidis (2002) es analizar este conjunto de referencia para la especificación de los parámetros del modelo del modo más compatible con las políticas del DM, y proveer una mayor flexibilidad con respecto a la expresión de estas decisiones. En consecuencia, este enfoque minimiza el esfuerzo cognitivo requerido por el DM, así como el tiempo requerido para la implementación del proceso a la ayuda a la decisión; en otras palabras, hace la tarea de definición de los

valores de los parámetros tan simple como sea posible para el DM (Jacquet-Lagrèze y Siskos, 2001; Doumpos *et al.*, 2009).

El núcleo de referencia es el equivalente a los ejemplos de entrenamiento en estadística (*cf.* McLachlan, 2004). Inferir una forma de conocimiento a partir de ejemplos de expertos es un enfoque típico de econometría e inteligencia artificial. Inducción de reglas o árboles de decisión en aprendizaje automático (machine learning) (*cf.* Michalski, 1983; Breiman, 1984; Quinlan, 1986, 1993), adquisición de conocimiento basado en “rough sets” (*cf.* Grzymala-Busse, 1992; Słowiński, 1992; Pawlak y Słowiński, 1994), aprendizaje supervisado con redes neuronales (*cf.* Weiss y Kulikowski, 1991; Gallant, 1993; Ripley, 1996) son representantes reconocidos de este enfoque. Si bien todos estos enfoques usan el conocimiento existente representado en conjuntos de referencia para el desarrollo de modelos, cada uno de ellos emplea diferentes filosofías en el manejo de los problemas de clasificación. El atractivo de este enfoque es que el experto se encuentra típicamente más confiado ejerciendo sus decisiones que explicándolas (Doumpos y Zopounidis, 2004).

Este núcleo de referencia incorpora toda la información preferencial requerida para desarrollar un modelo para la ayuda a la decisión. Este núcleo, de acuerdo con Mousseau y Słowiński (1998), se refiere a un conjunto  $A^* \subset A$  de acciones donde el DM puede expresar preferencias; en el caso de evaluación/clasificación, acciones para las que el DM puede fácilmente asignar una categoría, tomando en cuenta la evaluación en todos los criterios.

Según Jacquet-Lagrèze y Siskos (2001) estos conjuntos de referencia  $A^*$  usualmente pueden ser:

1. un conjunto de alternativas con una decisión pasada asociada ( $A^*$  - acciones pasadas);
2. un subconjunto de acciones, especialmente cuando  $A$  es grande ( $A^* \subset A$ );
3. un conjunto de acciones ficticias, que consisten en representaciones de criterios

los cuales pueden ser fácilmente juzgados por el DM para realizar una comparación global ( $A^*$  - acciones ficticias).

En cada uno de los casos anteriormente descritos, el DM es cuestionado con el objetivo de que exteriorice y/o confirme sus preferencias globales en el conjunto  $A^*$ , tomando en consideración las capacidades del conjunto de referencia en todos los criterios. Normalmente, la forma con la que se representan estas preferencias globales son las siguientes:

- juicios cuantificables en  $A^*$ ,
- ranking (relación de orden débil) en  $A^*$  (problemática  $\gamma$ ),
- relación binaria y
- un ordenamiento de acciones en el conjunto de referencia (problemática  $\beta$ ).

Para obtener un modelo representativo, el subconjunto  $A^*$  debe ser definido tal que el número de las alternativas asignadas a la categoría sean lo más iguales y lo suficientemente amplio para “contener información suficiente”. El DM puede afinar el modelo en el curso de un procedimiento interactivo. Él/ella pudiese revisar núcleo de referencia o fijar valores (o intervalos de variación) para algún conjunto de parámetros del modelo. En el caso anterior, el DM puede:

- remover y/o agregar algunas alternativas de/para  $A^*$ ,
- cambiar la asignación de algunas alternativas de  $A^*$ .

En el último caso, el DM puede brindar información adicional en el rango de variación de algunos parámetros del modelo basado en su propia intuición. Por ejemplo, él/ella puede especificar:

- información ordinal en la importancia de los criterios,

- definir diferencias notables en la escala de los criterios,
- definición incompleta de algunas características del modelo.

Cuando el modelo no es perfectamente compatible con el conjunto de referencia, el procedimiento debe de ser capaz de detectar todos estos “casos difíciles”, *i.e.*, las alternativas para el cual la asignación que realiza el modelo diere fuertemente de la asignación del DM; es entonces cuando se le recomienda al DM reconsiderar su juicio.

Doumpos *et al.* (2009) mencionan que una vez obtenidos los parámetros del modelo, si estos se encuentran en concordancia con el sistema preferencial actual del DM, entonces el modelo puede ser aplicado directamente a las nuevas instancias de decisión (un conjunto de acciones sobre las cuales se desea decidir). Por otro lado, si el modelo es consistente con el conjunto de referencia, pero los parámetros son inconsistentes con el sistema preferencial del DM (lo cual puede pasar si, *e.g.*, el conjunto de referencia es inadecuado), entonces el DM tiene un punto de partida con el cual él/ella puede proveer recomendaciones al analista acerca de los parámetros del modelo. Entonces, el objetivo en PDA es el desarrollo de un marco de trabajo general, el cual puede ser usado para analizar las decisiones realizadas por el DM, y para la construcción de un modelo lo más apegado a las preferencias del DM (Doumpos y Zopounidis, 2002).

Esencialmente, PDA emplea un proceso de ayuda a la decisión opuesto a muchas aplicaciones de la teoría de la utilidad multiatributo (Multiattribute utility theory, MAUT) y la teoría de la relación de sobreclasificación (Outranking Relation Theory, ORT), en que el DM especifica todos los parámetros del modelo con la ayuda del analista el cual está familiarizado con la metodología que desea emplear (*cf.* Figura 2.3).

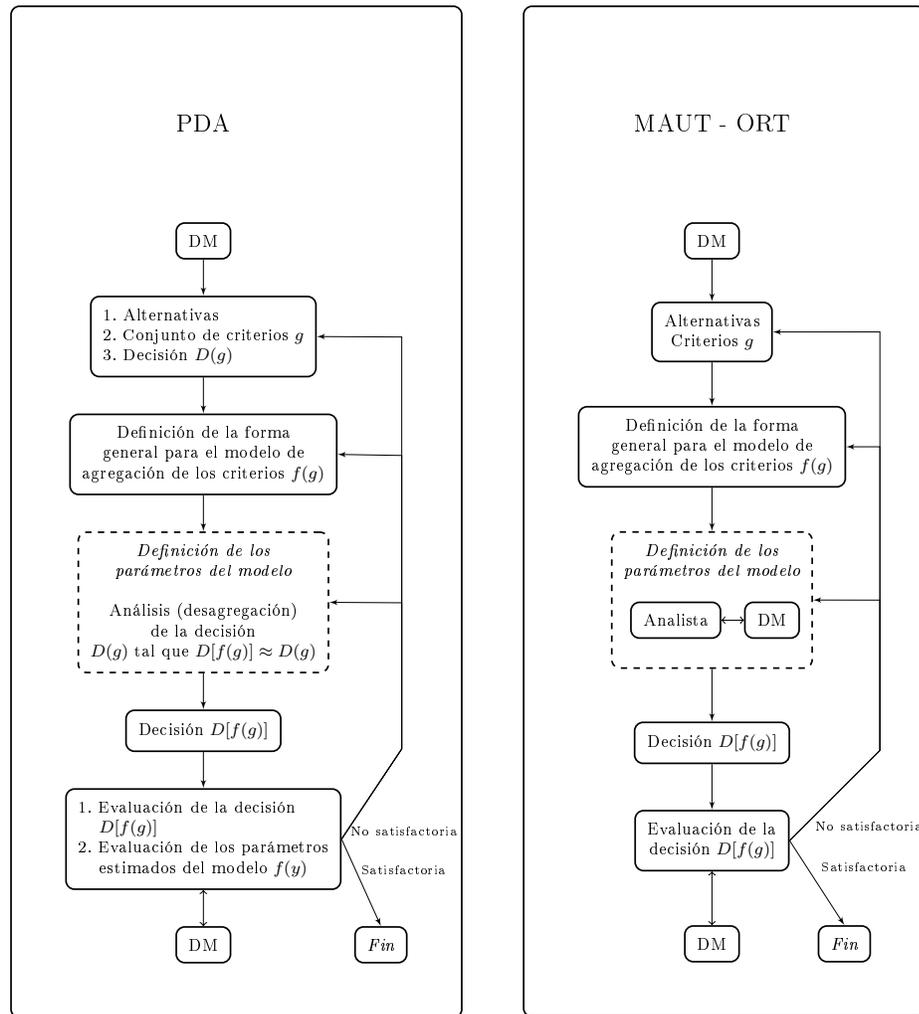


Figura 2.3: Proceso de decisión de PDA comparado con MAUT y ORT.

Como se puede observar han existido una gran cantidad de trabajos relacionados al marco de trabajo PDA; uno de los principales inconvenientes del uso de esta filosofía es inferir todos los parámetros del modelo de sobreclasificación de manera simultánea, lo que requiere la solución de complejos problemas de optimización no-lineales (Mousseau y Słowiński, 1998; Dias y Mousseau, 2006). Por esta razón se han realizado distintos trabajos para la inferencia de ciertos parámetros en un sub-problema simplificado. Por ejemplo, en Mousseau *et al.* (2001), se considera solo la inferencia de los pesos para el cálculo de la relación de sobreclasificación usado por el método

para resolver el problema de clasificación ELECTRE TRI, lo que lleva a resolver un problema lineal. Otro ejemplo es el propuesto por Dias y Mousseau (2006), donde se busca inferir un subconjunto de parámetros a la vez, mientras los demás se mantienen fijos y cuyo objetivo de este problema de inferencia “parcial” es simplificar la complejidad matemática.

Como se puede observar han existido una gran cantidad de trabajos relacionados con el marco de trabajo PDA; uno de los principales inconvenientes del uso de esta filosofía es inferir todos los parámetros del modelo de sobreclasificación de manera simultánea, lo que requiere la solución de complejos problemas de optimización no-lineales (Mousseau y Słowiński, 1998; Dias y Mousseau, 2006). Por esta razón se han realizado distintos trabajos para la inferencia de ciertos parámetros en un subproblema simplificado. Por ejemplo, en Mousseau *et al.* (2001), se considera solo la inferencia de los pesos para el cálculo de la relación de sobreclasificación usado por el método para resolver el problema de clasificación ELECTRE TRI, lo que lleva a resolver un problema lineal. Otro ejemplo sería el propuesto por Dias y Mousseau (2006), donde se busca inferir un subconjunto de parámetros a la vez, mientras los demás se mantienen fijos y cuyo objetivo de este problema de inferencia “parcial” es simplificar la complejidad matemática.

Dos trabajos recientes examinan el problema de inferencia de parámetros del modelo de sobreclasificación mediante técnicas evolutivas, ambas dentro del contexto de los problemas de clasificación multicriterio (*cf.* Doumpos *et al.*, 2009; Fernández *et al.*, 2009). En años recientes, los algoritmos evolutivos se han convertido en poderosas herramientas para resolver problemas difíciles en una variedad de campos, en particular, para el tratamiento de la no-linealidad y optimización global en tiempo polinomial (*cf.* Coello *et al.*, 2007). Doumpos *et al.* (2009) usan un algoritmo evolutivo diferencial para inferir los valores de los parámetros para el método ELECTRE TRI. Fernández *et al.* (2009) proponen un algoritmo evolutivo multiobjetivo para inferir los parámetros para un modelo de relación de indiferencia difusa para clasificación

multicriterio.

La presente investigación se encuentra enfocada al análisis de la robustez del método PDA propuesto por Fernández *et al.* (2012) y se analiza el enfoque multiobjetivo descrito en Fernández *et al.* (2012) para inferir los parámetros del modelo de sobreclasificación.

### 2.3.1. Enfoque multiobjetivo para inferir los parámetros del modelo

En la presente sección se define el modelo utilizado por el PDA evolutivo para inferir los parámetros. Siguiendo las asunciones y notaciones descritas en la Sección 2.2.1, consideramos una familia consistente de criterios  $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  definida en el conjunto de acciones  $A = \{a, b, c, \dots\}$ . Los autores Fernández *et al.* (2012) declaran las siguientes premisas:

**Asunción 1.** *El DM es capaz de proveer un conjunto de referencia  $T \subset A \times A$  compuesto por pares de acciones  $(x, y)$  satisfaciendo la siguiente propiedad:  $\forall (x, y) \in T$ , uno de los dos siguientes enunciados es verdad*

$$\begin{aligned} x \succsim y \\ \neg x \succsim y \end{aligned}$$

Ahora, se considera como  $\sigma(x, y)$  depende de un establecimiento específico de parámetros preferenciales (descritos en la Sección 2.2.2). Denotemos como  $P$  el conjunto de parámetros preferenciales a ser inferidos. Así, la valoración del grado de credibilidad para “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ” es una función  $\sigma(x, y, P^*)$ .

**Asunción 2.** *Consideremos un valor real  $\lambda \geq 0,5$ ; las expresiones 2.10 definen un grupo de relaciones binarias no-borrosas sobre el universo  $T$ , donde denota una asig-*

nación específica de parámetros preferenciales.

$$\begin{aligned}
(x, y) \in S(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y, P^*) \geq \lambda \text{ (}\lambda\text{-sobreclasificación)} \\
(x, y) \in P(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y, P^*) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x, P^*) < 0,5 \text{ (}\lambda\text{-preferencia estricta)} \\
(x, y) \in Q(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y, P^*) \geq \lambda \wedge 0,5 \leq \sigma(y, x, P^*) < \lambda \text{ (}\lambda\text{-preferencia débil)} \\
(x, y) \in I(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y, P^*) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x, P^*) \geq \lambda \text{ (}\lambda\text{-indiferencia)} \\
(x, y) \in R(\lambda) & \text{ ssi } \sigma(x, y, P^*) < \lambda \wedge \sigma(y, x, P^*) < \lambda \text{ (}\lambda\text{-incomparabilidad)} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

De acuerdo con Fernández *et al.* (2012), un modelo de preferencia perfectamente consistente es reflejado por la equivalencia 2.11.

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in T \\
\sigma(x, y, P^*) \geq \lambda \Leftrightarrow xSy \quad (2.11)
\end{aligned}$$

Usando las  $\lambda$ -relaciones descritas anteriormente (expresiones 2.10), 2.11 puede transformarse en

$$\begin{aligned}
\forall (x, y) \in T \\
xP(\lambda)y \Rightarrow x \succsim y \quad (2.12)
\end{aligned}$$

$$xQ(\lambda)y \Rightarrow x \succsim y \quad (2.13)$$

$$xI(\lambda)y \Rightarrow x \succsim y \quad (2.14)$$

$$x \succsim y \Rightarrow xS(\lambda)y \quad (2.15)$$

Cuando el modelo  $\sigma$  sugiere una preferencia a favor de  $x$  sobre  $y$ , el enunciado “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ” es más creíble. La implicación 2.12 es más creíble que 2.13 o 2.14.

Las condiciones:

1.  $(x, y) \in P(\lambda)$  con  $\neg x \succsim y$
2.  $(x, y) \in Q(\lambda)$  con  $\neg x \succsim y$

3.  $(x, y) \in I(\lambda)$  con  $\neg x \succsim y$

4.  $(x, y) \in \succsim$  con  $\neg xSy$

se identifican como inconsistencias con  $P(\lambda)$ ,  $Q(\lambda)$ ,  $I(\lambda)$  y  $\succsim$  respectivamente. Tales discrepancias pueden ser interpretadas como errores, desviaciones de  $\sigma(x, y, P^*)$  de un buen modelo para el grado de verdad del predicado “ $x$  es al menos tan buena como  $y$ ”. Esas inconsistencias pueden resultar de la inadecuada definición de los parámetros del modelo.

Se definen los siguientes conjuntos:

- $D_P = \{(x, y) \in P(\lambda) \text{ con } \neg x \succsim y\}$
- $D_Q = \{(x, y) \in Q(\lambda) \text{ con } \neg x \succsim y\}$
- $D_I = \{(x, y) \in I(\lambda) \text{ con } \neg x \succsim y\}$
- $D_{\succsim} = \{(x, y) \in \succsim \text{ con } \neg xSy\}$ .

$n_P$ ,  $n_Q$ ,  $n_I$  y  $n_{\succsim}$  denotan la respectiva cardinalidad de los conjuntos anteriores. Obviamente, tales valores dependen de  $P^*$ .

Seguendo a Fernández *et al.* (2012), se infieren los parámetros del modelo de la mejor solución compromiso al problema de optimización multiobjetivo:

$$\min_{P \in R_F} (n_P, n_Q, n_I, n_{\succsim}) \quad (2.16)$$

donde  $R_F$  es una región factible en el espacio de parámetros.

## 2.4. Algoritmos evolutivos para la optimización multiobjetivo

Como se mencionó anteriormente, el presente trabajo busca analizar la robustez del procedimiento propuesto por Fernández *et al.* (2012) el cual se encuentra basado en un algoritmo evolutivo multiobjetivo (Multi-Objective Evolutionary Algorithm,

MOEA) para la inferencia de los parámetros del modelo de sobreclasificación utilizado por el método ELECTRE III.

Mientras que los problemas del mundo real requieren simultáneamente la optimización de múltiples objetivos, la solución a tales problemas se busca frecuentemente combinando los objetivos en una sola función de agregación o utilidad. Cuando no se dispone de esa función de agregación, el problema debe tratarse en forma de optimización vectorial, intentando localizar el mejor compromiso (la solución final) (Fonseca y Fleming, 1993).

La optimización multiobjetivo (Multiobjective Optimazation, MO) busca la optimización de los valores que componen un vector de costo. A diferencia de la optimización de un solo objetivo, la solución a este problema no es un solo punto, sino una familia de puntos conocidos como el conjunto Pareto-óptimo. Cada punto en esta superficie es óptimo en el sentido que no existe mejora alguna en alguno de los componentes del vector que no lleve a la degradación en alguno de los componentes. Asumiendo, sin pérdida de generalidad, un problema de minimización, las siguientes definiciones aplican:

**Definición 3** (inferioridad). *Un vector  $u = (u_1, \dots, u_n)$  es inferior a  $v = (v_1, \dots, v_n)$  si  $v$  es parcialmente menos que  $u$  ( $v \prec u$ ), e.g.,*

$$\forall i = 1, \dots, n, v_i \leq u_i \wedge \exists i = 1, \dots, n: v_i < u_i$$

**Definición 4** (superioridad). *Un vector  $u = (u_1, \dots, u_n)$  es superior a  $v = (v_1, \dots, v_n)$  si  $v$  es inferior a  $u$ .*

**Definición 5** (no-inferioridad). *Los vectores  $u = (u_1, \dots, u_n)$  y  $v = (v_1, \dots, v_n)$  son no-inferiores entre ellos si  $v$  no es ni inferior ni superior a  $u$ .*

Cada elemento en el conjunto Pareto-óptimo constituye una no solución no-inferior (no-dominada) al problema MO. Al mantener una población de soluciones, los algoritmos genéticos (Genetic Algorithm, GA) son capaces de buscar muchas soluciones

no-dominadas de forma paralela. Esta característica hace de los GAs una buena opción para resolver problemas MO.

Es por ello que la búsqueda de una población de puntos por parte de los GAs, parece especialmente adecuada para la optimización multiobjetivo. Su habilidad para encontrar un óptimo global en problemas con funciones y restricciones muy complejas ha motivado un creciente número de aplicaciones en ingeniería y campos relacionados.

En Horn *et al.* (1994) es posible ver una revisión de los enfoques realizados en la MO con GAs, Horn *et al.* comentan que Schaffer (1985), propuso el método llamado “Vector Evaluated GA (VEGA)” para encontrar múltiples soluciones (vector de valores) para problemas multiobjetivo. Schaffer creó VEGA para encontrar y mantener múltiples reglas de clasificación en el problema de cobertura de conjuntos. VEGA intentó cumplir esta meta al seleccionar una fracción de la generación siguiente usando cada uno de los atributos (*e.g.*, costo, confiabilidad). A pesar de que Schaffer reportó algunos éxitos, VEGA solo fue capaz de encontrar puntos cercanos a los extremos del frente de Pareto, donde un atributo es máximo, incapaz de generar soluciones de compromiso aceptables.

Goldberg (1989) sugirió el uso de una jerarquización no-dominada y selección para mover una población hacia el frente de Pareto en un problema multiobjetivo. Él también sugirió usar estrategias de nicho para evitar que el GA converja a un solo punto en la frontera. Un mecanismo de nicho, así como de partición (*cf.* Goldberg y Richardson, 1987), permitiría al GA mantener individuos a lo largo de la frontera no-dominada.

Fonseca y Fleming (1993) e independientemente Horn *et al.* (1993), implementaron ambas sugerencias propuestas por Goldberg y exitosamente aplicaron los algoritmos resultantes a problemas abiertos. Fonseca y Fleming encontraron buenas compensaciones en los cuatro atributos en el problema de diseño de turbina de gas. Horn y Nafpliotis concentraron en una serie de problemas de dos atributos descritos en Horn *et al.* (1994). Más información puede ser encontrada en Srinivas y Deb (1994); Zitzler

y Thiele (1998); Deb y Kalyanmoy (2001); Coello *et al.* (2007).

El enfoque evolutivo propuesto por Fernández *et al.* (2012) se encuentra basado en el NSGA-II por “Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II” (*cf.* Deb *et al.*, 2002). NSGA-II es uno de los más eficientes enfoques en la literatura en optimización evolutiva multiobjetivo (*cf.* Coello *et al.*, 2007). El Algoritmo 1 describe el funcionamiento este procedimiento.

---

**Algoritmo 1** Non-dominated Sorting Genetic Algorithm-II (NSGA-II)

---

**Entrada:** NSGA-II( $N', g, f_k(x_k)$ )  $\triangleright$   $N'$  miembros a evolucionar,  $g$  generaciones para resolver  $f_k(x_k)$

**Salida:** Población de soluciones no dominadas

- 1: Inicializar Población  $\mathbb{P}'$
  - 2: Generar población aleatoria - tamaño  $N'$
  - 3: Evaluar valores objetivos
  - 4: Asignar nivel de jerarquía basado en la dominancia de pareto - *ordenar*
  - 5: Generar población descendiente
  - 6: Selección por torneo binario
  - 7: Aplicar operadores de cruza y mutación
  - 8: **para**  $i = 1$  hasta  $g$  **hacer**
  - 9:   **para** cada padre y descendiente en la población **hacer**
  - 10:     Asignar nivel de jerarquía basado en la dominancia de pareto - *ordenar*
  - 11:     Generar conjuntos de vectores no dominados a lo largo de  $PF_{conocidos}$
  - 12:     Ciclar (dentro) al agregar soluciones a la siguiente generación empezando por el primer frente hasta  $N'$  individuos encontrados
  - 13:     Calcular la *distancia de aglomeración* entre los puntos en cada frente
  - 14:   **fin para**
  - 15:   Seleccionar puntos (elitismo) en el mejor frente (con mejor nivel de jerarquía)
  - 16:   Generar siguiente generación
  - 17:   Selección por torneo binario
  - 18:   Aplicar operadores de cruza y mutación
  - 19: **fin para**
- 

Este método jerarquiza cada miembro de una población de tamaño  $K$  de acuerdo a los niveles de no-dominancia, aplicando operadores evolutivos (cruza y mutación) para construir una población descendiente, y combina la población padre y descendiente en una nueva población de tamaño  $2K$ . Esta nueva población es jerarquizada en clases

no-dominadas. La siguiente generación de tamaño  $K$  es obtenida al seleccionar los mejores individuos de la combinación entre las generaciones padre y descendiente con el objetivo de mantener la diversidad, una distancia de aglomeración (un estimador de densidad) es asociado a cada individuo. El procedimiento *ordenar y distancia de aglomeración* se encuentran descritos en Deb *et al.* (2002).

## 2.5. Robustez

El objetivo de la presente sección es definir el concepto de robustez utilizado en la investigación. Este término se utiliza con frecuencia en el ámbito de la ayuda a la decisión multicriterio, especialmente en su versión discreta y fue introducido por Roy (*cf.* Roy y Hugonnard, 1982; Roy, 1998). Se ha observado que a partir de los trabajos de Roy (1998), el término de robustez ha sido utilizado con mayor frecuencia en numerosos estudios e investigaciones en el ámbito de la ayuda a la decisión multicriterio. Sin embargo, se suelen atribuir a dicho término significaciones muy diferentes que pueden conducir a interpretaciones y conclusiones erróneas, siendo la más común de ellas, aquella percepción de que si un modelo, método o solución es robusto entonces se cataloga como “bueno” y en caso contrario, este es llamado sensible y catalogado como “malo”, situación que puede ser producto como a menudo ocurre que el conjunto de datos no es único para la representación de una situación; varios conjuntos plausibles de datos existen, posiblemente muy diferentes entre ellos. Por otro lado, este es también el caso de los parámetros usados en los métodos de resolución. Otra percepción errónea común es confundir el proceso de análisis de robustez con el análisis de sensibilidad, este punto en particular se explicará más adelante cuando pasemos a la definición de ambos procesos.

Retomando la cuestión de los parámetros preferenciales del párrafo anterior, Vincke (1999a) menciona que la robustez se encuentra conectada al hecho de que los métodos de ayuda a la decisión a menudo contienen parámetros cuyos valores tienen que

ser elegidos (más o menos de forma arbitraria) por el DM. Intuitivamente, un método será considerado robusto si las soluciones obtenidas de diferentes posibles valores de parámetros no se contradicen unos con otros. Por ello, Vincke (1999b) comenta que todos los investigadores que han tratado con un problema de decisión real saben que los valores numéricos usados en los modelos son cuestionables. Por un lado, este es el caso de la información que describe la situación de decisión, que tradicionalmente llamamos datos. Estos son a menudo valores construidos por el analista de acuerdo al modelo que desea usar: resultan de asunciones acerca del contexto del problema, predicciones de futuros eventos, estimaciones mal conocidas o valores aleatorios.

De acuerdo con Ródenas y Barberis (2003), es necesario caracterizar el análisis de la robustez como una forma de respaldar las conclusiones que proporciona el estudio de cualquier problema de decisión multicriterio, y dirimir las dudas en torno a las diversas concepciones del término robustez. De ahí que resulta importante saber: ¿Qué es la robustez? ¿Respecto de qué estamos estudiando la robustez? y ¿Para qué efectuamos ese estudio?

Siguiendo lo planteado por Ródenas y Barberis (2003), en primer lugar, se debe establecer qué es lo que debe de ser robusto, respecto de qué, *i.e.*, cómo valorar esa robustez y la importancia de la robustez en la teoría de la decisión multicriterio.

La mayoría de las publicaciones que lidian con robustez usan el término “robusto” para caracterizar soluciones. Es lógico pensar que el resultado del análisis de decisión efectuado debe ser robusto, sin embargo, este término también es usado para calificar un enunciado (o una conclusión), modelo o método (*cf.* Vincke, 1999b; Roy, 1998, 2010).

Ródenas y Barberis (2003), mencionan que cualquier método o procedimiento utilizado en el planteamiento de decisión multicriterio tendrá como objeto calcular una solución al problema propuesto. Parece entonces conveniente que los analistas que realizan la ayuda a la decisión multicriterio busquen que las soluciones propuestas como resultado de sus procedimientos y algoritmos sean robustas. Sin embargo, no

todos los investigadores opinan que sólo la solución debe ser robusta ya que también preocupan la robustez del método o procedimiento utilizado y de las conclusiones obtenidas (que dependen a su vez de la solución y del procedimiento empleado).

De acuerdo con Roy (2010), en la investigación de operaciones y en la ayuda a la decisión, los múltiples significados concedidos al término “robusto” se encuentran abiertos a debate. Este tema es discutido en detalle en Newsletter of the European Working Group “Multiple Criteria Decision Aiding” (2002-2009) por las contribuciones de Roy (No. 6), Rosenhead (No. 6), Roy (No. 8), Vincke (No. 8), Rios Insua (No. 9), Sevaux y Sörensen (No. 10), Sayin (No. 11), Aloulou *et al.* (No. 12), Fernández y Barberis (No. 13), Dias (No. 13), Salazar *et al.* (No. 14), Pictet (No. 15), Morton (No. 16), Ruggeri (No. 17), Stewart (No. 18) y Aubry *et al.* (No. 19). Esta variedad de puntos de vista subraya el carácter polisémico de la noción de robustez. Estos múltiples significados son en particular debido al hecho que, dependiendo de la situación, esta noción puede ser relacionada con, o integrada en, la noción de flexibilidad, estabilidad, sensibilidad e inclusive igualdad.

Si tenemos en cuenta que las definiciones varían por los puntos de vista de los investigadores, los procedimientos a utilizar dependen del analista y las conclusiones que se obtienen no obligan ni determinan al DM a tomar la solución obtenida como la mejor ante otras sino que, en general, dan un marco de acción posible, por ello es muy difícil definir objetivamente la robustez.

Así, se considera que la definición y significación del término robustez es fuertemente subjetivo y al mismo tiempo debe de estar en concordancia con el contexto decisional considerado ya se trate de soluciones, métodos o conclusiones robustas.

### **2.5.1. Análisis de robustez**

Entonces, ¿Qué es la robustez? ¿Respecto de qué estamos estudiando la robustez? o ¿Qué es el análisis de robustez? Existen diversos autores que se han dado a la tarea

de definir el análisis de robustez de forma general, entre las definiciones encontramos la propuesta por Ródenas y Barberis (2003), que definen el análisis de robustez como el proceso cuyo objetivo es identificar cuál es el dominio de puntos en el espacio de soluciones para el cual un resultado particular continúa perpetuándose. Otra definición es la propuesta por Roy (2010) y Aissi y Roy (2010) en la que usan el término “robusto” como un adjetivo refiriéndose a la capacidad de soportar “aproximaciones vagas” y/o “zonas de ignorancia” con el objetivo de prevenir impactos indeseados, principalmente, evitar la degradación de las propiedades que se desean mantener. La investigación que lidia con la robustez busca asegurar esta capacidad todo lo posible. En consecuencia, la robustez se encuentra relacionada al proceso que responde a la siguiente cuestión: la necesidad de la capacidad de resistencia o auto protección.

Siguiendo con el objetivo de proveer una idea general de lo que se desea dar a entender con el término robustez, Roy (2010) comenta que durante el 2004 en la reunión del grupo MCDA, Philippe Vincke señaló que, aunque la expresión “análisis de robustez” es usada con frecuencia, parece un tanto restrictiva, por ello se recomienda su sustitución por la expresión “preocupación por la robustez”. Claramente, hablando de análisis, es posible inferir que el estudio ocurre a posteriori, como es el caso del análisis de sensibilidad. Robustez, por el otro lado, involucra preocupaciones que deben de ser tomadas en consideración a priori, en el momento en el que el problema es formulado (esto no excluye el uso de del análisis de sensibilidad para responder a dichas preocupaciones, si es necesario).

Aprovechando lo mencionado en el párrafo anterior y lo comentado al inicio de la presente sección suele existir cierta confusión entre el análisis de robustez y sensibilidad debido a que una solución insensible normalmente es considerada como ventajosa y para añadir más confusión lingüística, a veces se la denomina con el término “robusta”, entonces ¿Qué es el análisis de sensibilidad? Ródenas y Barberis (2003) lo definen como un proceso sistemático utilizado para explorar cómo una solución considerada como “óptima”, responde a los cambios introducidos en las condiciones de partida (las

cuales típicamente serán valores conocidos que podrán variar en el futuro o parámetros cuyos valores estarán expuestos a cuestionamiento). De este modo, el análisis se sustenta alrededor del supuesto previo de que la optimización es el escenario principal, con la incertidumbre considerada como un factor potencialmente perjudicial. El análisis tiene como objetivo estudiar y descubrir el grado de sensibilidad de la solución óptima ante cambios en los factores esenciales.

De la misma forma que el análisis de sensibilidad, el análisis de la robustez pretende incorporar la experiencia del mundo real respecto de la incertidumbre dentro del entendimiento y comprensión de los resultados derivados matemáticamente. Una diferencia importante con respecto al análisis de sensibilidad consiste en que el objetivo, no es solamente la optimización sino también un rango más amplio y concreto de resultados, *e.g.*, que cierta solución sea factible o sea casi óptima. La incertidumbre, sin embargo, permanece asociada a los valores de los parámetros y a diferencia del análisis de sensibilidad, la idea de una explotación secuencial para alcanzar mayor flexibilidad está ausente.

Ahora, durante el desarrollo de la presente sección se ha utilizado el enunciado “análisis de robustez” a pesar de las recomendaciones hechas por Roy (2010) y Philippe Vincke para cambiarlo por “preocupación por la robustez”. Estamos de acuerdo que el enunciado “análisis de robustez” da la sensación de un proceso a realizar a posteriori y que este proceso tiene que estar definido desde la etapa de la definición del problema como parte integral del marco de trabajo de la ayuda a la toma de decisiones multicriterio, pero debido a que el estudio de robustez del método propuesto por Fernández *et al.* (2012) no se había definido en el momento de la creación del método, se optó por mantener dicho enunciado.

### 2.5.2. Valoración

El segundo punto mencionado por Ródenas y Barberis (2003), además de tener definido lo que debe ser robusto, se deben tener claras las razones y factores que pueden dar lugar a la arbitrariedad, contingencia, ignorancia e incertidumbre, respecto de lo que se está analizando su robustez. Por supuesto que la subjetividad es un carácter importante pero además hay que tener en cuenta la forma en que se presenta, así como el contexto decisional considerado.

Según Roy y Bouyssou (1993), la presencia de incertidumbre proviene principalmente de tres fuentes:

- $\alpha$ ) El carácter impreciso, incierto, y generalmente el pobre conocimiento que se tiene acerca de las características del problema.
- $\beta$ ) Las condiciones para la ejecución de la decisión, que pueden ser influenciados por el estado del medio ambiente cuando se tenga que ejecutar.
- $\gamma$ ) La falta de claridad en los sistemas de valores, posiblemente incompletos.

De esta forma, si se pretende dar sentido al término robustez dentro de un contexto decisional específico, resulta importante analizar qué encierra en sí misma cada una de las tres fuentes señaladas (incertidumbre, arbitrariedad e ignorancia,  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ , respectivamente), como las razones y factores respecto de los cuales buscamos la robustez. Este esfuerzo de análisis es necesario no sólo para definir un formalismo adaptado a una modelización apropiada del problema sino también para elegir un método idóneo para su estudio.

### 2.5.3. Importancia

En tercer lugar, es necesario preguntarse ¿Por qué robustez? Así formulada, la pregunta parece ser muy extensa, imprecisa y puede dar lugar a respuestas variadas.

Por ello es conveniente precizarla, limitándola a: responder a las necesidades y tipos de preocupaciones que muestran los demandantes de la ayuda a la decisión.

Roy (1998) presenta cada una de las preocupaciones claves que conciernen al análisis de robustez:

- a) La decisión fue un hecho aislado y excepcional o se repite en el tiempo.
- b) La decisión fue con carácter secuencial: aquí, el análisis de robustez se utiliza para destacar y tener en cuenta posibilidades de adaptación y respuesta que la decisión debe de tener en consideración a futuro.
- c) La decisión trata sobre la adopción de un método a utilizar en varias ocasiones, en condiciones y ambientes que pueden variar: aquí, es importante la elección de los valores asignados a los distintos parámetros, así como el lugar y el papel del procedimiento y variabilidad de los resultados del método adoptado. Para que el método pueda ser considerado robusto, es apropiado que esta variabilidad no sea demasiado grande, *i.e.*, los resultados no son demasiado diferentes como puede ser el caso con los procedimientos de optimización que permiten la presencia de diferentes soluciones en los alrededores del óptimo. Es particularmente importante que estos resultados no sean contradictorios.

De acuerdo con Aissi y Roy (2010), desde la perspectiva de la ayuda a la decisión, es necesario tomar en consideración la propia ignorancia tanto como sea posible, razón de ser del análisis de robustez. Desde esta perspectiva, es importante recordar que la decisión que se tome será:

1. ejecutada en un contexto de la vida real que no pudiera corresponder exactamente con el modelo en el cual la ayuda a la decisión está basada;
2. juzgada en términos de un sistema de valores que parezca pertinente (y no necesariamente estable) en un futuro que pueda no estar bien definido; este sistema

de valores consecuentemente corre el riesgo de no corresponder totalmente al uso para crear y explotar el modelo.

Éstas son dos de las posibles razones para una no perfecta conformidad, y por lo tanto una brecha entre:

- la representación formal (RF), incluyendo el modelo y procedimientos de tratamiento aplicados al modelo; y
- por otro lado, el contexto de la vida real (CVR) en donde la decisión se realizará.

En ayuda a la decisión, es importante tratar de tomar en consideración aproximaciones vagas y zonas de ignorancia responsables de una no perfecta conformidad en el contexto de la vida real:  $RF \neq CVR$ , lo cual es síntoma de fragilidad de la representación formal. Para reflejar esa fragilidad, la representación formal puede examinarse desde cuatro diferentes perspectivas:

1. *La forma en que se trata el conocimiento imperfecto;*
2. *La definición de valores preferenciales, incluso valores inapropiados de los datos: tratar un análisis cualitativo o numérico como análisis cuantitativo sin justificación, o atribuir significado inapropiado a las llamadas mediciones objetivas, usando datos generados mediante procedimientos cuestionables.*
3. *El modelado de aspectos complejos de la realidad (principalmente la introducción de parámetros), los cuales son difíciles de comprender por estar mal definidos: la elección del modelo de los parámetros del método (por ejemplo, conjuntos de pesos, indicadores de capacidad, funciones de utilidad, niveles de referencia o de aspiración) tienen una gran influencia.*
4. *La forma en la que se introducen parámetros esenciales y/o reglas de selección con poco o nulo significado concreto.*

Tomar en cuenta el análisis de robustez implica, en primera instancia, identificar los puntos de fragilidad de RF. Estos puntos obviamente dependen la formulación y modelado del problema de ayuda a la decisión. Puede también depender de los procedimientos de tratamiento que se emplean.

En muchos casos, establecer un inventario al concentrar solamente los elementos en la RF que reflejen incertidumbre puede llevar a la exclusión de un cierto número de puntos de fragilidad. De hecho, el término “incertidumbre” no cubre todas las formas de aproximaciones de vaguedades y zonas de ignorancia que deben abordarse por el análisis de robustez. Limitar el análisis de robustez a las consideraciones de incertidumbre suele acompañarse del uso de conceptos basados en escenarios. Desde este punto de vista un tanto limitada, la búsqueda de robustez se basa en la definición de un conjunto finito o infinito de escenarios. Cada escenario se define así mediante la asignación de un valor preciso para cada uno de los elementos de datos y parámetros.

Roy (2010) mostró que, con el fin de responder a las razones para la existencia del análisis de robustez, es preferible ir más allá del punto de vista limitado descrito anteriormente. Para evitar limitar la búsqueda de robustez a una simple consideración de incertidumbre, el concepto de escenario debe ser dejado atrás, sobre todo porque este concepto tiene la desventaja adicional de causar confusión en ciertos ambientes profesionales. Roy (2010) propuso sustituir este punto de vista de robustez de escenario con una visión centrada en versiones relativas a la formulación del problema de ayuda a la decisión. Cada versión representa una realidad que debe ser considerada y se define mediante una combinación de las opciones relacionadas con los puntos de fragilidad del modelo. Los puntos de fragilidad hacen que sea necesario tener una familia de versiones, toman en cuenta los parámetros técnicos que forman parte de la definición del procedimiento, así como la personalidad de los expertos encargados de procesar el modelo (*cf.* Roy, 2010).

#### 2.5.4. Enfoque del análisis de robustez en la investigación

Finalmente, con el fin de definir el sentido de análisis de robustez en esta investigación y cumplir con el primer, segundo y tercer punto descrito por Ródenas y Barberis (2003) (establecer qué debe de ser robusto, definir las razones y factores que pueden dar lugar a la arbitrariedad, contingencia, ignorancia e incertidumbre, respecto a qué se está analizando su robustez e importancia de la robustez, respectivamente), apoyándose en lo descrito por Vincke (1999b) para esclarecer el primer punto, se plantea que, los DMs responsables de adoptar una decisión o bien de influir en un proceso de decisión, esperan que la ayuda a la decisión les conduzca, oriente, o simplemente, aporte información útil para delimitar el campo de reflexión y acción. El rol del investigador es proponer soluciones que sean las mejores posibles simultáneamente para diferentes conjuntos de datos, valores de parámetros preferenciales y proponer información que valide la solución propuesta respecto a estos distintos conjuntos de datos plausibles.

Considerando que en la presente investigación las fuentes de incertidumbre principal son relativas a:

1. La gran cantidad de soluciones no dominadas de 2.16 que están en el rango de aceptabilidad del DM. En principio cualquiera de esas soluciones podría ser el resultado de la inferencia de parámetros, y el análisis debe proveer una forma clara de preferir una, algunas, o declarar la equivalencia entre ellas.
2. La capacidad del método de optimización de generar soluciones cercanas al verdadero valor de los parámetros del modelo.
3. La influencia del tamaño del conjunto de entrenamiento sobre el comportamiento del procedimiento.
4. La influencia del azar en los resultados de la optimización.

La caracterización de estas incertidumbres y el método de manejarlas constituye la preocupación por la robustez en el presente trabajo, que se encuentra en armonía con la propuesta de Ródenas y Barberis (2003), Roy (2010), Aissi y Roy (2010), así como con las hipótesis planteadas en la Sección 1.3.

## CAPÍTULO 3

### METODOLOGÍA Y EVALUACIÓN EMPÍRICA

#### 3.1. Esquema metodológico y experimental

El esquema metodológico y experimental planteado en la investigación se encuentra ejemplificado por la Figura 3.1; cada uno de los puntos señalados, formarán la estructura del presente capítulo.

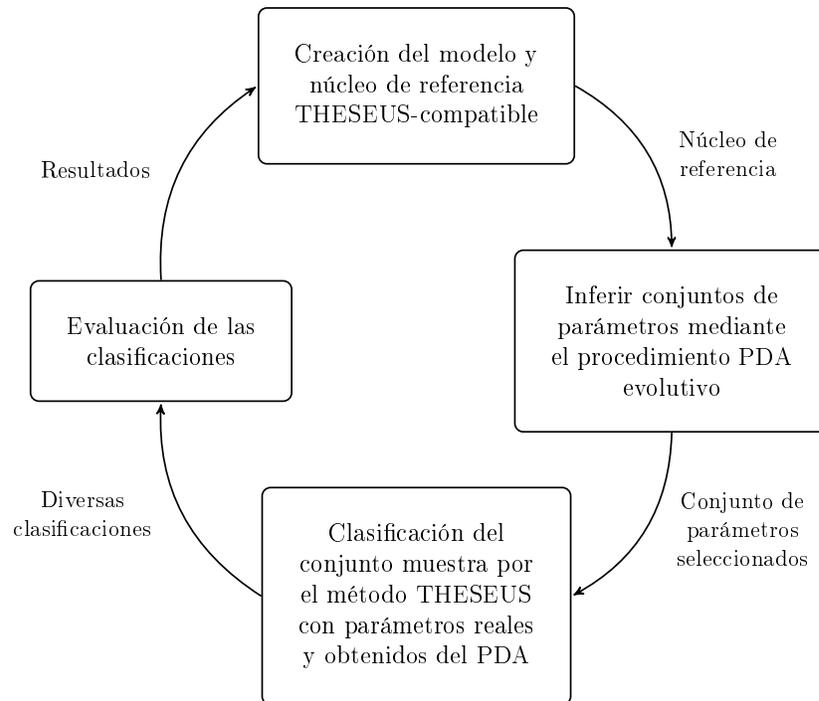


Figura 3.1: Esquema metodológico y experimental.

## 3.2. Generación de parámetros y objetos

Como se mencionó en secciones anteriores, los métodos basados en PDA requieren de un conjunto de referencia para estimar los valores de los parámetros; en esta sección se explica la forma de creación de los conjuntos de referencia utilizados en la presente investigación. Estos conjuntos se generan de manera compatible con la filosofía de THESEUS, *i.e.*, partimos de la suposición de que existe un DM cuyo comportamiento se encuentra basado en el proceso de clasificación de THESEUS. En consecuencia, a este conjunto de referencia le hemos llamado THESEUS-compatible. Todas estas características son detalladas a continuación.

### 3.2.1. Restricciones en los parámetros

Construir un conjunto THESEUS-compatible requiere generar un modelo de sobreclasificación (con sus parámetros), y objetos clasificados en forma compatible con ese modelo y método THESEUS. Cada instancia se genera aleatoriamente bajo las siguientes condiciones:

Para los niveles de umbral:

$$\begin{aligned}
 & \text{Para } j = 1, \dots, n \\
 & 1,0 \leq q_j \leq 3,0 \\
 & 1,0 \leq p_j \leq 3,0 \\
 & p_j < u_j < v_j \\
 & |(p_j \times 1,5)| \leq v_j \leq |(p_j \times 3,0)|
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Los valores de los criterios se generan cumpliendo:

$$\begin{aligned}
 & \text{Para } j = 1, \dots, n \\
 & 1,0 \leq g_j \leq 10,0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

La definición de los valores de los umbrales depende de tres principales factores, el DM, escala y tipo de problema; en este caso se han restringido los valores de  $q_j$  y  $p_j$  al intervalo  $[1,0, 3,0]$  debido a la escala de los criterios. Se ha considerado el valor de 1.0 como el valor mínimo donde se garantiza la presencia del umbral de indiferencia; ajustar un valor menor que 1,0 significaría un decremento en la utilidad y significado de este umbral. Considerar un valor mayor a 3,0 condenaría a un gran número de acciones a ser indiferentes.

La siguiente jerarquía en los parámetros preferenciales se impone:

$$q_j \leq p_j < u_j < v_j \quad (3.3)$$

Si el DM cree que el valor del umbral de discordancia  $u$  debe encontrarse en un punto medio del intervalo  $[p, v]$ , se puede agregar la restricción  $u_j = |(p_j + v_j)/2|$ .

Se impone la condición de normalización en los pesos:

$$\sum_{j=1}^n w_j = 1 \quad (3.4)$$

Se considera que, si  $w_j$  es mayor al promedio de los pesos, este criterio se considerará con capacidad de veto y entonces, su umbral tendrá que ser inferido; de otra forma, no habrá capacidad de veto para este criterio en particular.

Finalmente los posibles valores a asignar a  $\lambda$  son:

$$0,65 \leq \lambda \leq 0,85 \quad (3.5)$$

Los parámetros se generan como números aleatorios reales cumpliendo las condiciones 3.1 a 3.5.

### 3.2.2. Generación del núcleo de referencia THESEUS-compatible

Tomando en cuenta lo mencionado en secciones pasadas e inicios de la presente sección, se define el procedimiento para la creación del conjunto de referencia al que llamamos THESEUS-compatible representado por el Algoritmo 2.

---

**Algoritmo 2** Generar conjunto de referencia THESEUS-compatible

---

**Entrada:** THESEUS-compatible(*nclases*, *ncriterios*, *nobjetos*)  $\triangleright$  *nclases* - número de clases, *ncriterios* - número de criterios, *nobjetos* - número de objetos

**Salida:** *CRT* - Conjunto de referencia THESEUS-compatible

- 1: Generar parámetros del modelo de forma aleatoria respetando las restricciones definidas en la Sección 3.2.1
  - 2: Crear tantos objetos, con sus respectivos criterios como *nclases* se hayan especificado.
  - 3: Se busca que estos objetos tengan una relación de preferencia estricta.
  - 4: Crear tantos objetos hasta completar *nobjetos* y se clasifican siguiendo la filosofía del método THESEUS (*cf.* Sección 2.2.3).
  - 5: Se obtiene un *CRT*.
- 

En términos generales, es necesario proveer la cardinalidad de los siguientes conjuntos: a) número de clases, b) criterios y c) objetos en el conjunto de referencia. Las líneas 2 y 3 tienen como objetivo cumplir con la condición del método THESEUS de mantener al menos un objeto representativo en cada categoría antes de proceder a la clasificación. Una vez definido y realizado el proceso, se tiene como resultado el *CRT* que servirá como argumento para la estimación de los parámetros preferenciales por el procedimiento PDA evolutivo descrito en la siguiente sección.

### 3.3. Inferir conjuntos de parámetros mediante el procedimiento PDA evolutivo

Una vez obtenido el *CRT* como resultado del procedimiento anterior, el PDA evolutivo tomará este *CRT* con el objetivo de estimar los parámetros preferenciales con los cuales fue creado, o una aproximación. En esta sección se explica el enfoque evolutivo con el que se estiman los valores de los parámetros. En primer lugar se define la estructura propuesta para los individuos, posteriormente se explicará el funcionamiento de los operadores evolutivos y valores paramétricos evolutivos con los que está funcionando el EA (número de generaciones, reinicios, tamaño de la población, etc.), finalmente, se explica el proceso de reparación con el objetivo de

mantener individuos consistentes.

### 3.3.1. Enfoque evolutivo

Recordando lo mencionado en la Sección 2.4, el enfoque evolutivo usado para inferir los parámetros del modelo fue el propuesto por Fernández *et al.* (2012), basado en el algoritmo evolutivo NSGA-II ideado por Deb *et al.* (2002); con algunas diferencias en la codificación de los individuos y en consecuencia, la forma de aplicar los operadores evolutivos.

Los individuos son representados por una cadena compuesta por  $5n + 1$  posiciones (*cf.* Fernández *et al.*, 2012), como se muestra en la Figura 3.2.

$q_1$	$p_1$	$u_1$	$v_1$	$\dots$	$q_n$	$p_n$	$u_n$	$v_n$	$w_1$	$\dots$	$w_n$	$\lambda$
-------	-------	-------	-------	---------	-------	-------	-------	-------	-------	---------	-------	-----------

Figura 3.2: Codificación de individuos.

Se hace uso de un punto de cruza (*e.g.* Michalewicz, 1996); se definen  $n + 2$  posibles puntos de pre-cruza en el individuo (*cf.* Figura 3.3). Dados dos individuos, el punto específico de pre-cruza es aleatoriamente generado.

1					$n$				$n + 1$			$n + 2$
$q_1$	$p_1$	$u_1$	$v_1$	$\dots$	$q_n$	$p_n$	$u_n$	$v_n$	$w_1$	$\dots$	$w_n$	$\lambda$

Figura 3.3: Posibles puntos de pre-cruza.

Una vez que el punto de pre-cruza ha sido elegido, tres posibles situaciones pueden presentarse: la primera, el punto de pre-cruza se encuentra entre 1 y  $n$ ; esto significa que la cruza se efectuará en alguna cuarteta de umbrales. La segunda (el punto es  $n + 1$ ), los pesos estarán involucrados en el proceso de cruza; finalmente, el punto de pre-cruza seleccionado es el valor de  $\lambda$  (punto  $n + 2$ ). Para cada situación la selección del valor real del punto de cruza es como sigue:

1. En el caso de los umbrales, el punto exacto en el vector es aleatoriamente calculado con el objetivo de realizar el proceso de cruza;

2. en el caso de los pesos, se toma el conjunto completo de los pesos del individuo y se transfiere al otro individuo;
3. en el caso de  $\lambda$ , el proceso de cruza es realizado sin mayores cambios.

Este operador de cruza puede causar algunas inconsistencias en la jerarquía de los parámetros (*cf.* Expresión 3.3) en la cuarteta donde se haya realizado dicho proceso. Es por ello que se introduce un mecanismo de reparación con el objetivo de mantener individuos consistentes, este proceso se explicará en la Sección 3.3.2.

En el caso del proceso de mutación, se usa una mutación uniforme (*e.g.* Michalewicz, 1996). Se definen  $n + 2$  puntos de pre-mutación (los mismos que los puntos de pre-cruza) con el objetivo de seleccionar la sección del individuo donde el proceso de mutación tendrá lugar y las tres situaciones anteriormente descritas son tomadas en consideración. En primer lugar, en el caso de los umbrales, cuatro posibles situaciones pueden ocurrir: mutar  $q_j$ ,  $p_j$ ,  $u_j$  o  $v_j$ ; el valor del umbral a mutar se calcula aleatoriamente de acuerdo a las restricciones descritas por el grupo de expresiones 3.1. En segundo lugar, en el caso de los pesos, la sección completa de los pesos se muta siguiendo la condición de normalización descrita por la 3.4. En tercer lugar, en el caso de  $\lambda$ , un valor real es generado de acuerdo con 3.5 y el valor de  $\lambda$  es remplazado por el nuevo valor.

Finalmente, los parámetros de la búsqueda evolutiva fueron establecidos como: Número de generaciones = 1000; Tamaño de la población = 100; Probabilidad de cruza = 0,8; Probabilidad de mutación = 0,05.

### 3.3.2. Proceso de reparación

En cada proceso de cruza se analiza el individuo con el objetivo de garantizar su consistencia acorde con lo descrito en la Sección 3.2.1. Se comprueba que las cuartetas de parámetros donde el proceso de cruza tome lugar cumplan con la jerarquía de parámetros (Expresión 3.3); se analizan dos casos: el proceso de cruza entre los

umbrales  $q_j$  y  $p_j$  o  $u_j$  y  $v_j$ . En el primer caso, si  $q_j > p_j$  entonces  $q_j = p_j$ ; en el segundo caso, si  $u_j < p_j \vee v_j < u_j$  entonces  $u_j = |(p_j + v_j)/2|$ .

### 3.4. Clasificación por el método THESEUS con parámetros obtenidos del PDA

Una vez finalizado el proceso PDA evolutivo descrito en la sección anterior, este proporcionará una población de individuos con los parámetros para el modelo de sobreclasificación. El proceso de selección de individuos y obtención de su clasificación puede apreciarse en el Algoritmo 3, aquí es posible observar las capacidades de clasificación de los individuos.

---

**Algoritmo 3** Clasificación por el método THESUS

---

**Entrada:** THESEUS( $P$ )  $\triangleright$   $P$  - Población de parámetros.

**Salida:**  $CC$  - Conjunto de clasificaciones.

- 1: Calcular el centroide de la población  $P$  obtenida del PDA.
  - 2: Evaluar el centroide con el objetivo de verificar si este pertenece al conjunto de soluciones válidas.
  - 3: Pertenece: se toma como el conjunto más representativo  $R_1$ .
  - 4: No pertenece: se toma el conjunto de parámetros más cercano al centroide y se toma como el conjunto más representativo  $R_1$ .
  - 5: Tomar un segundo conjunto de parámetros  $R_2$ , aquel con mayor distancia al conjunto  $R_1$ .
  - 6: Tomar un tercer conjunto de parámetros  $R_3$ , aquel con mayor distancia al conjunto  $R_2$ .
  - 7: Tomar un cuarto conjunto de parámetros  $R_4$ , aquel con una menor distancia con los verdaderos parámetros (solo para contraste).
  - 8: Clasificar un conjunto de muestra utilizando cada uno de los conjuntos de parámetros seleccionados.
  - 9: Se realiza la clasificación mediante el método THESEUS.
  - 10: Obtener una clasificación  $CC_i$  por cada conjunto de parámetros seleccionados.
-

### 3.5. Estructura y evaluación de los experimentos

Recapitulando lo mencionado en secciones anteriores, se utilizó un DM artificial basado en el método THESEUS (*cf.* Sección 2.2.3) y un conjunto de referencia al que llamamos THESEUS-compatible (*cf.* Sección 3.2.2) siguiendo las características descritas en Fernández y Navarro (2011). En cada caso es necesario definir el tamaño del conjunto de referencia, criterios para cada acción (aleatoriamente generada) y categorías.

Se consideran dos escenarios, en el primer caso, se supone que el DM carece de (o no desea suministrar) información acerca de su creencia sobre los valores de los parámetros. Por el contrario, el segundo escenario se apoya en la premisa gnoseológica de que el DM debe ser capaz de revelar sus creencias preferenciales acerca de la importancia de los criterios (pesos) y los demás parámetros preferenciales, al menos dentro de un rango de valores donde él/ella crea que estos valores puedan encontrarse. Sobre esta base se asume que el DM puede determinar un rango aceptable de variación para los mismos. Ese rango se acota dentro de  $\pm 30\%$  de los valores reales de los parámetros, y se tratan como nuevas restricciones por el proceso de reparación implementado en el algoritmo evolutivo.

Una vez obtenido el conjunto de referencia, este es suministrado al PDA evolutivo (*cf.* Sección 3.3) y con la población obtenida, se seleccionan tres individuos con el fin de obtener una clasificación por individuo (*cf.* Sección 3.4). En la sección siguiente se explica cómo se realiza la evaluación de estas clasificaciones con el objetivo de contestar las hipótesis definidas en la Sección 1.3.

#### 3.5.1. Estructura de los experimentos

Considerando un punto generado aleatoriamente en el espacio de parámetros, y el modelo de relación de sobreclasificación borrosa asociado al mismo. Se analizan tres variables para la creación del conjunto de entrenamiento: Número de acciones (50,

100, 200); Número de criterios (3, 5, 7, 9); Número de categorías (3, 5, 7, 9).

Primero, se crean tantas acciones como el número de categorías para cubrir todas las categorías. Cada acción se caracteriza por un conjunto de criterios cuyos valores son generados aleatoriamente; la generación se realiza asegurando que entre cada pareja de elementos existe una relación de preferencia estricta  $xPy$  (*cf.* Expresión 2.8), que cumple la propiedad de transitividad sobre el conjunto de elementos generados hasta ese momento. Se continúan generando acciones hasta cumplir el número requerido. Cada vez que se genera una nueva acción, esta es clasificada por el método THESEUS y se incorpora al conjunto de referencia que de esa forma se va enriqueciendo.

El PDA evolutivo usa este *CRT* obtenido para estimar los parámetros del modelo de sobreclasificación. Una vez que se obtiene una población de soluciones plausibles, se calcula el centroide como el individuo más representativo y se seleccionan otros dos individuos, con el objetivo de verificar las capacidades de clasificación con respecto a la realizada con los verdaderos valores de los parámetros. Para esto, se clasifica un conjunto de individuos de 1000 acciones aleatoriamente generadas con las mismas características del conjunto de referencia. Se repite este proceso un total de 30 veces con conjuntos de referencia, universo, parámetros distintos para ambos escenarios (sin y con restricciones adicionales a los valores de los parámetros) y se recolecta la siguiente información:

- *Aciertos*, coincidencias exactas entre las clasificaciones realizadas con el individuo seleccionado y con los verdaderos valores de los parámetros (clasificación real).
- *Errores*, no coincidencias entre la clasificación utilizando los valores de los verdaderos parámetros y la clasificación obtenida por los individuos seleccionados.
- *Primer nivel de vaguedades*, coincidencias entre las clasificaciones realizadas con los verdaderos valores de los parámetros y las clasificaciones realizadas con el

individuo seleccionado, con la existencia de una categoría más por parte del individuo seleccionado.

- *Segundo nivel de vaguedades*, misma situación que la vaguedad de primer nivel, pero en este caso, existe más de una clase adicional propuesta por los valores del individuo seleccionado.

### 3.5.2. Evaluación de los experimentos

En esta sección se presenta el procedimiento de evaluación de los resultados obtenidos del método anterior. Estos resultados fueron evaluados con el objetivo de verificar si el procedimiento de PDA descrito en secciones pasadas es robusto. Para ello, se usó la prueba de hipótesis para la diferencia entre las medias de dos muestras. De acuerdo con Wayne (2004), este procedimiento se utiliza con más frecuencia para determinar si es razonable o no concluir que las dos muestras son distintas entre sí. En tales casos, se puede formular una u otra de las hipótesis descritas en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1: Hipótesis nulas e hipótesis alternativas

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_A: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \geq 0$	$H_A: \mu_1 - \mu_2 < 0$
$H_0: \mu_1 - \mu_2 \leq 0$	$H_A: \mu_1 - \mu_2 > 0$

Sin embargo, es posible probar la hipótesis diferencia igual que, mayor o igual que o menor o igual que algún valor distinto de cero. Por ello se analizan en tres diferentes contextos:

1. Cuando el muestreo se realiza a partir de poblaciones con distribución normal y varianzas conocidas;
2. cuando el muestreo se efectúa a partir de poblaciones con distribución normal y con varianzas desconocidas;

3. cuando el muestreo se lleva a cabo a partir de poblaciones que no presentan distribución normal.

En el caso de la presente investigación, se ha usado el tipo de prueba bilateral definida por la primera fila de la Tabla 3.1, representada también como se muestra en 3.6 (debido a que se desea comparar si las medias de las poblaciones pueden considerarse iguales).

$$\begin{aligned} H_0: \mu_1 &= \mu_2 \\ H_A: \mu_1 &\neq \mu_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

De la misma forma se ha usado el muestreo a partir de poblaciones que no presentan una distribución normal. De acuerdo con Wayne (2004), cuando el muestreo se realiza a partir de poblaciones que no presentan una distribución normal, es posible utilizar los resultados del teorema del límite central si el tamaño de las muestras es grande (*e.g.*, 30 tal es el caso del número de experimentos por características del problema descritos en la Sección 3.5.1). Esto permite el uso de la teoría normal pues la distribución de la diferencia entre las medias de las muestras será aproximadamente normal. Cuando se extraen dos muestras aleatorias simples independientes de gran magnitud de una población que no sigue una distribución normal, la estadística de prueba para  $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$  es

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)_0}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \quad (3.7)$$

donde  $\bar{x}_1$  y  $\bar{x}_2$  representan las medias de cada población, 1 y 2 representan la media en términos de la hipótesis,  $n_1$  y  $n_2$  representan el tamaño de cada población y  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$  representan las varianzas de las poblaciones y cuyos valores se calculan mediante:

$$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2}{n} \quad (3.8)$$

donde  $x_i$  representa cada uno de los valores de la muestra,  $\mu$  la media de la población y  $n$  es el tamaño de la población.

Cuando  $H_0$  es verdadera, sigue una distribución normal estándar. Si se conocen las variables de las poblaciones, se utilizan; pero si se desconocen (como suele ocurrir), se usan como estimadores las varianzas de las muestras, que por necesidad se basan en muestras grandes. Las varianzas de las muestras no se combinan porque la igualdad de las varianzas de las poblaciones no es una suposición necesaria cuando se utiliza la estadística  $z$ .

Finalmente, se busca comparar las nuevas clasificaciones con respecto a la “real”, para ello se contabilizan los aciertos, vaguedades ( $= 2$  y  $> 2$ ) y errores. Mediante la prueba de hipótesis para dos medias muestrales, se busca observar si ambas medias de la variable aciertos se pueden considerar estadísticamente iguales. A esos efectos se realizaron las contrastaciones descritas en la Tabla 3.2 y los resultados de las evaluaciones se detallan en el Capítulo 4.

Tabla 3.2: Intervalos de confianza y nivel de significancia para pruebas bilaterales.

Confianza	Error	Nivel de significancia
99 %	0,01	$\pm 2,576$
95 %	0,05	$\pm 1,960$
90 %	0,10	$\pm 1,645$

## CAPÍTULO 4

### RESULTADOS, DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

#### 4.1. Resultados

Durante el proceso de experimentación se tomaron en cuenta dos escenarios, el primero, representado por las condiciones definidas en la Sección 3.2.1 y el segundo, donde se cumplen las restricciones del primer caso y se asume que el DM es capaz de estimar los valores de los parámetros dentro de un intervalo  $\pm 30\%$  de los valores reales de los parámetros.

En la presente sección se muestran los resultados obtenidos de ambos escenarios con el objetivo de contrastar las hipótesis presentadas en la Sección 1.3, demostrar el cumplimiento de los objetivos generales y específicos descritos en las Secciones 1.4 y 1.5, respectivamente, además de contestar las preguntas de investigación planteadas en la Sección 1.6.

En la Tabla 4.1 se caracterizan los resultados estadísticos para ambos escenarios, donde = representa una igualdad estadística (diferencia no significativa en términos de la prueba de hipótesis), y  $\neq$  representa una diferencia significativa entre los individuos seleccionados para la realización de las clasificaciones.

Tabla 4.1: Resultados estadísticos para ambos escenarios.

Características Problema			Sin restricciones			Con restricciones		
Objetos	Criterios	Clases	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
50	3	3	=	$\neq$	$\neq$	=	=	=
100	3	3	=	$\neq$	$\neq$	=	$\neq$	$\neq$
200	3	3	$\neq$	$\neq$	$\neq$	=	=	=
50	5	3	=	=	=	=	=	=
100	5	3	$\neq$	$\neq$	$\neq$	=	=	$\neq$
200	5	3	=	=	$\neq$	=	=	$\neq$

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.1: – continuación de la página anterior

Características Problema			Sin restricciones			Con restricciones		
Objetos	Criterios	Clases	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
50	7	3	=	=	=	=	=	=
100	7	3	=	≠	≠	=	=	=
200	7	3	=	≠	≠	=	=	≠
50	9	3	=	≠	≠	=	=	=
100	9	3	=	=	=	=	=	=
200	9	3	=	=	=	=	=	=
50	3	5	≠	≠	≠	=	≠	≠
100	3	5	≠	≠	≠	=	=	=
200	3	5	≠	≠	≠	=	≠	≠
50	5	5	=	≠	≠	≠	≠	≠
100	5	5	=	=	=	=	=	=
200	5	5	=	=	=	=	=	=
50	7	5	=	=	=	=	=	≠
100	7	5	=	=	=	=	=	≠
200	7	5	=	=	=	=	=	=
50	9	5	=	=	≠	=	=	=
100	9	5	=	=	=	=	=	=
200	9	5	=	=	=	=	=	=
50	3	7	≠	≠	≠	≠	≠	≠
100	3	7	≠	≠	≠	=	≠	≠
200	3	7	≠	≠	≠	=	=	≠
50	5	7	=	≠	≠	=	=	=
100	5	7	=	=	≠	=	=	=
200	5	7	≠	≠	≠	=	≠	≠
50	7	7	=	=	=	=	≠	≠
100	7	7	=	≠	≠	=	=	=
200	7	7	=	=	≠	=	=	=
50	9	7	=	=	≠	=	=	=
100	9	7	=	=	=	=	=	=
200	9	7	=	=	=	=	=	=
50	3	9	≠	≠	≠	=	≠	≠
100	3	9	≠	≠	≠	=	≠	≠
200	3	9	≠	≠	≠	≠	≠	≠
50	5	9	=	=	=	=	=	≠
100	5	9	=	=	=	=	=	=
200	5	9	=	≠	≠	=	=	=

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.1: – continuación de la página anterior

Características Problema			Sin restricciones			Con restricciones		
Objetos	Criterios	Clases	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
50	7	9	=	≠	≠	=	=	=
100	7	9	=	=	=	=	=	=
200	7	9	=	=	=	=	=	=
50	9	9	=	=	≠	=	≠	≠
100	9	9	=	=	=	=	=	=
200	9	9	=	=	=	=	=	≠

Las Tablas 4.2, 4.3 y 4.4 muestran el conteo de igualdades estadísticas obtenidas para cada una de las características que conforman el problema (objetos, criterios y clases, respectivamente) y escenarios de experimentación.

Tabla 4.2: Conteo de igualdades por número de objetos y escenario.

Objetos	Sin restricciones	Con restricciones
50	26 de 48	32 de 48
100	28 de 48	40 de 48
200	27 de 48	37 de 48
Total	81 de 144	109 de 144

Tabla 4.3: Conteo de igualdades por criterios y escenarios.

Criterios	Sin restricciones	Con restricciones
3	2 de 36	17 de 36
5	21 de 36	28 de 36
7	27 de 36	31 de 36
9	31 de 36	33 de 36
Total	81 de 144	109 de 144

Tabla 4.4: Conteo de igualdades por clase y escenario.

Clases	Sin restricciones	Con restricciones
3	19 de 36	31 de 36
5	24 de 36	27 de 36
7	16 de 36	26 de 36
9	22 de 36	25 de 36
Total	81 de 144	109 de 144

La Tabla 4.5 presenta el total de aciertos obtenidos por cada individuo seleccionado en cada escenario de experimentación, donde  $I_2$  representa al individuo centroide y  $I_1$  e  $I_3$  representan a los individuos en extremos opuestos al centroide.

Tabla 4.5: Total de aciertos obtenidos por individuo seleccionado en cada escenario.

Características Problema			Sin restricciones			Con restricciones		
Objetos	Criterios	Clases	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
50	3	3	23,593	22,766	22,621	25,265	25,197	25,255
100	3	3	26,156	25,358	26,102	26,993	26,533	26,688
200	3	3	26,901	27,048	26,570	27,171	27,084	27,227
50	5	3	20,757	21,143	20,383	25,072	24,753	24,766
100	5	3	22,913	21,530	20,068	25,502	24,639	24,693
200	5	3	24,062	25,118	24,370	27,091	27,079	26,895
50	7	3	19,707	19,112	18,323	23,337	23,251	22,912
100	7	3	20,281	19,574	18,791	25,206	24,583	24,531
200	7	3	22,112	21,716	20,202	26,219	25,977	25,994
50	9	3	19,016	20,466	18,515	21,830	21,574	21,527
100	9	3	18,238	18,383	17,382	22,985	22,843	22,814
200	9	3	17,393	16,935	19,794	24,542	24,280	24,307
50	3	5	19,818	19,181	16,330	23,007	21,768	21,234
100	3	5	19,069	21,561	18,653	23,969	23,983	23,431
200	3	5	23,609	25,023	20,630	24,110	25,915	24,812
50	5	5	16,907	15,847	13,718	20,954	19,640	18,953
100	5	5	14,861	16,190	14,955	22,272	22,114	21,828
200	5	5	15,744	18,099	16,457	22,131	22,695	22,266
50	7	5	13,699	12,837	11,978	19,658	18,110	17,508
100	7	5	14,417	13,589	12,282	19,150	18,497	18,400
200	7	5	14,167	16,182	15,613	20,767	20,711	20,614
50	9	5	12,905	12,665	11,698	19,055	17,684	17,727

Continúa en la siguiente página

Tabla 4.5: – continuación de la página anterior

Características Problema			Sin restricciones			Con restricciones		
Objetos	Criterios	Clases	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
100	9	5	12,349	11,641	11,160	19,855	19,009	19,103
200	9	5	12,319	11,687	11,353	19,472	18,483	18,404
50	3	7	19,135	19,128	16,398	21,799	22,330	19,848
100	3	7	18,203	20,085	16,664	22,723	24,708	23,426
200	3	7	21,991	24,246	20,425	23,393	24,862	23,753
50	5	7	13,753	13,979	12,003	19,014	18,990	18,545
100	5	7	15,043	14,951	11,885	20,215	21,228	21,061
200	5	7	14,733	19,278	17,041	20,836	23,547	23,528
50	7	7	12,143	11,509	10,779	20,607	19,134	18,311
100	7	7	12,682	11,488	9,958	18,954	19,168	18,738
200	7	7	15,160	13,628	12,390	21,386	21,070	20,626
50	9	7	10,946	9,755	8,993	16,188	15,112	15,274
100	9	7	10,763	10,330	9,733	17,922	16,848	17,284
200	9	7	11,462	10,810	10,360	17,370	17,663	17,443
50	3	9	18,483	21,692	17,281	22,634	23,719	22,075
100	3	9	18,870	23,343	18,728	22,610	24,774	22,812
200	3	9	20,884	24,023	19,424	23,665	26,000	2,4247
50	5	9	12,933	12,655	11,353	19,369	18,232	17,887
100	5	9	15,990	15,851	13,757	18,731	20,418	19,486
200	5	9	16,926	20,155	17,270	21,183	22,851	22,012
50	7	9	11,171	9,593	8,400	16,760	15,415	15,761
100	7	9	13,337	12,258	11,052	17,761	17,531	17,705
200	7	9	12,360	13,302	10,846	19,873	19,095	17,710
50	9	9	8,726	7,868	7,305	14,126	12,872	12,970
100	9	9	10,388	9,853	9,065	18,135	17,658	18,336
200	9	9	11,559	11,458	11,142	18,242	16,642	16,151
Total:			798,634	814,889	740,200	1,029,109	1,026,269	1,006,878

Las siguientes figuras exhiben el desempeño de los individuos seleccionados con respecto a la obtención de aciertos. En primer lugar, la Figura 4.1 muestra el número de aciertos obtenidos por cada uno de los individuos seleccionados de manera global, es decir, los aciertos obtenidos por los individuos en cada escenario de experimentación de manera conjunta.

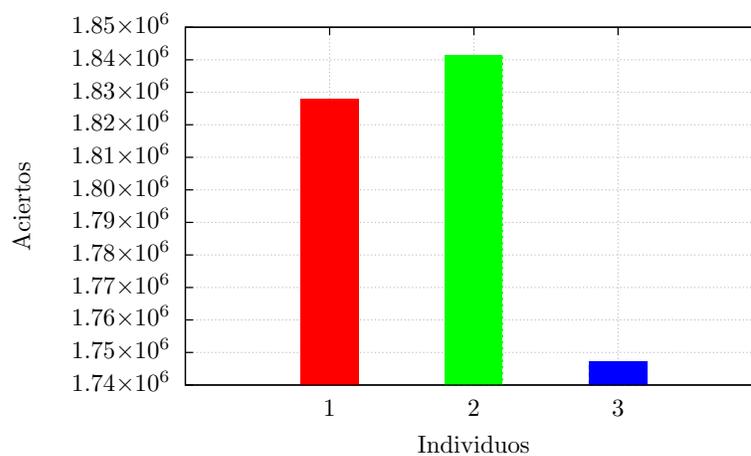


Figura 4.1: Aciertos por individuo en ambos escenarios.

La Figura 4.2 muestra el desempeño global de cada individuo en ambos escenarios teniendo en cuenta la cantidad de aciertos obtenidos por número de objetos en el conjunto de referencia.

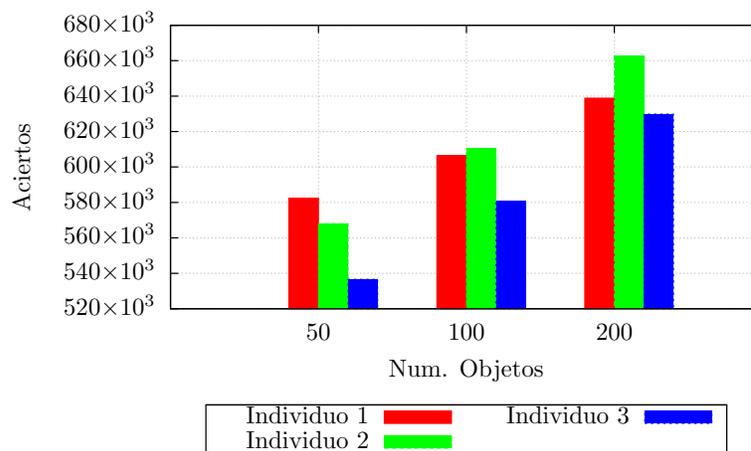


Figura 4.2: Aciertos por número de objetos e individuos en ambos escenarios.

La Figura 4.3 muestra la cantidad de aciertos tomando en cuenta ambos escenarios para cada individuo seleccionado, en esta ocasión el número de criterios es fijado.

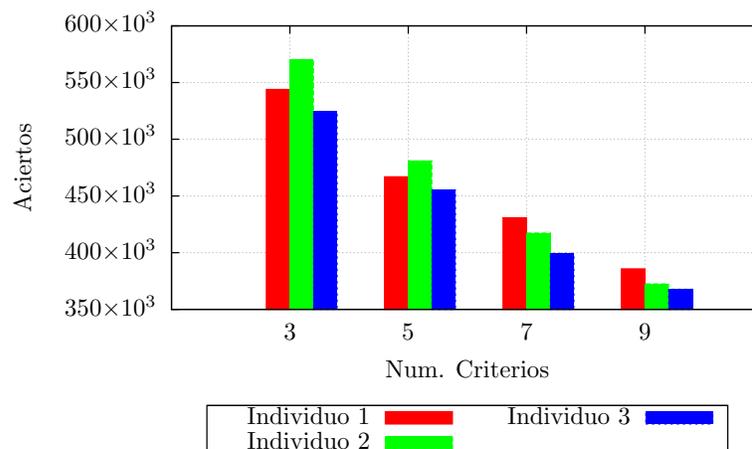


Figura 4.3: Aciertos por número de criterios e individuos en ambos escenarios.

La Figura 4.4 muestra el mismo caso de las figuras anteriores, solo que en esta ocasión, el foco de atención es el desempeño de los individuos de acuerdo al número de clases.

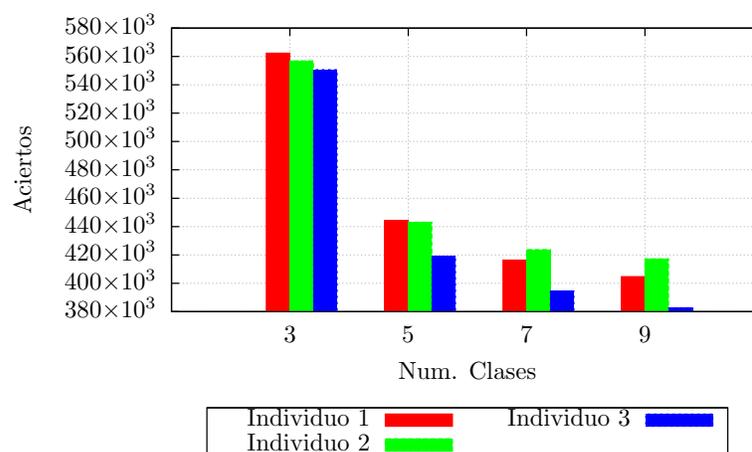


Figura 4.4: Aciertos por número de clases e individuos en ambos escenarios.

Finalmente, se recolectó información concerniente a las vaguedades de primer y segundo nivel; la Figura 4.5 muestra el número de vaguedades de primer y segundo nivel

obtenidas de forma global (tomando en cuenta ambos escenarios de experimentación) por individuo.

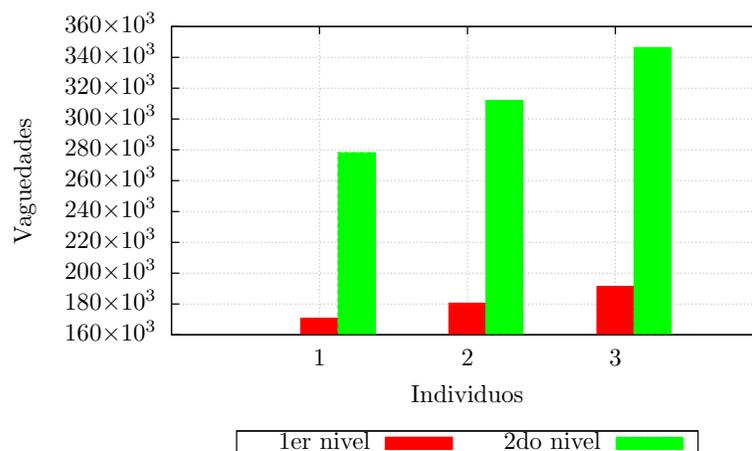


Figura 4.5: Vaguedades por individuo en ambos escenarios.

## 4.2. Discusión y conclusiones

En síntesis, tanto los objetivos generales y específicos planteados al inicio (Secciones 1.4 y 1.5) han sido alcanzados, pues mediante la metodología propuesta en la presente investigación fue posible evaluar la robustez de las soluciones obtenidas por el método PDA. En las Tablas 4.1, 4.2, 4.3 y 4.4 se observa que existen situaciones donde se presentan desigualdades estadísticas; estas desigualdades demuestran que cada individuo posee capacidades de clasificación distintas, y en consecuencia, la hipótesis relacionada con la demostración de la robustez del método PDA descrita en la Sección 1.3 resulta ser falsa; la selección de una solución no puede ser realizada arbitrariamente. En general, se puede notar que se gana en robustez si el decisor mejora la precisión de la información preferencial, de 81 (menos de 2/3) igualdades incrementa a 109 (un poco más de 3/4).

La Tabla 4.2 muestra que el aumento del número de objetos en el núcleo de referencia no proporciona, por sí solo, una mejora en la robustez; algo similar sucede

con el aumento en el número de clases (Tabla 4.4). La Tabla 4.3 permite decir que si incrementa el número de criterios, la equivalencia en el desempeño de los individuos aumenta, es decir, el método PDA gana en robustez.

Lo anterior da pie a la búsqueda de una solución que satisfaga al DM, *i.e.*, dado un conjunto de posibles soluciones proporcionadas por el método PDA, determinar la mejor solución (segunda hipótesis relacionada con la selección de la mejor solución descrita en la Sección 1.3). Para enfrentar esta hipótesis se evaluaron distintas zonas del conjunto solución para observar si existe una zona en la que se pudiese obtener un mayor porcentaje de aciertos. Fue mediante este estudio que se observó a la zona perteneciente al centroide como aquélla que provee mayor número de aciertos de forma global en comparación a otras zonas (*cf.* Figura 4.1). Además se ha logrado responder con éxito a los cuestionamientos planteados en la Sección 1.6. A continuación se reproducen y se dan respuesta específica:

1. *¿Cuál es la robustez de las soluciones obtenidas del PDA?*

Se encontró que el método de desagregación de preferencias propuesto por Fernández *et al.* (2012) es capaz de proveer una población de posibles soluciones pero no todas poseen la misma capacidad de clasificación, por lo que se concluyó que el método es sensible y por lo tanto provee soluciones sensibles. Lo anterior no significa que el método pueda ser catalogado como “malo” sino que se requiere una valoración ulterior de las soluciones que arroja para identificar la mejor. Además, se observa por los resultados que a medida que el decisor proporcione información más precisa, el método provee soluciones más robustas. La falta de robustez del método se encuentra ligada a la falta de precisión en la información preferencial del DM, hecho por demás lógico, lo que da pie a la mencionada diferencia en las capacidades de clasificación de las soluciones arrojadas por el método PDA.

2. *¿Qué zonas del conjunto de soluciones se apegan más a las políticas del DM?*

Como se mencionó anteriormente, esta pregunta de investigación está orientada a la búsqueda de la zona cuyas respuestas sean capaces de satisfacer las políticas de decisión del DM. En el caso de que las respuestas del PDA hubieran resultado robustas, esta pregunta hubiera resultado trivial; una vez demostrada la robustez del método, la selección de una solución podría ser arbitraria, *i.e.*, elegir cualquier solución dentro del conjunto solución. Debido a que se demostró lo contrario, esta pregunta obliga a brindar una solución al problema de selección de la solución que satisfaga al DM; es por ello que se realizó una búsqueda dentro del conjunto solución con el fin de encontrar aquella zona cuyas soluciones mantuvieran un mayor número de aciertos al momento de realizar clasificaciones. Esa zona se identificó de forma global con la correspondiente al individuo centroide de la distribución de soluciones.

Por lo que muestran las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4, la capacidad de obtener aciertos tiene mucho que ver con las características con las cuales se define el problema. En el caso de que se defina el problema con 50 objetos en el conjunto de referencia, existe la posibilidad de obtener una mayor cantidad de aciertos si se elige el individuo uno (representa la zona que más se aleja al centroide); a medida que se aumenta el número de objetos, se observa que la selección de la mejor solución se inclina al individuo dos, representado por la zona del centroide. De la misma forma, a medida que disminuyen los criterios, el número de aciertos se incrementa apuntando a la selección del centroide y al aumentar los criterios, la selección se inclina a favor del individuo uno. Finalmente, si disminuye el número de clases se puede obtener un mayor número de aciertos tanto del individuo uno como del dos; la diferencia pareciera no ser significativa y a medida que se aumenta el número de clases la cantidad de aciertos disminuye drásticamente aunque la cantidad de aciertos por parte del centroide es mayor comparada con los demás individuos.

Contestando de manera concreta la pregunta, de acuerdo a la Figura 4.1 la selección de la mejor zona de forma global apunta al individuo dos, es decir, a zona del centroide, pero dependiendo de las características con las cuales se defina el proble-

ma, la selección de la mejor zona puede encontrarse en aquella representada por el individuo uno (zona más alejada al centroide) y la zona del centroide.

3. *¿Cuál es el comportamiento en las capacidades de clasificación de las distintas zonas del conjunto de soluciones al modificar las características del problema (número de objetos en el núcleo de referencia, criterios y clases)?*

Haciendo uso de la discusión anterior, las capacidades de clasificación de las distintas zonas del conjunto de soluciones varían al modificar las características del problema. Como se puede observar en las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4, el número máximo de aciertos se obtiene cuando es menor la cantidad de criterios y categorías. Otro punto importante a notar es que, conforme se incrementa el conjunto de referencia, el número de aciertos aumenta. Otra observación que puede hacerse en la Tabla 4.5 es que, la declaración de un intervalo restrictivo resulta en una mayor capacidad para el algoritmo evolutivo para estimar mejores individuos y como resultado obtener un mayor número de aciertos.

Los presentes resultados pueden también servir como un estándar con el cual uno puede estimar el número de aciertos que se desea lograr dependiendo de las características del ejercicio planeado. Esas características pueden tomarse en consideración y en consecuencia planear la estructura del problema y actuar de acuerdo a ello, *e.g.*, si se desea un mayor número de aciertos, definir un conjunto de referencia de 200 objetos y definir el menor número de clases y criterios posible.

Todas estas características mencionadas en la anterior y presente discusión pueden observarse mediante las figuras en el Anexo A; en ellas se muestra el comportamiento del centroide al modificar cada una de las características del problema en ambos escenarios; se puede afirmar que a medida que disminuimos el número de clases, criterios y aumentamos el número de objetos es posible obtener resultados que se acercan y potencialmente superan al 90% de aciertos.

Un punto importante a tomar en consideración al momento de definir las características del problema es la propiedad relacionada con la cantidad de vaguedades. En la Figura 4.5 se muestra de manera global que el individuo uno brinda una menor cantidad de vaguedades de primer y segundo nivel que el individuo dos y tres, aunque en cantidad de aciertos de forma global el centroide se encuentra por encima.

Hay que tomar en cuenta las vaguedades de primer y segundo nivel en función de cómo se defina su importancia. Las vaguedades de primer y segundo nivel pueden tomarse como un apoyo significativo para el decisor, pues pueden impactar en las capacidades de clasificación descritas anteriormente. Podría ser conveniente definir la importancia de las vaguedades de diferente nivel dentro del marco de apoyo a la decisión, tarea que se menciona en la siguiente sección.

### 4.3. Trabajo futuro

Un punto a tratar en futuras investigaciones será realizar un análisis del comportamiento de las vaguedades de primer y segundo nivel, cuyo objetivo será investigar en qué medida aportan información para la selección del mejor individuo; es decir, es necesario definir si las vaguedades de primer nivel pueden ser consideradas como aciertos parciales debido a su cercanía a la clasificación verdadera. También, validar las vaguedades de segundo nivel, analizar en qué medida pudiesen tomarse como aciertos parciales o posibles errores, o dejar tanto las vaguedades de primer y segundo nivel a interpretación del DM dentro del marco de apoyo a la decisión.

Hace falta más experimentación en cuanto a la relación que guarda la robustez y precisión de la información preferencial. Además, en el presente trabajo solo se exploraron tres individuos como representativos del espacio solución del método PDA; se requiere caracterizar con mayor detalle las diferentes zonas, *i.e.*, aumentar el número de individuos representativos. Al aumentar el número de individuos, automáticamente se aumenta la capacidad de detallar la zona que mejor represente las preferencias del

DM; se podrá caracterizar de manera más precisa la mejor zona y como consecuencia la elección del mejor conjunto de parámetros.

Otro punto a tratar en futuras investigaciones será la comparación entre el centroide y el punto solución más cercano al verdadero valor de los parámetros. Este punto plausiblemente simula a la selección que haría un DM real de la solución que más se apega a sus preferencias. Si no se descubriera diferencia estadística significativa en la comparación, sería un argumento fuerte a favor del centroide como selección por default del método PDA de Fernández *et al.* (2012).

## BIBLIOGRAFÍA

- Abgueguen, R. (1971). *La sélection des supports de presse*. Robert Laffon.
- Aissi, H. y Roy, B. (2010). Robustness in Multi-criteria Decision Aiding. En Ehrgott, M., Figueira, J. R., y Greco, S., editores, *Trends in Multiple Criteria Decision Analysis*, volumen 142 de *International Series in Operations Research & Management Science*, páginas 87–121. Springer US.
- Bana e Costa, C. (1992). *Structuration, construction et exploitation d'un modèle multicritère d'aide à la décision*. Tesis Doctoral, Universidade Tecnica de Lisboa.
- Bana e Costa, C. A. y Vansnick, J.-C. (1994). Macbeth - an interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International Transactions in Operational Research*, 1(4):489 – 500.
- Belton, V. y Vickers, S. (1990). Use of a simple multi-attribute value function incorporating visual interactive sensitivity analysis for multiple criteria decision making. En Bana e Costa, C., editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, páginas 319–334. Springer Berlin Heidelberg.
- Bêtolaud, Y. y Février, R. (1973). Conservation des forêts suburbaines et passage des autoroutes - L'exemple du tracé de l'autoroute A86-A87. *Revue Forestière Française*, páginas 179–200.
- Bouyssou, D. (1990). Building criteria: A prerequisite for mcda. En Bana e Costa, C., editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, páginas 58–80. Springer Berlin Heidelberg.
- Breiman, L. (1984). *Classification and regression trees*. The Wadsworth and Brooks-Cole statistics-probability series. Chapman & Hall.

- Buffet, R., Grémy, J. P., Marc, M., y Sussmann, B. (1967). Peut-on choisir en tenant compte de critères multiples? Une méthode (ELECTRE) et trois applications. *Revue METRA*, 6(2).
- Charpentier, A. y Jacquet-Lagrèze, E. (1976). La Promotion de L'Electricite dans L'Industrie et L'Utilisation de Methodes Multicriteres. En Thiriez, H. y Zionts, S., editores, *Multiple Criteria Decision Making*, volumen 130 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, páginas 364-377. Springer Berlin Heidelberg.
- Climaco, J., Martins, A., y Traca-Almeida, A. (1988). On a multicriteria based approach for energy planning. *Communication to Congrès EURO IX-TIMS XXVIII*, páginas 6-8.
- Coello, C. A. C., Lamont, G. B., y Veldhuizen, D. A. V. (2007). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Genetic and Evolutionary Computation Series. Springer US, 2 edición.
- Bana e Costa, C. A, Stewart, T. J., y Vansnick, J.-C. (1997). Multicriteria decision analysis: Some thoughts based on the tutorial and discussion sessions of the ESIGMA meetings. *European Journal of Operational Research*, 99(1):28-37.
- Deb, K. y Kalyanmoy, D. (2001). *Multi-Objective Optimization Using Evolutionary Algorithms*. Wiley, 1 edición.
- Deb, K., Pratap, A., Agarwal, S., y Meyarivan, T. (2002). A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II. *Evolutionary Computation, IEEE Transactions on*, 6(2):182-197.
- Dias, L., Mousseau, V., Figueira, J., y Clímaco, J. (2002). An aggregation/disaggregation approach to obtain robust conclusions with ELECTRE TRI. *European Journal of Operational Research*, 138(2):332-348.

- Dias, L. C. y Mousseau, V. (2006). Inferring ELECTRE's veto-related parameters from outranking examples. *European Journal of Operational Research*, 170(1):172–191.
- Doumpos, M., Marinakis, Y., Marinaki, M., y Zopounidis, C. (2009). An evolutionary approach to construction of outranking models for multicriteria classification: The case of the ELECTRE TRI method. *European Journal of Operational Research*, 199(2):496–505.
- Doumpos, M. y Zopounidis, C. (2002). *Multicriteria Decision Aid Classification Methods*, volumen 73. Kluwer Academic Publishers.
- Doumpos, M. y Zopounidis, C. (2004). Developing sorting models using preference disaggregation analysis: An experimental investigation. *European Journal of Operational Research*, 154(3):585–598.
- Fernández, E. y Navarro, J. (2011). A new approach to multi-criteria sorting based on fuzzy outranking relations: The THESEUS method. *European Journal of Operational Research*, 213(2):405–413.
- Fernández, E., Navarro, J., y Bernal, S. (2009). Multicriteria sorting using a valued indifference relation under a preference disaggregation paradigm. *European Journal of Operational Research*, 198(2):602 – 609.
- Fernández, E., Navarro, J., y Mazcorro, G. (2012). Evolutionary multi-objective optimization for inferring outranking model's parameters under scarce reference information and effects of reinforced preference. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 37(3):149–238.
- Figueira, J., Mousseau, V., y Roy, B. (2005). Electre Methods. En *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, volumen 78 de *International Series in Operations Research & Management Science*, páginas 133–153. Springer New York.

- Fonseca, C. y Fleming, P. (1993). Genetic algorithms for multiobjective optimization: Formulation, discussion and generalization. En *Proceedings of the 5th International Conference on Genetic Algorithms*, páginas 416–423, San Francisco, CA, USA. Morgan Kaufmann Publishers Inc.
- Gallant, S. I. (1993). *Neural network learning and expert systems*. MIT Press, Cambridge, MA, USA.
- Goldberg, D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., Boston, MA, USA, 1st edición.
- Goldberg, D. E. y Richardson, J. (1987). Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization. En *Proceedings of the Second International Conference on Genetic Algorithms on Genetic algorithms and their application*, páginas 41–49, Hillsdale, NJ, USA. L. Erlbaum Associates Inc.
- Grzymala-Busse, J. (1992). Lers-a system for learning from examples based on rough sets. En Słowiński, R., editor, *Intelligent Decision Support*, volumen 11 de *Theory and Decision Library*, páginas 3–18. Springer Netherlands.
- Horn, J., Nafpliotis, N., y Goldberg, D. (1993). Multiobjective optimization using the niched pareto genetic algorithm. Reporte técnico, IlliGAL Report No. 93005. Illinois Genetic Algorithms Laboratory. University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Horn, J., Nafpliotis, N., y Goldberg, D. (1994). A niched pareto genetic algorithm for multiobjective optimization. En *Evolutionary Computation, 1994. IEEE World Congress on Computational Intelligence., Proceedings of the First IEEE Conference on*, páginas 82–87 vol.1.
- Jacquet-Lagrèze, E. y Siskos, J. (1982). Assessing a set of additive utility functions for

- multicriteria decision-making, the UTA method. *European Journal of Operational Research*, 10(2):151 – 164.
- Jacquet-Lagrèze, E. y Siskos, Y. (1978). Une méthode de construction de fonctions d' utilité additives explicatives d' une préférence globale. Reporte Técnico Cahiers du LAMSADE 16, Université de Paris-Dauphine, Paris.
- Jacquet-Lagrèze, E. y Siskos, Y. (1983). *Méthode de décision multicritère*. Editions Hommes et Techniques, Paris.
- Jacquet-Lagrèze, E. y Siskos, Y. (2001). Preference disaggregation: 20 years of MCDA experience. *European Journal of Operational Research*, 130(2):233–245.
- Karst, O. J. (1958). Linear Curve Fitting Using Least Deviations. *Journal of the American Statistical Association*, 53(281):118–132.
- Kelley, J. E. J. (1958). An Application of Linear Programming to Curve Fitting. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6(1):15–22.
- Laffy, R. (1966). La méthode MARSAN pour la recherche de produits nouveaux. Communication to Congrès ESOMAR, Copenhagen.
- Marchant, T. (2010). Debate on how to assign numerical values to different parameters that aim at differentiating the role that the criteria have to play in a comprehensive preference model? *71 Meeting of the Euro Working Group Multiple Criteria Decision Aiding*.
- Martel, J. M. y Nadeau, R. (1988). Revealed preference modeling with ELECTRE II: an interactive approach. *Communication to Congrès EURO IX-TIMS XXVIII*, páginas 6–8.
- McLachlan, G. (2004). *Discriminant Analysis and Statistical Pattern Recognition*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley.

- Michalewicz, Z. (1996). *Genetic algorithms + data structures = evolution programs (3rd ed.)*. Springer-Verlag, London, UK.
- Michalski, R. S. (1983). A theory and methodology of inductive learning. *Artificial Intelligence*, 20(2):111 – 161.
- Mousseau, V. (1995). Eliciting information concerning the relative importance of criteria. En Pardalos, P., Siskos, Y., y Zopounidis, C., editores, *Advances in Multicriteria Analysis*, volumen 5 de *Nonconvex Optimization and Its Applications*, páginas 17–43. Springer US.
- Mousseau, V. y Dias, L. (2004). Valued outranking relations in ELECTRE providing manageable disaggregation procedures. *European Journal of Operational Research*, 156(2):467–482.
- Mousseau, V., Figueira, J., y Naux, J.-P. (2001). Using assignment examples to infer weights for ELECTRE TRI method: Some experimental results. *European Journal of Operational Research*, 130(2):263–275.
- Mousseau, V. y Słowiński, R. (1998). Inferring an ELECTRE TRI Model from Assignment Examples. *Journal of Global Optimization*, 12(2):157–174.
- Navarro, J. (2005). *Herramientas Inteligentes para la Evaluación y Selección de Proyectos de Investigación-Desarrollo en el Sector Público*. Tesis Doctoral, Universidad Autónoma de Sinaloa.
- Newletter of the European Working Group “Multiple Criteria Decision Aiding” (2002-2009). *Newletter of the European Working Group “Multiple Criteria Decision Aiding” (EWG-MCDA)*, Disponible online en: <http://www.inescc.pt/~ewgmca/Articles.html>.
- Öztürkçü, M., Tsoukiàs, A., y Vincke, P. (2005). Preference Modelling. En *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, volumen 78 de *International*

- Series in Operations Research & Management Science*, páginas 27–59. Springer New York.
- Pardalos, P. M., Siskos, Y., y Zopounidis, C. (1995). *Advances in Multicriteria Analysis*, volumen 5 de *Nonconvex Optimization and Its Applications*. Springer US.
- Pawlak, Z. y Słowiński, R. (1994). Rough set approach to multi-attribute decision analysis. *European Journal of Operational Research*, 72(3):443 – 459.
- Perny, P. (1998). Multicriteria filtering methods based on concordance and non-discordance principles. *Annals of Operations Research*, 80(0):137–165.
- Quinlan, J. R. (1986). Induction of decision trees. *Mach. Learn.*, 1(1):81–106.
- Quinlan, J. R. (1993). *C4.5: programs for machine learning*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Ripley, B. D. (1996). *Pattern Recognition and Neural Networks*. Cambridge University Press, Cambridge.
- Ródenas, M. E. y Barberis, G. M. F. (2003). El análisis de la robustez y la ayuda a la decisión multicriterio discreta. *Anales de economía aplicada*.
- Roy, B. (1990). Decision-aid and decision-making. *European Journal of Operational Research*, 45(2–3):324–331. OR for Engineers Expert Systems and Decision-Aid.
- Roy, B. (1991). The outranking approach and the foundations of electre methods. *Theory and Decision*, 31:49–73. 10.1007/BF00134132.
- Roy, B. (1996). *Multicriteria Methodology for Decision Aiding*. Nonconvex Optimization and Its Applications. Kluwer Academic Publisher.
- Roy, B. (1998). A missing link in OR–DA: Robustness analysis. *Foundations of Computing and Decision Sciences*, 23(3):141–160.

- Roy, B. (2005). Paradigms and Challenges. En *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, volumen 78 de *International Series in Operations Research & Management Science*, páginas 3–24. Springer New York.
- Roy, B. (2010). Robustness in operational research and decision aiding: A multifaceted issue. *European Journal of Operational Research*, 200(3):629–638.
- Roy, B. y Bouyssou, D. (1993). *Aide multicritère à la décision: méthodes et cas*. Economica, Paris.
- Roy, B. y Hugonnard, J. (1982). Ranking of suburban line extension projects on the paris metro system by a multicriteria method. *Transportation Research Part A: General*, 16(4):301 – 312.
- Roy, B., Présent, M., y Silhol, D. (1986). A programming method for determining which paris metro stations should be renovated. *European Journal of Operational Research*, 24(2):318 – 334.
- Roy, B. y Słowiński, R. (2008). Handling effects of reinforced preference and counter-veto in credibility of outranking. *European Journal of Operational Research*, 188(1):185–190.
- Schaffer, J. D. (1984). *Some experiments in machine learning using vector evaluated genetic algorithms (artificial intelligence, optimization, adaptation, pattern recognition)*. Tesis Doctoral, Nashville, TN, USA. AAI8522492.
- Schaffer, J. D. (1985). Multiple objective optimization with vector evaluated genetic algorithms. En *Proceedings of the 1st International Conference on Genetic Algorithms*, páginas 93–100, Hillsdale, NJ, USA. L. Erlbaum Associates Inc.
- Słowiński, R. (1992). *Intelligent Decision Support: Handbook of Applications and Advances of the Rough Sets Theory*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA.

- Srinivas, N. y Deb, K. (1994). Multiobjective optimization using nondominated sorting in genetic algorithms. *Evol. Comput.*, 2(3):221–248.
- Srinivasan, V. y Shocker, A. (1973). Linear programming techniques for multidimensional analysis of preferences. *Psychometrika*, 38(3):337–369.
- Vincke, P. (1999a). Robust and neutral methods for aggregating preferences into an outranking relation. *European Journal of Operational Research*, 112(2):405–412.
- Vincke, P. (1999b). Robust solutions and methods in decision-aid. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, 8(3):181–187.
- Wagner, H. M. (1959). Linear Programming Techniques for Regression Analysis. *Journal of the American Statistical Association*, 54(285):206–212.
- Wayne, D. (2004). *Bioestadística: Base para el análisis de las ciencias de la salud*. Limusa Wiley, 4 edición.
- Weiss, S. M. y Kulikowski, C. A. (1991). *Computer systems that learn: classification and prediction methods from statistics, neural nets, machine learning, and expert systems*. Morgan Kaufmann Publishers Inc., San Francisco, CA, USA.
- Zitzler, E. y Thiele, L. (1998). Multiobjective optimization using evolutionary algorithms - a comparative case study. En Eiben, A., Bäck, T., Schoenauer, M., y Schwefel, H.-P., editores, *Parallel Problem Solving from Nature - PPSN V*, volumen 1498 de *Lecture Notes in Computer Science*, páginas 292–301. Springer-Berlin-Heidelberg.
- Zopounidis, C. y Pardalos, P. (2010). *Handbook of Multicriteria Analysis*, volumen 103 de *Applied optimization*. Springer-Berlin-Heidelberg.

## ANEXO A

### COMPORTAMIENTO DEL CENTROIDE POR CARACTERÍSTICA DEL PROBLEMA

En la presente sección se muestra el comportamiento del centroide como individuo más representativo por característica del problema en cada escenario de experimentación. En primera instancia, la Sección A.1 presenta la capacidad de clasificación por número de clases del centroide. En la Sección A.2, su capacidad de clasificación por número de criterios. Finalmente, en la Sección A.3, la capacidad de clasificación por número de objetos en el núcleo de referencia.

#### A.1. Clases

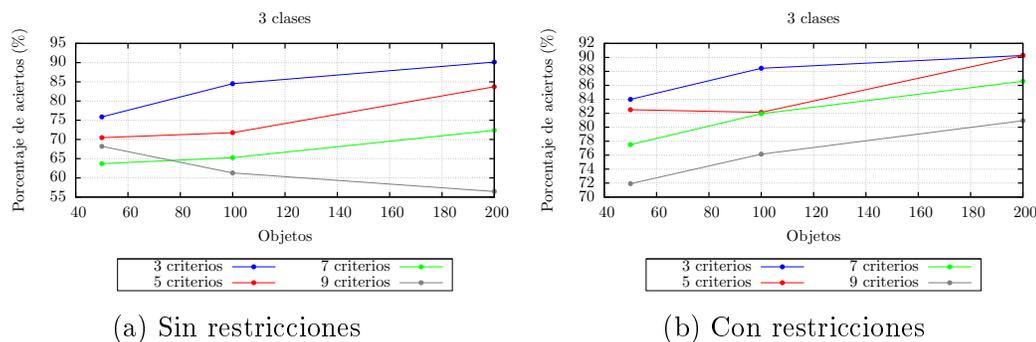


Figura A.1: Resultados con 3 clases

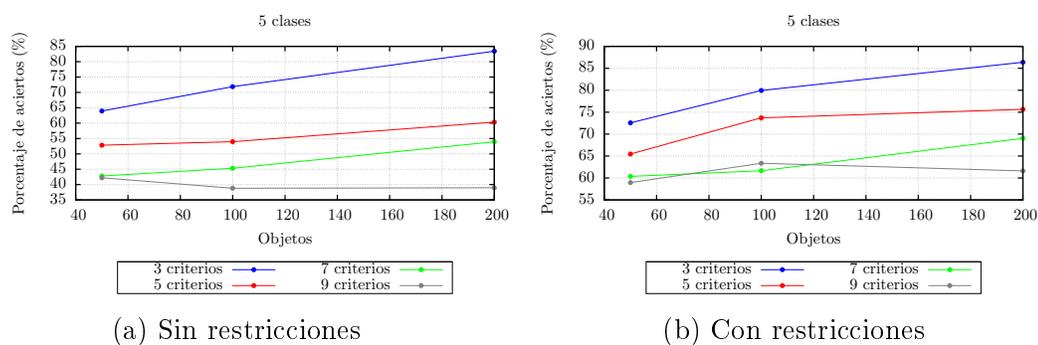


Figura A.2: Resultados con 5 clases

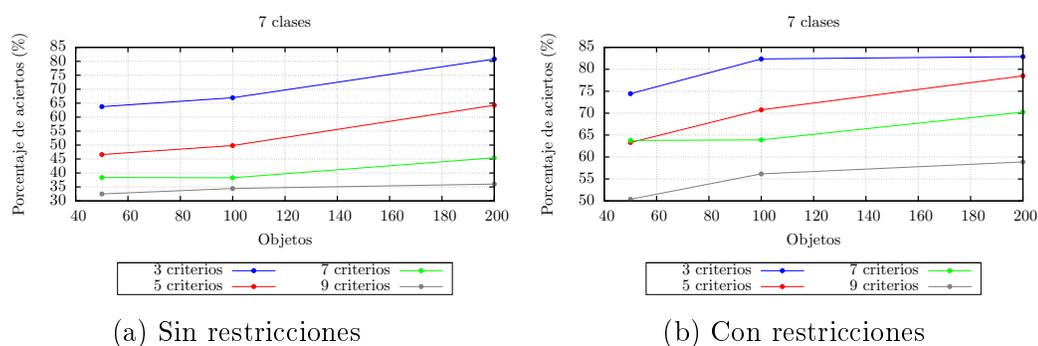


Figura A.3: Resultados con 7 clases

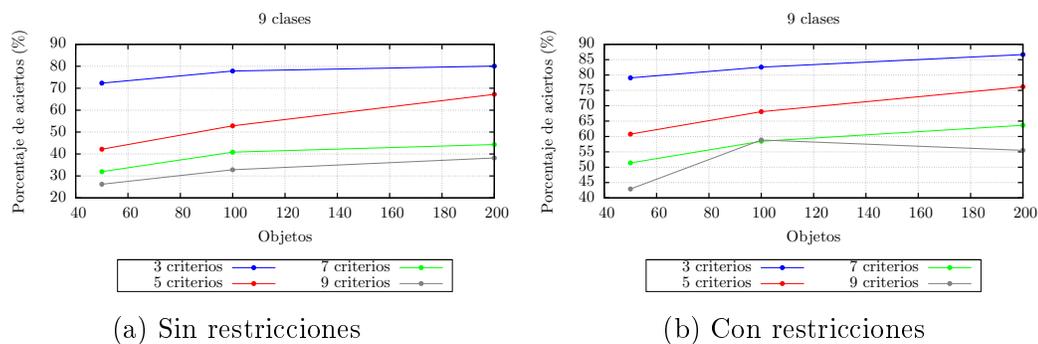


Figura A.4: Resultados con 9 clases

## A.2. Criterios

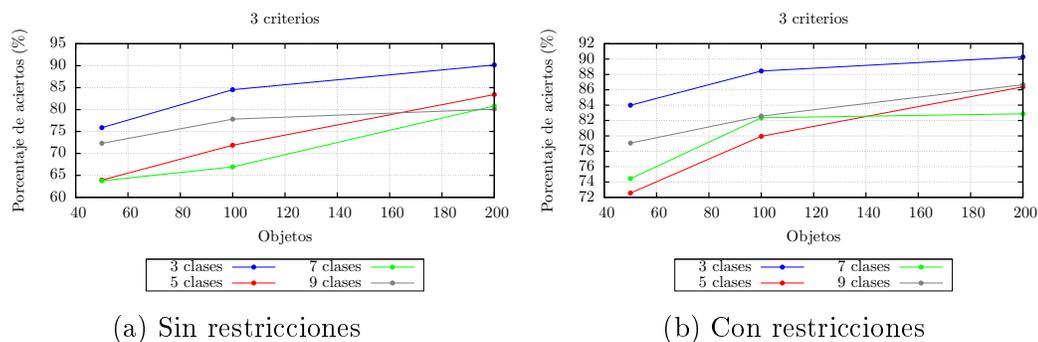


Figura A.5: Resultados con 3 criterios

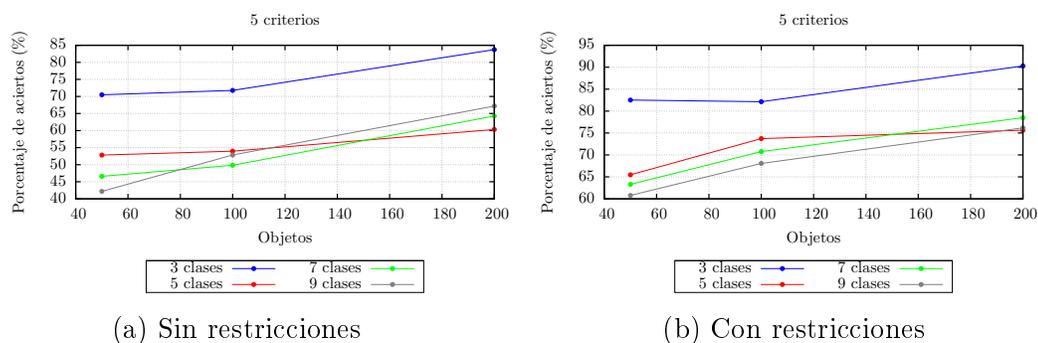


Figura A.6: Resultados con 5 criterios

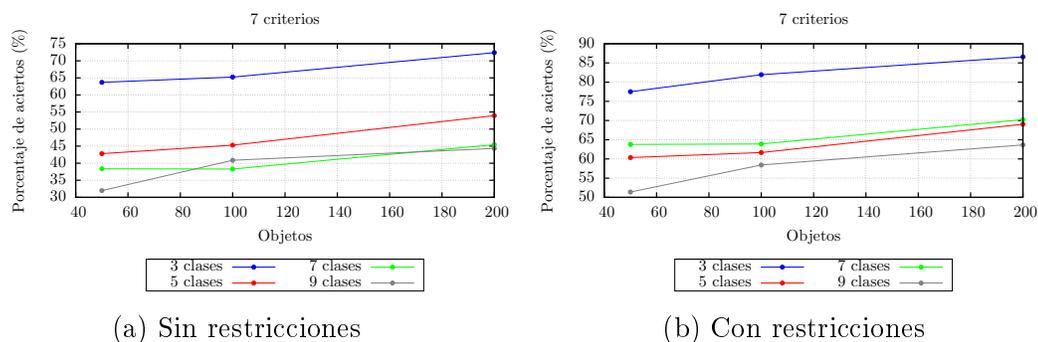


Figura A.7: Resultados con 7 criterios

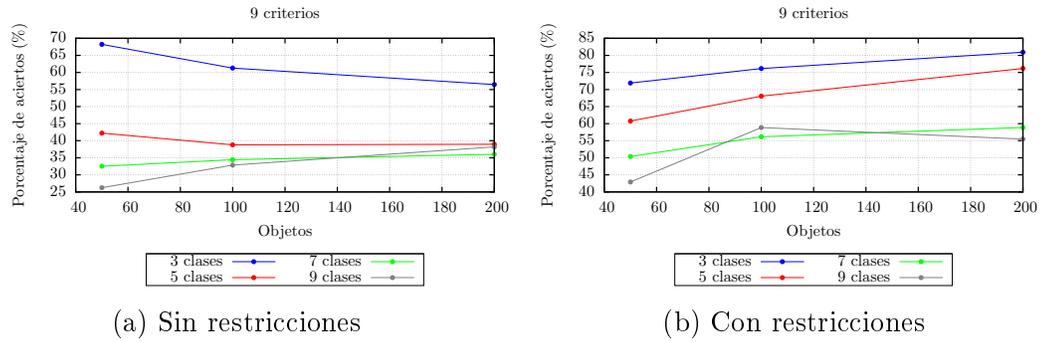


Figura A.8: Resultados con 9 criterios

### A.3. Objetos

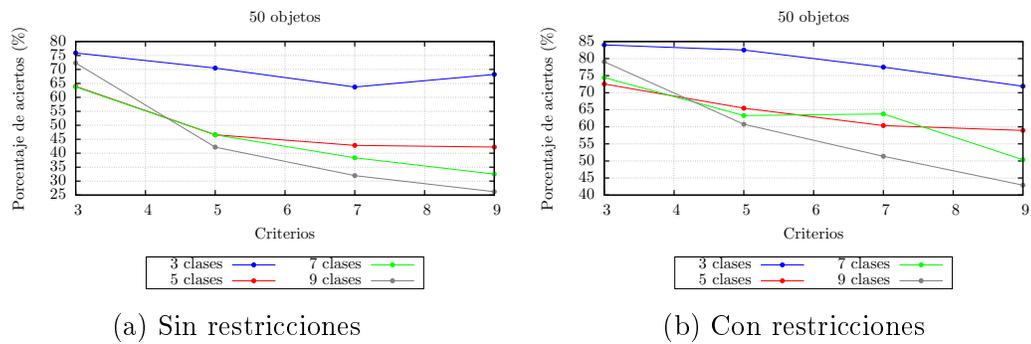


Figura A.9: Resultados con 50 objetos

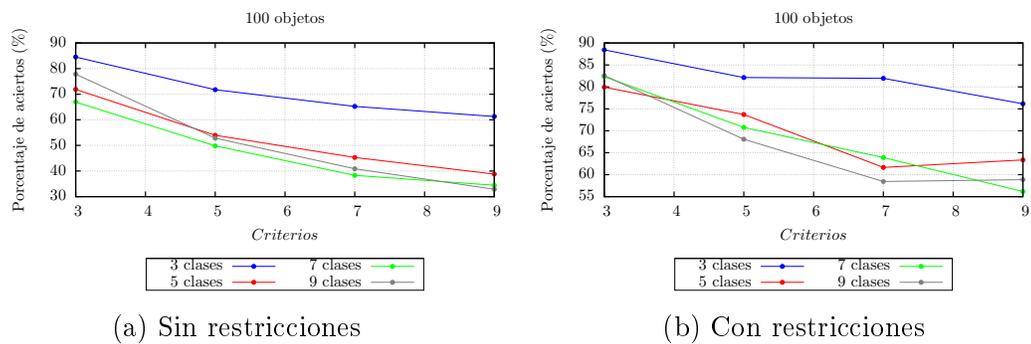
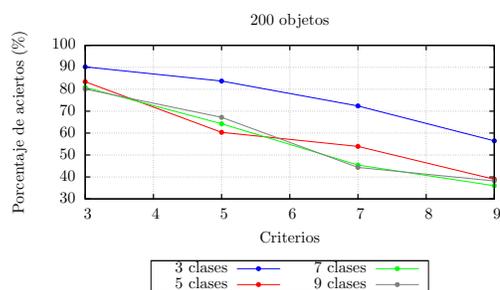
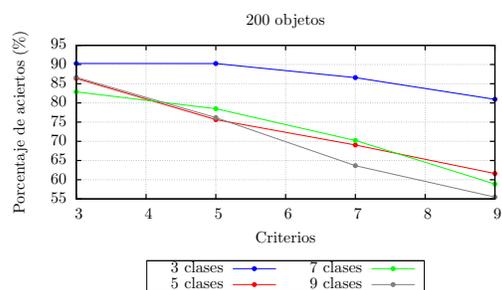


Figura A.10: Resultados con 100 objetos



(a) Sin restricciones



(b) Con restricciones

Figura A.11: Resultados con 200 objetos