

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA

**FACULTAD DE INFORMÁTICA Y FACULTAD DE
CIENCIAS DE LA TIERRA Y EL ESPACIO**

Maestría en Ciencias de la Información



**ESTUDIO COMPARATIVO DE LOS PRINCIPALES
MÉTODOS DE EVALUACIÓN MULTICRITERIO BASADOS
EN UNA RELACIÓN DE SOBRECASIFICACIÓN.**

Que como requisito parcial para obtener el grado de
MAESTRO EN CIENCIAS DE LA INFORMACIÓN

Presenta

L.S.C. Jorge Anselmo Rodríguez Castro

Directores:

Dr. Jorge Adalberto Navarro Castillo

Dr. Eduardo René Fernández González

Culiacán, Sinaloa, México, febrero de 2014

**El temor de Jehová es el principio de la sabiduría,
Y el conocimiento del Santísimo es la inteligencia.**

Proverbios 9:10

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar un agradecimiento muy especial a mis directores de Tesis, Dr. Jorge Adalberto Navarro Castillo y Dr. Eduardo René Fernández González, por su apoyo y dirección en el presente trabajo de investigación. Gracias por todo, fue un privilegio tenerles como mis directores de tesis.

Agradezco a mis maestros del posgrado por su atención y enseñanza en mi desarrollo académico.

A mis compañeros de generación Marcia, Cesar, Daniel, Edgar, Miguel y Rosendo por su colaboración, apoyo y compañía.

Agradezco a mi familia, a mi esposa Maricela, a mis hijas Elienai y Arely, y a mi hijo Jorge Uziel, por su amor incondicional, su apoyo, comprensión y oraciones para que este proyecto se pudiera realizar, les amo.

A mis padres Anselmo y Oralia, por su ejemplo, dirección y amor incondicional, les amo.

Agradezco a mis sinodales y comité revisor, por haberse tomado el tiempo en la lectura y revisión de este trabajo y por las sugerencias aportadas que enriquecieron esta investigación.

Agradezco a las instituciones que me apoyaron para poder realizar mis estudios de maestría, la Universidad Autónoma de Sinaloa, la Facultad de Informática, la Facultad de Ciencias de la Tierra y el Espacio, así como al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CVU/Becario): 429583/264854.

Agradezco a Dios, mi Señor, por cada uno de ustedes y por todo lo que me ha permitido hasta hoy.

ÍNDICE

Índice de símbolos	v
Índice de Gráficas	vii
RESUMEN	1
CAPÍTULO 1	3
1.1 Introducción	3
1.2 Motivación y significancia de la propuesta de investigación	7
1.3 Objetivo General	8
1.4 Objetivos Específicos	8
1.5 Hipótesis	9
CAPÍTULO 2	10
2.1 Problemática de la toma de decisiones	10
2.2 Métodos ELECTRE: Principales características	13
2.3. Descripción de los métodos	19
2.3.1 ELECTRE-TRI	19
2.3.2 ELECTRE-TRI-C	23
2.3.3 THESEUS	25
CAPÍTULO 3	33
3.1 Diseño experimental	33
CAPÍTULO 4	36
4.1 Introducción	36
4.2 Efectividad de THESEUS	37
4.2.1 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con el número de criterios como parámetros.	37
4.2.2 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con el número de criterios como parámetros.	40
4.2.3 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.	45
4.2.4 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.	48
4.2.5 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con número de categorías como parámetros.	51

4.2.6 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con el número de categorías como parámetros.	54
4.3 Análisis de optimidad para obtener la cardinalidad del conjunto de referencia.	59
4.3.1 Familia de gráficas por categorías para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.	59
4.3.2 Familia de gráficas por criterios para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.	62
4.4 Contrastación de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI y ELECTRE-TRI-C.	65
4.4.1 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con tres criterios.	65
4.4.2 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con cuatro criterios.	68
4.4.3 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con seis criterios.	71
4.4.4 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con ocho criterios.	74
4.4.5 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con diez criterios.	77
CAPÍTULO 5	80
5.1 Efectividad de THESEUS	80
5.1.1 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con el número de criterios como parámetros	80
5.1.2 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con el número de criterios como parámetros.	80
5.1.3 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.	81
5.1.4 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.	81
5.1.5 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con número de categorías como parámetros.	82
5.1.6 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con el número de categorías como parámetros.	82
5.2 Optimidad de la cardinalidad del conjunto de referencia	83
5.2.1 Familia de gráficas por categorías para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.	83

5.2.2 Familia de gráficas por criterios para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.	83
5.3 Contrastación de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI y ELECTRE-TRI-C.	84
5.3.1 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con tres criterios.	84
5.3.2 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con cuatro criterios.	85
5.3.3 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con seis criterios.	85
5.3.4 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con ocho criterios.	86
5.3.5 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con diez criterios.	87
5.4 Conclusiones	88
6. Referencias bibliográficas	91

Índice de símbolos

MCDA	Ayuda a la Decisión Multicriteria	3
ORT	Teoría de la Relación de Sobreclasificación	5
aSb	a sobreclasifica a b	5
$C(a,b)$	Índice de concordancia	5
$D(a,b)$	Índice de discordancia	5
$\wedge$	Operador conjuntivo	5
$\Leftrightarrow$	Doble implicación	5
$\sim$	Operador de la negación	5
P_α	Problema de decisión en la denominación de Roy (selección)	11
P_γ	Problema de decisión en la denominación de Roy (ranking)	11
P_β	Problema de decisión en la denominación de Roy (clasificación)	11
$C(a)$	Modelo de las consecuencias de la alternativa a	14
A	Conjunto de alternativas	14
$\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$	Elementos de A	14
g_i	Función proyección del i-ésimo criterio	15
$g_i(a_j)$	Evaluación hecha de la alternativa a_j en el i-ésimo criterio	15
F_i	Dominio de la función g_i	15
S	Relación de Sobreclasificación	15
$a \not S b$	a no sobreclasifica a b	15
I	Relación de Indiferencia	15
aIb	a es Indiferente con b (alternativas equivalentes)	15
P	Relación de Preferencia Estricta	16
aPb	a es significativamente preferida a b	16
Q	Relación de Preferencia Débil	16
aQb	Existe la duda entre aPb y aIb	16
R	Relación de Incomparabilidad	16
aRb	a es incomparable con b (alternativas incomparables)	16
V	Operador disyuntivo	16
$aP_i b$	a es preferida estrictamente a b con respecto al i-ésimo criterio	17
$aI_i b$	a es indiferente a b con respecto al i-ésimo criterio	17
ϕ	Umbral de indiferencia	17
ε	Umbral de preferencia	17
$aQ_i b$	a es preferida débilmente a b con respecto al i-ésimo criterio	17
(a,b)	Par de alternativas	17
$\sigma(a,b)$	Grado de credibilidad de aSb	17
$\sigma_i(a,b)$	Grado de credibilidad parcial de aSb en el j-ésimo criterio	17
W_i	Peso del j-ésimo criterio	18
$\sum$	Sumatoria	18
$d_i(a,b)$	Índice de discordancia parcial en el j-ésimo criterio	19
Vt_i	Umbral de veto para el j-ésimo criterio	19

$\forall$	Para todo	19
$\prod$	Productorio	19
B	Conjunto de perfiles	20
b_h	Límite superior de la categoría C_h y límite inferior de la categoría C_{h+1}	20
V	Conjunto de umbrales de veto	21
r_k	Perfil superior de la categoría C_k y el perfil inferior de la categoría C_{k+1}	22
U	Universo	22
λ	Nivel de credibilidad	23
T	Conjunto de referencia	25
C_t	Conjunto de categorías	25
$C(x)$	Clasificación potencial del objeto x	25
$C(b)$	Clasificación real del objeto b	25
P_m	Proposición que corresponde al modelo de preferencias del decisor	26
$\succeq$	Oración "al menos tan buena como"	26
DM	Decisor	28
D_P	Conjunto de discrepancias con la preferencia estricta	29
D_Q	Conjunto de discrepancias con la preferencia débil	29
D_I	Conjunto de discrepancias con la indiferencia	29
D_{1I}	Discrepancias con la indiferencia de nivel 1	29
D_{2I}	Discrepancias con la indiferencia de nivel 2	29
n_P	Cardinalidad del conjunto con D_P	29
n_Q	Cardinalidad del conjunto con D_Q	29
n_{1I}	Cardinalidad de las discrepancias con la indiferencia nivel 1	29
n_{2I}	Cardinalidad de las discrepancias con la indiferencia nivel 2	29
E	Conjunto de asignaciones de objetos a categorías	29
E_k	Asignación del objeto a la categoría k	29
C_f	Conjunto de categorías que son las mejores soluciones	32
Cn	La mejor categoría en C_f	32
cm	La peor categoría en C_f	32

Índice de Gráficas

Gráfica 1. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 2 categorías.	37
Gráfica 2. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 3 categorías.	38
Gráfica 3. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 5 categorías.	38
Gráfica 4. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 7 categorías.	39
Gráfica 5. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 9 categorías.	39
Gráfica 6. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 20.	40
Gráfica 7. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 40.	41
Gráfica 8. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 80.	41
Gráfica 9. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 100.	42
Gráfica 10. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 160.	42
Gráfica 11. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 200.	43
Gráfica 12. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 300.	43
Gráfica 13. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 1000.	44
Gráfica 14. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 2 categorías.	45
Gráfica 15. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 3 categorías.	46
Gráfica 16. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 5 categorías.	46
Gráfica 17. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 7 categorías.	47

Gráfica 18. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 9 categorías.	47
Gráfica 19. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 3 criterios.	48
Gráfica 20. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 3 criterios.	49
Gráfica 21. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 5 criterios.	49
Gráfica 22. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 8 criterios.	50
Gráfica 23. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 10 criterios.	50
Gráfica 24. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 3 criterios.	51
Gráfica 25. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 4 criterios.	52
Gráfica 26. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 6 criterios.	52
Gráfica 27. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 8 criterios.	53
Gráfica 28. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 10 criterios.	53
Gráfica 29. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 20.	54
Gráfica 30. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 40.	55
Gráfica 31. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 80.	55
Gráfica 32. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 100.	56
Gráfica 33. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 160.	56
Gráfica 34. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 200.	57
Gráfica 35. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 300.	57
Gráfica 36. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 1000.	58
Gráfica 37. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 2 categorías.	59
Gráfica 38. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 3 categorías.	60
Gráfica 39. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 5 categorías.	60
Gráfica 40. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 7 categorías.	61
Gráfica 41. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 9 categorías.	61

Gráfica 42. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 3 criterios.	62
Gráfica 43. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 4 criterios.	63
Gráfica 44. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 6 criterios.	63
Gráfica 45. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 8 criterios.	64
Gráfica 46. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 10 criterios.	64
Gráfica 47. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 2 categorías.	65
Gráfica 48. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 3 categorías.	66
Gráfica 49. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 5 categorías.	66
Gráfica 50. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 7 categorías.	67
Gráfica 51. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 7 categorías.	67
Gráfica 52. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 2 categorías.	68
Gráfica 53. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 3 categorías.	69
Gráfica 54. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 5 categorías.	69
Gráfica 55. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 7 categorías.	70
Gráfica 56. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 9 categorías.	70
Gráfica 57. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 2 categorías.	71
Gráfica 58. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 3 categorías.	72
Gráfica 59. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 5 categorías.	72
Gráfica 60. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 7 categorías.	73
Gráfica 61. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 9 categorías.	73
Gráfica 62. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 2 categorías.	74
Gráfica 63. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 3 categorías.	75
Gráfica 64. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 5 categorías.	75
Gráfica 65. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 7 categorías.	76
Gráfica 66. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 9 categorías.	76
Gráfica 67. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 2 categorías.	77
Gráfica 68. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 3 categorías.	78
Gráfica 69. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 5 categorías.	78
Gráfica 70. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 7 categorías.	79
Gráfica 71. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 9 categorías.	79

RESUMEN

El problema de la evaluación multicriterio es considerado un caso particular del problema de clasificación, pero que envuelve preferencias (Doupouos y Zopounidis, 2002). La clasificación se refiere a los problemas en los que las clases (grupos, categorías) han sido definidas de manera nominal. La evaluación se refiere a problemas en los que los grupos han sido definidos en una forma ordinal. Por otra parte, la clasificación multicriterio se refiere a los problemas en los que cualquier objeto que se ha clasificado o evaluado es descrito por un conjunto de funciones de criterio (Doupouos y Zopounidis, 2002). Una preferencia ordinal se define en cada criterio.

Muchos métodos de ayuda a la decisión multicriterio se han desarrollado para los problemas de evaluación multicriterio (Fernández et al., 2008). Por lo general, un método de evaluación multicriterio intenta capturar la política del decisor que está implícita en el conjunto de referencia de ejemplos previamente evaluado por algún agente decisor. Después, el modelo utiliza esa política para clasificar los objetos nuevos. En el marco de las relaciones de sobreclasificación el método más utilizado es ELECTRE - TRI (Figueira et al., 2010) .

Recientemente, el método THESEUS fue propuesto para el manejo de información preferencial contenida en grandes conjuntos de referencia (Fernández y Navarro, 2011).

Con la presente investigación buscamos proponer el mejor método que resuelva un tipo de problema dadas las características del mismo. Tomaremos como características a tomar en cuenta de los problemas: el número de los criterios, el número de categorías y el número de objetos en el conjunto de referencia.

El número de criterios y el número de categorías son establecidas a priori por el tipo de problema a resolver y que el tamaño del conjunto de referencia está dado

en función del esfuerzo que está dispuesto a invertir el decisor; un análisis que nos indique el efecto que tiene el tamaño del núcleo de referencia en el desempeño de los métodos sería de gran utilidad.

El objetivo principal de este trabajo es comparar los métodos ELECTRE-TRI pesimista, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI-C y THESEUS en relación a su respectiva capacidad para realizar asignaciones apropiadas de objetos del universo a categorías de evaluación.

CAPÍTULO 1

1.1 Introducción

Los problemas asociados a la toma de decisiones sobre un conjunto de alternativas, pueden requerir de la selección de una alternativa de solución, el ranking de las alternativas de la mejor a la peor, o la asignación de las alternativas consideradas en clases homogéneas predefinidas (Doumpos and Zopounidis, 2000). Este último tipo de problema de decisión es conocido como el problema de la clasificación o el problema de la evaluación. La clasificación se refiere a los problemas donde las clases (grupos o categorías) se han definido de manera nominal; la evaluación, se refiere a los problemas en donde las categorías han sido definidas de manera ordinal (Doumpos and Zopounidis, 2002; Fernández et al., 2008). El problema de la evaluación se encuentra con frecuencia en una variedad de campos del conocimiento, incluyendo la administración, mercadotecnia, recursos humanos, planeación estratégica y medio ambiente entre otros (Almeida-Días et al., 2011; Doumpos et al., 2008; Fernández et al., 2008).

El gran interés práctico que posee el problema de la clasificación ha motivado a los investigadores a desarrollar una gran cantidad de métodos para estudiarlo con la finalidad de desarrollar modelos matemáticos, tratando de alcanzar una clasificación lo más precisa posible. (Belacel et al., 2007; Blaszczynski et al., 2007; Bouyssou and Marchant, 2007; Fernández et al., 2008; Greco et al., 2005).

El continuo avance en otros campos del conocimiento, como la investigación de operaciones y la inteligencia artificial condujo a muchos científicos e investigadores a explotar las nuevas capacidades de estos campos, en el

desarrollo de técnicas más eficientes de clasificación. Entre los intentos realizados se pueden mencionar las redes neuronales, aprendizaje automático, conjuntos difusos, así como la ayuda a la decisión multicriterio. Ayuda a la decisión multicriterio (MCDA) tiene varias características distintivas, principalmente, su orientación a la ayuda a la decisión. Los avances significativos de MCDA, constituyen una poderosa técnica con un enfoque metodológico no paramétrico para estudiar los problemas de clasificación/evaluación. Aunque la investigación de la MCDA, hasta finales de 1970, se oriento principalmente hacia los aspectos fundamentales de este campo, así como para el desarrollo de metodologías de selección y ranking, durante los años de 1980 y 1990 importantes investigaciones se han llevado a cabo para estudiar el problema de la evaluación en el marco de la MCDA (Doupous and Zopounidis, 2000).

Varios métodos han sido propuestos para el problema de la evaluación multicriterio (Fernández et al., 2008) , y pueden clasificarse en las siguientes categorías: i) métodos basados en una relación de sobreclasificación (Roy, 1981; Massaglia and Ostanello, 1991; Yu, 1992; Perny, 1998; Belacel, 2000; Figueira et al., 2004); ii); métodos basados en un enfoque funcional (Jacquet-Lagrece, 1995; Zopounidis and Doupous, 2000; Köksalan and Ulu, 2003); iii) métodos orientados a la inducción de reglas, principalmente el enfoque rough set(Greco et al., 2001a, 2002; Kotlowski et al., 2008); iv) métodos basados en la integral de Choquet (Marichal et al., 2005; Meyer and Roubens, 2005). La presente investigación, se centra en los métodos basados en una relación de sobreclasificación.

Los métodos basados en una relación de sobreclasificación son una herramienta eficaz de ayuda a la decisión (Roy y Bouyssou, 1993), para problemas que presentan las siguientes características:

- i. Cuando al menos un criterio no es cuantitativo.
- ii. Cuando las unidades de medida de cada criterio son tan heterogéneas que es difícil aunarlas en una escala común.
- iii. Cuando la compensación entre las ganancias de un criterio y las pérdidas de otro no está muy clara.
- iv. Cuando se deben tener en cuenta umbrales de preferencia o veto.

Los fundamentos de la teoría de relación de sobreclasificación (ORT, por sus siglas en ingles) han sido establecidos por Bernard Roy durante la década de 1960 a través del desarrollo de la Familia de métodos ELECTRE (**EL**iminación **Et Choix Traduisant la RE**lité; Roy, 1968). Desde entonces, la ORT ha sido ampliamente utilizada por investigadores de MCDA, principalmente en Europa.

Todas las técnicas ORT operan en dos grandes etapas. La primera etapa implica el desarrollo de una relación de sobreclasificación, mientras que la segunda etapa implica la explotación de la relación de sobreclasificación con el fin de realizar la evaluación de las alternativas para los propósitos de selección, ranking, clasificación / evaluación.

El concepto de la relación de sobreclasificación es común a estas dos etapas. Una relación de sobreclasificación se define como una relación binaria utilizada para estimar la aseveración "a es al menos tan buena como b", La construcción de la relación de sobreclasificación se encuentra basada en los conceptos de concordancia y discordancia (Figueira et al. 2005).

Ella puede ser expresada por la siguiente equivalencia lógica (Perny 1998):

$$aSb \Leftrightarrow C(a,b) \wedge \sim D(a,b).$$

modelando la conjunción por medio del operador producto y la negación con el complemento a 1, la anterior expresión queda como:

$$a \text{ S } b = C(a, b) \cdot (1 - D(a, b))$$

donde:

$C(a,b)$ es el predicado que modela la fuerza de la coalición de concordancia; $D(a,b)$ es el predicado sobre la fuerza de la coalición en discordancia; $\wedge$ y $\sim$ son conectivos lógicos para conjunción y negación, respectivamente.

El Cuerpo Académico de Sistemas de Apoyo a la Toma de Decisiones, de la Universidad Autónoma de Sinaloa, ha desarrollado un método de clasificación multicriterio basado en una relación de sobreclasificación (Fernández y Navarro, 2011). La principal virtud del método THESEUS es su capacidad para utilizar la totalidad de la información preferencial contenida en el núcleo de referencia (conjunto de objetos clasificados previamente por el decisor); además no exige la creación de objetos específicos (que tal vez ni existan) que sirvan para separar o identificar claramente las categorías.

1.2 Motivación y significancia de la propuesta de investigación

En la literatura consultada solo existen contrastaciones de desempeño de diferentes métodos de evaluación multicriterio basados en una relación de sobreclasificación para casos particulares. Dichas comparaciones no tienen un valor práctico, más allá de ese caso en particular; a lo más, para casos similares. No existe un análisis que nos proporcione una idea de qué método utilizar para diferentes tipos de problemas. Además, por ser de nueva creación el método THESEUS, resulta de interés conocer su desempeño y efectividad, así como su contrastación frente a los principales métodos de evaluación multicriterio basados en una relación de sobreclasificación.

Con la presente investigación buscamos proponer el mejor método que resuelva un tipo de problema, dadas las características del mismo. Consideraremos como características a tomar en cuenta de los problemas: el número de los criterios, el número de categorías y el número de objetos en el conjunto de referencia.

Entendiendo que el número de criterios y el número de categorías son establecidas a priori por el tipo de problema a resolver y que la cardinalidad del conjunto de referencia está dado en función del esfuerzo que está dispuesto a invertir el decisor; un análisis que nos indique el efecto que tiene el tamaño del núcleo de referencia en el desempeño de los métodos sería de gran utilidad.

Con base a lo anterior, propusimos y dimos respuesta a las siguientes preguntas de investigación:

1. ¿Cómo se comportan los diferentes métodos de evaluación multicriterio al variar la cardinalidad del conjunto de referencia?
2. ¿Existen otras características aparte de la cardinalidad del núcleo de referencia, en un problema de evaluación multicriterio, que sean relevantes para determinar cuál es el mejor método de solución?
3. Dadas las características de un problema de evaluación multicriterio, ¿se puede determinar el tamaño óptimo del conjunto de referencia?
4. Dado un problema de evaluación multicriterio, ¿cuál es el mejor método para resolverlo?

El objetivo general y los objetivos específicos propuestos a alcanzar mediante la investigación, son los siguientes:

1.3 Objetivo General

Encontrar la relación que existe entre las características de un problema y el desempeño de los métodos de solución.

1.4 Objetivos Específicos

1. Determinar el conjunto de características más relevantes en un problema de evaluación multicriterio que nos permita identificar el método más adecuado para resolverlo.
2. Dadas las características de un problema de evaluación multicriterio, proponer el tamaño óptimo del conjunto de referencia.

1.5 Hipótesis

La efectividad de los métodos depende de los valores de las características de los problemas.

Es posible determinar el mejor método de evaluación multicriterio para cada grupo de problemas con características comunes.

La efectividad del método THESEUS aumenta al aumentar la cardinalidad del conjunto de referencia.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera, en el Capítulo 2, se hace una revisión del estado del arte de la problemática de la toma de decisiones, las características de los métodos ELECTRE y THESEUS; en el Capítulo 3, se describe la metodología usada en la investigación; en el Capítulo 4, mostramos los resultados obtenidos durante la experimentación; finalmente, en el Capítulo 5, mostramos un apartado de discusión y conclusiones.

CAPÍTULO 2

2.1 Problemática de la toma de decisiones

La ciencia de la decisión es un campo de investigación muy amplio y de rápida evolución de sus niveles teóricos y prácticos (Doumpos y Zopounidis, 2002). Los avances tecnológicos en las décadas recientes han permitido crear contextos y enfoques metodológicos mas integrados, flexibles y realistas, para el tratamiento de los problemas del mundo real. Asimismo, se ha extendido el rango de los problemas que pueden tratarse con eficiencia. La naturaleza de estos problemas está ampliamente diversificada en términos de su complejidad, el tipo de soluciones que deben ser investigarse, así como los enfoques metodológicos que pueden utilizarse para abordarlos (Perny 1998) (Doumpos y Zopounidis, 2002)(Fernández et al. 2009).

Podemos distinguir dos categorías de problemas en la toma de decisiones:(Doumpos y Zopounidis, 2002)

- **Problemas discretos** que involucran el examen de un conjunto discreto de alternativas. Cada alternativa se describe a lo largo de algunos de sus atributos. Dentro del contexto de la toma de decisiones estos atributos tienen la forma de criterios de evaluación.

- **Problemas continuos** que envuelven los casos en que el número de posibles alternativas es infinito. En tales casos sólo se puede perfilar la región donde se encuentran las alternativas (región factible), de modo que cada punto en esta región corresponde a una alternativa específico. La asignación de recursos es un representativo ejemplo de este tipo de problemas.

Al considerar un problema de toma de decisión discreto, hay tres diferentes tipos de análisis (problemáticas de la toma de decisiones) que se pueden realizar con el fin de ofrecer un apoyo significativo a los tomadores de decisiones (Roy, 1985):

P_α Identificar la mejor alternativa o seleccionar un conjunto limitado de las mejores alternativas.

P_γ Construir un ranking de alternativas de la mejor a la peor.

P_β Clasificar/evaluar las alternativas en grupos homogéneos predefinidos.

Este tipo de problemas de toma de decisiones (selección, ranking y clasificación/evaluación), como lo menciona (Doumpos y Zopounidis, 2002) conducen a un resultado específico respecto de la evaluación de las alternativas. Las problemáticas de selección y ranking están basadas en juicios relativos que involucran las comparaciones entre pares de alternativas. En consecuencia, el resultado global de la evaluación tiene un significado relativo que depende de las alternativas en evaluación. Por ejemplo, cuando determinamos que una alternativa de decisión es la mejor de entre un conjunto de ellas, es el resultado de juicios relativos y la mejor alternativa puede cambiar si el conjunto de alternativas es alterado.

Por el contrario, el problema de la clasificación, está basado en juicios absolutos. En este caso, cada alternativa es asignada a un grupo específico con base a reglas predeterminadas. Por lo general, la definición de estas reglas no depende del conjunto de alternativas que están siendo evaluadas. Por ejemplo, el resultado de la evaluación "el cliente X es sujeto de crédito" está basado en juicios absolutos, debido a que no depende de los otros clientes, que son similares al cliente X. Es claro que estos juicios no siempre son absolutos, ya que con frecuencia son definidos en un contexto general que caracteriza el ambiente de decisión. Por ejemplo, en circunstancias especiales de la economía general y el ambiente de negocios un cliente puede reunir los requisitos indispensables para ser sujeto de crédito por determinada institución crediticia (estos requerimientos son independientes de la población de clientes potenciales sujetos a créditos). No obstante, en tanto que la economía o las condiciones de negocios evolucionan, los requisitos para ser sujeto de crédito pueden cambiar y volverse más exigentes o más flexibles. Por lo tanto, es posible que una persona sea o no sujeta de crédito, según el ambiente de decisión en ese momento. A pesar de los cambios hechos a la regla de clasificación utilizada, la mayor parte de las veces la regla se define independientemente de las alternativas de decisión. Esta es la mayor diferencia entre el problema de clasificación y los problemas de selección y ranking.

Siguiendo a (Douplos, 2002), la clasificación se refiere a la asignación de un conjunto finito de alternativas en grupos predefinidos; esta es una descripción general. Hay varios términos más específicos usados a menudo para referirse a esta forma de problemas de toma de decisiones. Los más comunes son los tres siguientes:

- Discriminación
- Clasificación
- Evaluación

Los dos primeros términos son comúnmente utilizados por los estadísticos, así como por científicos en el campo de la inteligencia artificial (redes neuronales, el aprendizaje de máquina, etc) . El término "evaluación" ha sido establecido por los investigadores de MCDA.

Aunque los tres términos se refieren a la asignación de un conjunto de alternativas en grupos predefinidos, hay una diferencia notable de los tipos de problemas que describen. En particular, desde el punto de vista metodológico, los tres términos anteriores describen dos tipos diferentes de problemas. Los términos "discriminación" y "clasificación" se refieren a problemas en los que los grupos se definen en una forma nominal. En este caso las alternativas que pertenecen a diferentes grupos tienen características diferentes, sin que sea posible establecer algún tipo de relación preferencial entre ellas (es decir, los grupos proporcionan una descripción de las alternativas sin ningún tipo de información adicional). Uno de los problemas más conocidos de esta forma es el problema de clasificación del iris utilizado por Fisher (1936) con un trabajo pionero en el análisis discriminante lineal. Este problema implica la distinción entre tres especies de flores, iris setosa, iris versicolor y de iris virginica, dadas sus características físicas (Longitud y anchura del sépalo y pétalos). Obviamente, cada grupo (especie) proporciona una descripción de los miembros de flores, pero esta descripción no incorpora toda la información preferencial. También el reconocimiento de patrones es un problema ampliamente estudiado de este tipo, con numerosas aplicaciones importantes en el reconocimiento de letras, reconocimiento de voz, reconocimiento de objetos físicos y características humanas.

Por otro parte, la evaluación se refiere a problemas en donde los grupos se definen en una forma ordinal. Un ejemplo típico de esta forma de problemas, es el problema de evaluación de riesgo de quiebra. Típicamente, Los modelos de evaluación de riesgo de quiebra en general implican la asignación de una empresa en el grupo de las empresas sanas o en el grupo de las empresas en quiebra. Esta es una definición ordinal de los grupos, ya que es bastante obvio que las

empresas sanas están en una situación mejor que las que están en bancarrota. Por lo tanto, la definición de los grupos en los problemas de evaluación proporcionan no sólo una simple descripción de las alternativas, sino que también incorporan información adicional preferencial, que podría ser de interés en el contexto de la ayuda a la decisión.

Es importante hacer hincapié en la diferencia entre el problema de clasificación y el de agrupación (clustering): en el problema de clasificación los grupos se definen a priori, mientras que en el de clustering el objetivo es identificar los clusters (grupos) de las alternativas que comparten características similares.

2.2 Métodos ELECTRE: Principales características

Desde su concepción, que se inició en los años sesenta del siglo pasado, los métodos ELECTRE han sido ampliamente utilizados para la Ayuda a la Decisión MultiCriterio (MCDA) en muchos problemas de decisión en el mundo real, que van de la agricultura hasta el medio ambiente y la gestión del agua, de las finanzas a la selección de proyectos, el reclutamiento de personal y muchos otros. La investigación teórica sobre los fundamentos de los métodos ELECTRE también ha sido intensa durante todo este tiempo (Figueira et al. 2005).

La ayuda a la decisión se basa en tres pilares (Figueira et al. 2010):

1. Las alternativas (definición formal de las posibles acciones o alternativas),
2. Las consecuencias (aspectos, atributos, características, ... de las alternativas, que permiten comparar una alternativa con otra), y
3. El modelado de uno o varios sistemas de preferencias (que se componen de un implícito o explícito proceso, que para cada par de alternativas prevé, asignación de una y sólo una de tres posibilidades: la indiferencia, la preferencia o la incomparabilidad).

El último pilar requiere una explicación adicional. Cuando dadas dos alternativas, cualesquiera, en base a sus consecuencias, y en su sistema de valores, se puede afirmar: "Yo prefiero la primera a la segunda" o viceversa, "me es indiferente entre las dos", o "No puedo comparar estas dos alternativas". Un sistema de modelado de preferencia significa especificar un proceso que proporcionará este tipo de resultados basado en un modelo preestablecido de las consecuencias de las acciones. Ellas pueden ser modeladas en términos cuantitativos o cualitativamente, de manera determinista o estocástica, con una parte de arbitrariedad o determinación. Vamos a designar por $C(a)$ el modelo de las consecuencias de la alternativa a .

Para entender cuál es la filosofía de los métodos ELECTRE y qué clase de problemas puede resolver, es necesario primero especificar los supuestos iniciales que utiliza (Navarro 2005).

Existe un conjunto de alternativas (Roy, 1990), $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a considerar. Tales alternativas no son necesariamente exclusivas. Cada una de ellas está perfectamente identificada, pero no necesariamente conocida de manera exacta en todas sus consecuencias cuantitativas o cualitativas.

Existe una familia consistente F de n criterios g_i (Bouyssou, 1990), mediante los cuales se caracteriza cada una de las alternativas y pueden analizarse sus consecuencias. $g_i(a_j)$ caracteriza la evaluación hecha – con mayor o menor precisión o subjetividad – de una acción a_j sobre el i -ésimo criterio, siendo F_j el conjunto de consecuencias posibles del j -ésimo criterio.

De manera formal tenemos que:

$$g_j : a \in A \rightarrow e = g_j(a) \in F_j$$

Relación de Sobreclasificación

Los métodos ELECTRE implementan el concepto de relación de sobreclasificación (S). Diremos que $a S b$ si tomando en cuenta el conjunto de criterios se tienen argumentos suficientemente fuertes (poder de la coalición de concordancia) para considerar verdadero el enunciado “*a es al menos tan buena como b*” y se carece de argumentos de peso (debilidad de la coalición de discordancia) para refutar esa afirmación. Diremos que $a nS b$ si los argumentos a favor de la proposición “*a es al menos tan buena como b*” no son suficientes (debilidad de la coalición de concordancia), o si existen razones fuertes (existencia de una coalición de veto, forma de poder de la coalición de discordancia) que se opongan a ella.

Otra forma de definir la relación S es a través de la definición previa de un “*sistema relacional de preferencias*” formado por cuatro relaciones fundamentales (Roy, 1996):

Indiferencia (I): $a I b$ significa que existen razones claras y positivas para considerar que las alternativas son equivalentes. I es una relación simétrica.

Preferencia estricta (P): $a P b$ significa que existen razones claras y positivas para justificar que una de las dos alternativas (a) es significativamente preferida a la otra (b). P es una relación asimétrica.

Preferencia débil (Q): $a Q b$ refleja una situación de duda entre aPb y alb . Es una relación asimétrica.

Incomparabilidad (R): las alternativas son incomparables en el sentido que ninguna de las tres situaciones anteriores predomina. Se denota por aRb .

Entonces, la equivalencia $aPb \vee aQb \vee alb \Leftrightarrow aSb$ sirve como definición de la relación de sobreclasificación S .

Note que:

$$aSb \wedge bSa \Leftrightarrow aIb;$$

$$aSb \wedge b nSa \Leftrightarrow aPb \vee aQb ;$$

$$a nSb \wedge b nSa \Leftrightarrow aRb$$

Tipos de Criterios:

En lo adelante y sin perder generalidad, consideraremos que el sentido de la preferencia es el de incremento numérico de la imagen de las funciones criterio.

Criterios verdaderos: Es la forma más simple de los criterios, donde no existen umbrales, y las diferencias entre los valores de los criterios son utilizadas para determinar cuál opción se prefiere.

Se dice que la opción 'a' es preferida a la opción 'b' con respecto al i-ésimo criterio si su valor es superior, es decir:

$$aP_ib \Leftrightarrow g_i(a) > g_i(b)$$

Se dice que la opción 'a' es indiferente a la opción 'b' con respecto al i-ésimo criterio si sus valores son iguales, es decir:

$$aI_ib \Leftrightarrow g_i(a) = g_i(b)$$

Pseudo-criterios: Un pseudo-criterio reconoce dos tipos de umbrales de discriminación para las diferencias de sus valores. La utilización del valor de un criterio verdadero para modelar las preferencias es con frecuencia poco realista. La realidad nos demuestra que existe una zona intermedia dentro de la cual la información preferencial es contradictoria o indeterminada. Esto le da fundamento a la utilización de dos umbrales (ϕ , ϵ) para modelar los diferentes niveles de preferencias en cada criterio. Primero, el umbral de indiferencia ϕ , cuyo valor está relacionado con la diferencia máxima permitida antes de declarar que los valores no son preferencialmente iguales; segundo, un umbral de preferencia ϵ , valor mínimo de la diferencia entre dos valores donde el decisor expresa una preferencia estricta (sin lugar a duda). En el intermedio se encuentra una zona que representa una situación de preferencia débil. Las expresiones que aparecen a continuación muestran el uso de los umbrales:

$$aP_ib \Leftrightarrow g_i(a) > g_i(b) + \epsilon(g_i(b))$$

$$aQ_ib \Leftrightarrow g_i(b) + \epsilon(g_i(b)) \geq g_i(a) > g_i(b) + \phi(g_i(b))$$

$$aI_ib \Leftrightarrow g_i(b) + \phi(g_i(b)) \geq g_i(a) \text{ y } g_i(a) + \phi(g_i(a)) \geq g_i(b)$$

Relación de Sobreclasificación “Borrosa”

Una relación borrosa asocia un nivel o grado de credibilidad de la sobreclasificación a cada par de alternativas (a,b). Ese nivel es identificado mediante la notación $\sigma(a,b)$ y cumple que $0 \leq \sigma(a,b) \leq 1$.

Todos los métodos basados en sobreclasificación se basan en los conceptos de concordancia y discordancia que representan, en cierto sentido, los razones a favor y en contra de una situación de sobreclasificación.

Índice de Concordancia:

Para validar una relación de sobreclasificación aSa' , una mayoría suficiente de los criterios deben estar a favor de esta afirmación.

Para cada par de alternativas (a,b) , se puede definir un grado de credibilidad parcial $\sigma_j(a,b)$, asociado a la sobreclasificación de a sobre b con respecto al j -ésimo atributo, de la siguiente forma:

$$\sigma_j(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{si } g_j(a) - g_j(b) \geq 0 \\ 0 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \geq \varepsilon_j(g_j(a)) \\ 1 & \text{si } g_j(b) - g_j(a) \geq \phi_j(g_j(a)) \end{cases}$$

$$[\varepsilon_j(g_j(a)) - (g_j(a') - g_j(a))]/[\varepsilon_j(g_j(a)) - \phi_j(g_j(a))] \quad \text{si } \phi_j(g_j(a)) \leq g_j(a') - g_j(a) < \varepsilon_j(g_j(a))$$

donde ε_j y ϕ_j denotan los umbrales de preferencia estricta e indiferencia respectivamente.

Utilizando la información contenida en σ el índice de concordancia se define como:

$$c(a,b) = \sum_{j \in J} w_j \sigma_j(a,b) / \sum_{j \in J} w_j$$

Índice de Discordancia:

La afirmación aSb no puede ser validada si una minoría de los criterios se opone fuertemente a esta afirmación.

Para cada par de alternativas (a,b) , se puede definir un índice de discordancia parcial $d_j(a,b)$, asociado al j -ésimo atributo de la siguiente forma:

$$d_j(a,b) \sigma_j(a,b) = 0$$

$$d_j(a,b) = 1 \quad \text{si } g_j(b) \geq g_j(a) + vt_j(g_j(a))$$

$$d_j(a,b) = [\varepsilon_j(g_j(a)) - (g_j(b) - g_j(a))]/[\varepsilon_j(g_j(a)) - vt_j(g_j(a))] \quad \text{si } vt_j(g_j(a)) \geq g_j(b) - g_j(a) \geq \varepsilon_j(g_j(a))$$

donde vt_j denota el umbral de veto para el criterio j .

Grado de Credibilidad:

Para cualquier par de alternativas (a,b) el grado de credibilidad $\sigma(a,b)$ asociado a la sobreclasificación de la acción a sobre b se define de la siguiente forma:

$$\sigma(a,b) = \begin{cases} c(a,b) & \text{si } d_j(a,b) \leq c(a,b) \quad \forall j \in J \\ c(a,b)_{j \in J^*} (1-d_j(a,b))/(1-c(a,b)) & \text{en otros casos} \end{cases}$$

donde J^* es el conjunto de criterios donde $d_j(a,b) > c(a,b)$

2.3. Descripción de los métodos

2.3.1 ELECTRE-TRI

ELECTRE-TRI es un método multicriterio (Yu, 1992; Roy y Bouyssou, 1993) que busca asignar a un grupo de alternativas $A=\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ evaluadas para n criterios $F=\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ a unas categorías ordenadas y predefinidas.

El método ELECTRE-TRI responde a la problemática de la segmentación. Esta problemática hace referencia a juicios absolutos. Consiste en asignar cada alternativa en una categoría. Asignar una alternativa a_k a una categoría determinada es el resultado de una valoración intrínseca en función de unos determinados criterios y de los límites o referencias establecidos para la categoría

(la asignación de a_k a una categoría específica no influye en la asignación del resto de alternativas).

Esquemáticamente podríamos decir que el método ELECTRE-TRI asigna las alternativas a las distintas categorías siguiendo dos procedimientos consecutivos:

1. La construcción de una relación de sobreclasificación S que caracteriza como las alternativas se comparan con los límites de la categoría.
2. La explotación (mediante procedimiento de asignación) de la relación S con el fin de asignar cada alternativa a una categoría específica.

La relación de sobreclasificación se plantea como sigue:

Siendo F el conjunto de indicadores de los criterios $g_1, g_2, \dots, g_n$ y B el conjunto de indicadores de los perfiles que definen $p+1$ categorías ($B=\{1, 2, \dots, p\}$) y siendo b_h el límite superior de la categoría C_h y al mismo tiempo el límite inferior de la categoría C_{h+1} , ($h=1, 2, \dots, p$), el método ELECTRE TRI construye una relación de sobreclasificación S , expresando en qué medida un criterio apoya o se opone a la proposición de que una alternativa "a es al menos tan buena como b".

Las preferencias limitadas al eje de significación de cada criterio se definen como pseudocriterios. Los umbrales de preferencia ($q_j(b_h)$ y $p_j(b_h)$) constituyen la información de preferencia para cada criterio, donde $q_j(b_h)$ especifica la mayor diferencia $g_j(a) - g_j(b_h)$ que mantiene la indiferencia entre a y b_h para el criterio g_j ; y $p_j(b_h)$ representa la menor diferencia $g_j(a) - g_j(b_h)$ compatible con una preferencia de a en función del criterio g_j .

Para un nivel comprensible de preferencias, y con objeto de validar la afirmación aSb (ó bSa), deberían verificarse dos condiciones:

- Concordancia: para que aSb (ó bSa) sea aceptado, una mayoría "suficiente" de criterios debe apoyar esta afirmación,

- No discordancia: cuando se cumple la condición de concordancia ninguno de los criterios de la minoría se opone de manera significativa a la afirmación aSb (ó bSa).

En la construcción de la relación de sobreclasificación intervienen dos tipos de parámetros relacionados con los criterios:

- El conjunto de pesos de cada criterio (coeficientes de importancia de cada criterio) $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ es usado en la prueba de concordancia como la relativa importancia de la unión de los criterios a favor de la afirmación aSb .
- El conjunto de umbrales de veto V $(v_1(b_h), v_2(b_h), \dots, v_m(b_h))$, es usado en la prueba de discordancia, representado $v_j(b_h) - g_j(a)$ incompatible con la afirmación aSb .

Para poder comparar una alternativa a con una alternativa de referencia b , el método ELECTRE TRI construye una relación de sobreclasificación. Para la construcción de esa relación se realizan los siguientes procesos:

1. Cálculo de los índices parciales de concordancia $c_j(a,b)$ y $c_j(b,a)$;
2. Cálculo de los índices totales de concordancia $c(a,b)$;
3. Cálculo de los índices parciales de discordancia $d_j(a,b)$ y $d_j(b,a)$;
4. Establecimiento de relaciones de sobreclasificación valoradas a partir de los grados de credibilidad $S(a,b)$;
5. Transformación de una relación de sobreclasificación;

En cuanto al procedimiento de asignación existen, en este método, dos procedimientos para asignar una alternativa (a) a una de las categorías predefinidas, una vez que esta alternativa ha sido comparada con los perfiles de referencia. estos dos procedimientos de asignación son los siguientes:

- a) Procedimiento pesimista. El procedimiento pesimista (o conjuntivo) compara (a) sucesivamente con los distintos perfiles $b_i (i=p, p-1, \dots, 0)$, es decir comenzando por los perfiles más altos, hasta encontrar aquel perfil b para el cual aSb . Una vez encontrado ese perfil, se asigna (a) a la categoría C_{h+1} . Si b_{h-1} y b_h representan el perfil más bajo y el más alto, respectivamente de la categoría C_h , el procedimiento pesimista asigna a la alternativa (a) a esa categoría siempre que se cumpla que aSb .
- b) Procedimiento optimista. El procedimiento optimista (o disyuntivo) compara (a) sucesivamente con $b_i (i=1, 2, \dots, p)$, es decir comenzando por los perfiles más bajos, hasta encontrar el perfil b_h para el cual bSa . Una vez encontrado el perfil que cumpla esa condición, se asigna (a) a la categoría C . Este procedimiento asigna (a) a la categoría más baja C_h para que el perfil alto b_h es preferido a (a).

Los elementos de referencia r_k son introducidos por ELECTRE-TRI como el perfil superior a la categoría C_k y el perfil inferior de la categoría C_{k+1} , ($k=1, \dots, M$). Para cada k r_{k+1} y r_k debe mantenerse, al menos, la condición de dominancia estricta. Dado un universo U , otros dos perfiles ficticios r_{M+1} y r_0 son incluidos de tal forma que $r_{M+1} > x$ y $xSr_0 \forall x \in U$. Existen dos reglas de asignación:

Procedimiento Conjuntivo (“pesimista”):

- Comparar x_j con r_k para $k=M, M-1, \dots, 0$;
- Encontrar $r_{k'}$ siendo el primer perfil tal que $x_jSr_{k'}$;
- Asignar x_j a la categoría $C_{k'+1}$.

Procedimiento Disyuntivo (“optimista”)

- a) Comparar x_j con r_k for $k=1, 2, \dots, M+1$;
- b) Encontrar r_{k^*} siendo el primer perfil tal que $r_{k^*} > x_j$;
- c) Asignar x_j a la categoría C_{k^*} .

2.3.2 ELECTRE-TRI-C

ELECTRE TRI-C (Almeida-Dias, 2010) es un nuevo método para clasificar los problemas diseñados para tratar con situaciones de ayuda a la decisión en las que se define cada categoría por una acción de referencia central, abandonando la idea de los perfiles frontera del clásico ELECTRE-TRI. Las acciones de referencia se construyen a través de un proceso interactivo que implican al analista y al tomador de decisiones. ELECTRE TRI-C ha sido concebido también para verificar una serie de requisitos estructurales naturales (Conformidad, Homogeneidad, Monotonía, y Estabilidad). El método hace uso de dos reglas de asignación conjuntas, cuando el resultado es un rango de Categorías para cada alternativa a ser asignada. El conjunto A de las alternativas a considerar o bien se conocen por completo, a priori, o pueden aparecer progresivamente durante el proceso de ayuda a la decisión. El objetivo es asignar estas alternativas a un conjunto de categorías totalmente ordenado, denotado por $C_1, \dots, C_h, \dots, C_q$ con $q \geq 2$. Las dos reglas conjuntas, llamadas regla descendente y regla ascendente, se describen a continuación:

Regla Descendente

Elegir un nivel de credibilidad $\lambda \in [0.5, 1]$. Decrementar h de (q+1) hasta el primer valor t, de tal manera que $\sigma(a, b_t) \geq \lambda$:

- a) Para $t = q$, seleccionar C_q como una posible categoría para asignar la alternativa a .
- b) Para $0 < t < q$, Si $p(a, b_t) > p(a, b_{t+1})$, entonces seleccionar C_t como una posible categoría para asignar a ; de otra manera, seleccionar C_{t+1} .
- c) Para $t = 0$, seleccionar C_1 como una posible categoría para asignar a .

Regla Ascendente

Elegir un nivel de credibilidad $\lambda \in [0.5, 1]$. Incrementar h de 0 hasta el primer valor k , de tal manera que $\sigma(b_k, a) \geq \lambda$:

- a) Para $k = 1$, seleccionar C_1 como una posible categoría para asignar la alternativa a .
- b) Para $1 < k < (q+1)$, Si $p(a, b_k) > p(a, b_{k-1})$, entonces seleccionar C_k como una posible categoría para asignar a ; de otra manera, seleccionar C_{k-1} .
- c) Para $k = (q+1)$, seleccionar C_q como una posible categoría para asignar a .

cada una de las dos reglas conjuntas requiere la función de selección $p(a, b_h)$, que permite elegir entre dos categorías consecutivas, donde una alternativa a puede ser asignada.

Los resultados aparecen en una de las siguientes formas, que el tomador de decisiones puede elegir:

1. Una sola categoría, cuando las dos categorías seleccionadas son iguales.

2. Una de las dos categorías seleccionadas, cuando tales categorías son consecutivas.
3. Una de las dos categorías seleccionadas o una de las categorías intermedias, cuando tales categorías no son consecutivas.

2.3.3 THESEUS

Fernández y Navarro (2011) propusieron el método THESEUS, que se basa en la comparación de una relación borrosa de un nuevo objeto a clasificar, con cada uno de los elementos del conjunto de referencia. A continuación se describen las generalidades del método, para mayor referencia ver Fernández y Navarro (2011).

Conceptos básicos

Sea $Ct = \{C_1, \dots, C_M\}$ ($M \geq 2$) el conjunto de categorías ordenadas, donde C_M es la categoría preferida; U es el conjunto de objetos (acciones) descritos por un conjunto de criterios independientes $G = \{g_1, \dots, g_N\}$; el Decisor expresa sus preferencias en forma implícita en un conjunto de objetos de referencia T , el cual está compuesto de elementos $b_{k,h} \in U$ asignados a las categorías C_k , ($k = 1, \dots, M$); $\sigma(x, y)$ representa una relación de sobreclasificación difusa definida en $U \times U$; $\lambda > 0.5$ es el umbral de sobreclasificación.

Definición 1: Las siguientes relaciones binarias deterministas se obtienen del universo. (Fernández et al., 2011).

$(x, y) \in S(\lambda)$ si y solo si $\sigma(x, y) \geq \lambda$ (λ -sobreclasificación)

$(x, y) \in P(\lambda)$ si y solo si $\sigma(x, y) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x) < 0.5$ (λ -preferencia estricta)

$(x, y) \in Q(\lambda)$ si y solo si $\sigma(x, y) \geq \lambda \wedge 0.5 \leq \sigma(y, x) < \lambda$ (λ -preferencia débil)

$(x, y) \in I(\lambda)$ si y solo si $\sigma(x, y) \geq \lambda \wedge \sigma(y, x) \geq \lambda$ (λ -indiferencia).

$(x, y) \in R(\lambda)$ si y solo si $\sigma(x, y) < \lambda \wedge \sigma(y, x) < \lambda$ (λ -incomparabilidad).

Definición 2: Se dice que un conjunto de referencia T cubre Ct si y solo si para cada $C_k \in Ct$ hay al menos un $b_{k,h} \in T$ tal que $C(b_{k,h}) = C_k$.

Sea $x \in U$, consideraremos que $C(x)$ denota una clasificación potencial del objeto x y sea $b \in T$, entonces $C(b)$ representa la clasificación real de b . Si denotamos como P_m al predicado definido sobre $U \times U$, tal que $P_m(x, y)$ es verdadera si y solo si el modelo de preferencia prescribe que “ x es al menos tan buena como y ”. Una perfecta consistencia entre P_m , T y $C(x)$ es representada por la siguiente implicación:

$$\begin{aligned} \forall b \in T \quad P_m(x, b) &\Rightarrow C(x) \succeq C(b) \\ P_m(b, x) &\Rightarrow C(b) \succeq C(x) \end{aligned} \quad (1)$$

Tomando a σ como base del modelo de preferencia y con el fin de mantener la correspondencia con la ecuación (1), $C(x)$ debe satisfacer:

$$\forall x \in U, \quad \forall b \in T \quad \sigma(x, b) \geq \lambda \quad \Rightarrow \quad C(x) \succeq C(b) \quad (2.a)$$

$$\sigma(b, x) \geq \lambda \quad \Rightarrow \quad C(b) \succeq C(x) \quad (2.b)$$

$$C(x) \succeq C(b) \quad \Rightarrow \quad \sigma(x, b) \geq \lambda \quad (2.c)$$

$$C(b) \succeq C(x) \quad \Rightarrow \quad \sigma(b, x) \geq \lambda \quad (2.d)$$

Formulaciones similares a 2.a y 2.b se introdujeron en primer lugar por Köksalan et al. (2009) y Fernández et al. (2009).

En la mayoría de los modelos de sobreclasificación las condiciones 2.c y 2.d pueden ser violadas por los efectos de i) reforzar las preferencias (cf. Roy y Slowinski, 2008), y ii) la capacidad de discriminación limitada del modelo de preferencia basada en el conjunto de categorías. Vamos a considerar el punto i) y supongamos que σ se calcula como en el método original de ELECTRE-III (cf. Roy, 1991). Importantes ventajas de x sobre b (o viceversa) en algunos criterios hacen posible que x sea asignada a una categoría por lo menos tan buena como la $C(b)$ (o viceversa), aunque $\sigma(x, b) < \lambda$ (o $\sigma(b, x) < \lambda$) (punto i)). Con respecto al punto ii), $C(x) = C(b)$ no quiere decir que x y b son λ -indiferentes, tal vez sea

posible que x y b fueron asignados a la misma categoría y sin embargo, $bR(\lambda)x$ o $bQ(\lambda)x$, incluso $bP(\lambda)x$. Por lo tanto, de las ecuaciones en (2) sólo se mantendrá 2.a y 2.b. Mediante el uso de la definición 1 estas implicaciones pueden transformarse en:

$$\forall x \in U, \forall b \in T$$

$$xP(\lambda)b \Rightarrow C(x) \succeq C(b) \quad (3.a)$$

$$bP(\lambda)x \Rightarrow C(b) \succeq C(x)$$

$$xQ(\lambda)b \Rightarrow C(x) \succeq C(b) \quad (3.b)$$

$$bQ(\lambda)x \Rightarrow C(b) \succeq C(x)$$

$$xI(\lambda)b \Rightarrow C(x) \succeq C(b) \wedge C(b) \succeq C(x) \Leftrightarrow C(x) = C(b) \quad (3.c)$$

Las ecuaciones (3.a), (3.b), (3.c) expresan la necesaria consistencia entre el modelo de preferencia, el conjunto de referencia y las asignaciones apropiadas de x . Cuando alguna implicación de (3) es violada por un par $(C(x), C(b))$, por lo menos una de las siguientes proposiciones debe ser cierta: I) x podría no ser asignada en $C(x)$; II) la clasificación de b en $C(b)$ no era la adecuada, III) el modelo de preferencia σ no es el adecuado para el par (x, b) o (b, x) . IV) El valor seleccionado de λ no es el adecuado.

Al restringir esto a pares pertenecientes a $T \times T$, las ecuaciones en (3.a), (3.b), (3.c) permiten la consistencia entre el modelo de preferencia y el conjunto de referencia para ser revisado y mejorado. Las siguientes definiciones se relacionan con esta consistencia.

Definición 3: Un conjunto de referencia T se llama (σ, λ) auto-consistente si

$$\forall (b_{k,h}, b_{j,i}) \in T \times T$$

$$b_{k,h} P(\lambda) b_{j,i} \Rightarrow k \geq j$$

$$b_{k,h} Q(\lambda) b_{j,i} \Rightarrow k \geq j$$

$$b_{k,h} I(\lambda) b_{j,i} \Rightarrow k=j$$

Definición 3': Un conjunto de referencia T se llama (σ, λ) auto-consistente si

$$\forall (b_{k,h}, b_{j,i}) \in T \times T$$

$$j > k \Rightarrow b_{j,i} P(\lambda) b_{k,h} \vee b_{j,i} Q(\lambda) b_{k,h} \vee b_{j,i} R(\lambda) b_{k,h}.$$

Para construir un conjunto de referencia autosuficiente, podemos distinguir entre dos situaciones diferentes: una como el resultado de decisiones pasadas donde hay muchos objetos clasificados los cuales pueden ser utilizados como ejemplos de referencia. O T podría ser construido por el DM y el analista los cuales podrían tomar las decisiones de cuales objetos pueden ser seleccionados como ejemplos de referencia y hacer las asignaciones correspondientes.

En el primer caso, hay tres maneras para hacer que un conjunto de referencia sea auto-consistente: i) mediante la actualización de algunos objetos de referencia, ii) mediante la eliminación de los pares que causan las inconsistencias, y iii) la mejora de la inicialización del modelo de parámetros, ya que algunas inconsistencias pueden ser provocadas por una asignación errónea de los parámetros. En el sentido del punto iii), un método para mejorar un conjunto de referencia auto-consistente fue propuesto por los autores en (Fernández et al., 2009). En el segundo caso (T es construida por el DM y el analista) es suficiente con poblar el conjunto de referencia, cubriendo todas las categorías tomando en cuenta la definición 3'.

Asignación de los objetos en las categorías

Una vez que la consistencia de las preferencias del modelo del conjunto de referencia se ha mejorado, THESEUS utiliza las inconsistencias de las ecuaciones

(3.a), (3.b), (3.c) para la comparación de las posibles asignaciones de x . Más específicamente:

- El conjunto de $P(\lambda)$ -inconsistencias para x y $C(x)$ es definido como $D_P = \{(x,b),(b,x), b \in T \text{ tal que (3.a) es falsa}\}$. Casos en que $xP(\lambda)b$ aunque $C(x) = C(b)$ pueden ser consecuencia de una limitada capacidad de discriminación del conjunto de categorías.
- El conjunto de $Q(\lambda)$ -inconsistencias para x y $C(x)$ es definido como $D_Q = \{(x,b),(b,x), b \in T \text{ tal que (3.b) es falsa}\}$.
- El conjunto de $I(\lambda)$ -inconsistencias para x y $C(x)$ es definido como $D_I = \{(x,b), b \in T \text{ tal que (3.c) es falsa}\}$.

Supongamos que $C(x) = C_k$ and $C(b) = C_j$. Algunos casos en que $xI(\lambda)b \wedge |k-j|=1$ podría explicarse por "discontinuidad" de la descripción; x puede estar cerca del límite superior de C_k y b cerca del límite inferior de C_j . Son llamados de segundo orden $I(\lambda)$ -inconsistencias y agrupamientos del conjunto D_{2I} . El conjunto $D_{1I} = D_I - D_{2I}$ contiene el llamado primer orden $I(\lambda)$ -inconsistencias, que no son consecuencias del efecto de discontinuidad descrito. n_P, n_Q, n_{1I}, n_{2I} denotan la cardinalidad de los conjuntos de inconsistencia antes definidos.

En este contexto, THESEUS utiliza la información existente con fines de clasificación. Considere un nuevo objeto $x_j \in U$ para ser clasificados y un conjunto E de M estados diferentes, $E_k = \text{"asignar } x \text{ a } C_k$ ". Note que E_k corresponde a $C_k = C(x)$. Tenga en cuenta también que n_P, n_Q, n_{1I}, n_{2I} son las funciones dependientes de E_k . Para cada estado E_k sólo se tiene un vector de las inconsistencias. Se define una función vectorial de cuatro dimensiones con la imagen $(n_P, n_Q, n_{1I}, n_{2I})$ en el conjunto E . La mejor asignación de x_j debe ser el estado E_{best} que es la "mejor" acción en el conjunto E . Cada acción en este conjunto se describe mediante un vector de criterios $(n_P, n_Q, n_{1I}, n_{2I})$; n_{2I} es el criterio menos importante. Así, el problema de evaluación multicriterio se ha transformado en un caso particular de $P\alpha$. Aunque esto no es un problema de optimización (el conjunto de

decisiones es una simple lista de estados), utilizaremos la siguiente notación por conveniencia:

$$\text{Minimize } (n_P, n_Q, n_{1l}, n_{2l})_{T,\sigma,\lambda} \quad (4)$$

$$E_k \in E$$

El primero debe ser el criterio más importante. n_Q y n_{1l} tienen una importancia similar. E_{best} se debe obtener como la mejor solución de compromiso para el problema

$$\text{Minimize } (n_P, (n_Q + n_{1l}), n_{2l})_{T,\sigma,\lambda} \quad (4')$$

$$E_k \in E$$

Para comparar n_P con $(n_Q + n_{1l})$, se requeriría poseer información sobre la intensidad de la inconsistencia. En ausencia de información adicional acerca de "la intensidad de la inconsistencia", la forma más sencilla de acercarse a (4) es la definición de

$$N_1 = n_P + n_Q + n_{1l}$$

$$N_2 = n_{2l}$$

y la transformación de (4) en un problema de decisión bicriterio.

$$\text{Minimize } (N_1, N_2)_{T,\sigma,\lambda} \quad (5)$$

$$E_k \in E$$

con prioridad lexicográfica favoreciendo el primer criterio. Tenga en cuenta que (5) se refiere siempre a un determinado (x, T, σ, λ) . Por lo tanto, la mejor acción de acuerdo con (5) debe ser (N_{1best}, N_{2*}) , de tal manera que $N_{1best} = \min_k N_1(E_k)$ (con $E_k \in E$), and $N_{2*} = \min_j N_2(E_j)$ (con E_j tal que $N_1(E_j) = N_{1best}$).

Regla de asignación básica de THESEUS

Un proceso enumerativo es adecuado para la solución de (5) ya que por lo general Ct se compone de algunos elementos. Dicho recuento se puede realizar en sentido ascendente o descendente. De manera ascendente, el proceso para la solución de (5) es equivalente a lo siguiente:

3.3.3.1 Regla de asignación básica:

- a) Asignar el nivel de credibilidad mínima $\lambda > 0.5$;
- b) Iniciando con $k=1$ ($k=1, \dots, M$) y considerando cada $b_{k,h} \in T$, calcular $N_1(E_k)$;
- c) Identificar el conjunto $\{E_j\}$ cuyos elementos tienen $E_j = \min_k N_1(E_k)$;
- d) Seleccionar $E_{k^*} = \min \{E_j\}$;
- e) Si E_{k^*} es una solución única, asignar x en C_{k^*} ; otras situaciones se abordan a continuación.

Cuando varias declaraciones, cada una asociadas a una categoría en particular, se configuran como la mejor solución para (5), solo una de esas categorías debe ser elegida como la clasificación final. Podemos distinguir dos casos: a) hay un agente de decisión a cargo de tomar la decisión final; b) la asignación final debe ser decidida sin consultar al tomador de decisiones. en el primer caso el agente decisor puede usar información adicional, incluso su propia interpretación de la política de decisión implícita en el conjunto de referencia. El segundo caso se discute a continuación:

Supongamos que C_k, C_{k+1} ambas corresponden a (N_{1best}, N_{2^*}) . Sea $I(x, y)$ el valor de la relación de indiferencia utilizado por Fernández et al. (2008, 2009) con fines de clasificación $i(x, y) = \min(\sigma(x, y), \sigma(y, x))$. La elección entre C_k, C_{k+1} se hace por "la proximidad preferencial". El elemento "más cercano" para x_j con respecto a C_k se define como y_k tal que $i(x_j, y_k) = \max_h i(x_j, b_{k,h})$. De manera similar, el

elemento "más cercano" para x_j con respecto a la C_{k+1} tal que $i(x_j, y_{k+1}) = \max_h i(x_j, b_{k+1,h})$. Las reglas propuestas son las siguientes:

- Si $i(x_j, y_k) > i(x_j, y_{k+1})$ y $i(x_j, y_k) \geq 0.5$, x_j es clasificado en C_k ;
- Si $i(x_j, y_k) < i(x_j, y_{k+1})$ y $i(x_j, y_{k+1}) \geq 0.5$, x_j es clasificado en C_{k+1} ;
- en otro caso, considere C_k y C_{k+1} como las asignaciones pesimista y optimista para la clasificación de x_j .

Cuando más de dos elementos de E son las mejores soluciones para (5), una generalización del proceso anterior es sencillo.

Denotemos por C_f el conjunto de categorías que son las mejores soluciones para (5). Si a C_n y C_m le corresponden la mejor y la peor categoría en C_f . Para cada l en el intervalo $[m, n]$ calcular $i(x_j, y_l) = \max_h i(x_j, b_{l,h})$. Encontrar $i(x_j, y_L) = \max_l i(x_j, y_l)$. Entonces:

- I1. Si y_L es un solo óptimo y $i(x_j, y_L) \geq 0.5$, seleccionar C_L como la final decisión.
- I2. Si $i(x_j, y_L) < 0.5$, considerar C_n and C_m como las asignaciones pesimista y optimista para la clasificación de x_j .
- I3. En caso de múltiples óptimos de $\max_l i(x_j, y_l) \geq 0.5$, considere el óptimo extremo como la asignación pesimista y optimista.

La combinación de la regla de asignación básica con el procedimiento de los últimos párrafos se denomina la regla de THESEUS de asignación extendida.

CAPÍTULO 3

3.1 Diseño experimental

Nuestro objetivo es explorar el rendimiento de los métodos de evaluación multicriterio basados en una relación de sobreclasificación, en un amplio rango de número de categorías, número de criterios y número de objetos en el conjunto de referencia.

En el presente trabajo se consideraron los siguientes valores para el número de categorías, número de criterios y número de objetos en el conjunto de referencia.

Categorías: 2, 3, 5, 7, 9

Criterios: 3, 4, 6, 8, 10

Cardinalidad del Conjunto de Referencia: 20, 40, 80, 100, 160, 200, 300, 1000

Para cada una de las combinaciones de los valores (200 en total) se generan 400 instancias de la siguiente manera:

1. Inicialización de las propiedades de las instancias.
2. Inicialización de un modelo de parámetros de sobreclasificación difuso: pesos, indiferencia, preferencia estricta y umbrales de veto.

El peso para cada criterio i se generó aleatoriamente dentro del rango $[1,10]$ y bajo una distribución uniforme.

Posteriormente se normalizaron de la siguiente manera:

$$\sum w_i = 1$$

$$wi = \frac{wi}{\sum wi}$$

La generación del valor del umbral de indiferencia para cada criterio i generado aleatoriamente cumple la siguiente condición:

$$0 \leq q_i \leq 3$$

La generación del valor del umbral de preferencia para cada criterio i generado aleatoriamente cumple con las siguientes condiciones:

$$0 \leq p_i \leq 3$$

$$q_i \leq p_i \text{ si no cumple } p_i = q_i$$

Solo los criterios con peso mayor al peso promedio (considerados importantes) tienen capacidad de Veto, el cual es generado aleatoriamente cumpliendo con la siguiente condición:

$$\text{Si } w_i > W_{\text{promedio}}$$

$$1.5 p_i \leq V_i \leq 3p_i$$

Si no cumple la condición $w_i > W_{\text{promedio}}$, se asigna el valor superior al valor máximo del rango del atributo.

$$V_i = 11$$

2. La construcción de un conjunto de perfiles de referencia compatibles con ELECTRE-TRI generados aleatoriamente; donde se cumple la condición de separabilidad que sugiere Doumpos et al., 2009.

R_1 frontera entre C_1 y C_2

$$R_1 = (2, 2, \dots, 2)$$

Para generar los demás perfiles:

$$R_{k+1,i} \geq R_{k,i} + 2 P_i$$

3. Simulación de preferencias; para la simulación de preferencias (política de decisión) un tomador de decisiones virtual es definido para simular las preferencias de acuerdo al comportamiento entre los procedimientos "pesimista" y "optimista" del método ELECTRE-TRI (Yu, 1992; Roy y Bouyssou,1993). Este "tomador de Decisiones" asigna cada objeto en la categoría intermedia de las asignaciones conjuntiva y disyuntiva (procedimientos pesimista y optimista de ELECTRE-TRI).

Si los dos procedimientos recomiendan la misma categoría, el decisor virtual asigna esa categoría, si no, se toma la categoría intermedia entre los dos procedimientos.

4. Construcción del conjunto de referencia (solo para THESEUS y ELECTRE-TRI-C). En el caso de THESEUS, un conjunto de referencia con la cardinalidad deseada es generado. Cada objeto se genera de forma aleatoria, y asignado por el "Tomador de Decisiones" virtual a una categoría específica. En el caso de ELECTRE-TRI-C, cada categoría es poblada por un objeto. El objeto de la categoría más baja es generado de forma aleatoria. El resto de los objetos representativos (uno por categoría) son generados de manera heurística incrementado el valor de los criterios del objeto de la categoría adyacente, pero teniendo cuidado de satisfacer la condición de separabilidad (Almeida-Días et al., 2009).

Condición de separabilidad de ELECTRE-TRI- C

$$\sigma(b_h, b_{h+1}) < \frac{1}{2}, h = 1, \dots, (q-1)$$

5. Construcción de la muestra del universo. Se crea una muestra de 400 objetos cuyos valores son generados aleatoriamente en el rango [1,10]. Estos objetos son evaluados por el Decisor Virtual y por cada uno de los métodos considerados.

Las evaluaciones hechas por cada uno de los métodos son contrastadas con la evaluación del Decisor virtual, para medir su efectividad.

Se calculó la media y la desviación estándar en las 400 instancias generadas con el fin de evaluar la confiabilidad estadística de los resultados.

CAPÍTULO 4

4.1 Introducción

En este capítulo, se muestran los resultados experimentales considerando los diferentes números de criterios (3, 4, 6, 8, 10), número de categorías (2, 3, 5, 7, 9), y cardinalidad del conjunto de referencia (20, 40, 80, 100, 200, 300, 1000).

Primero, se muestra la efectividad de THESEUS con base en el total de aciertos en cada caso. La idea es mostrar la efectividad de THESEUS desde todos los puntos de vista para facilitar las conclusiones y lograr una mayor objetividad en las discusiones. Considerando la efectividad de THESEUS cuando da como recomendación una categoría y coincide con la categoría dada por el decisor artificial.

Segundo, un análisis de optimidad para obtener la cardinalidad del conjunto de referencia.

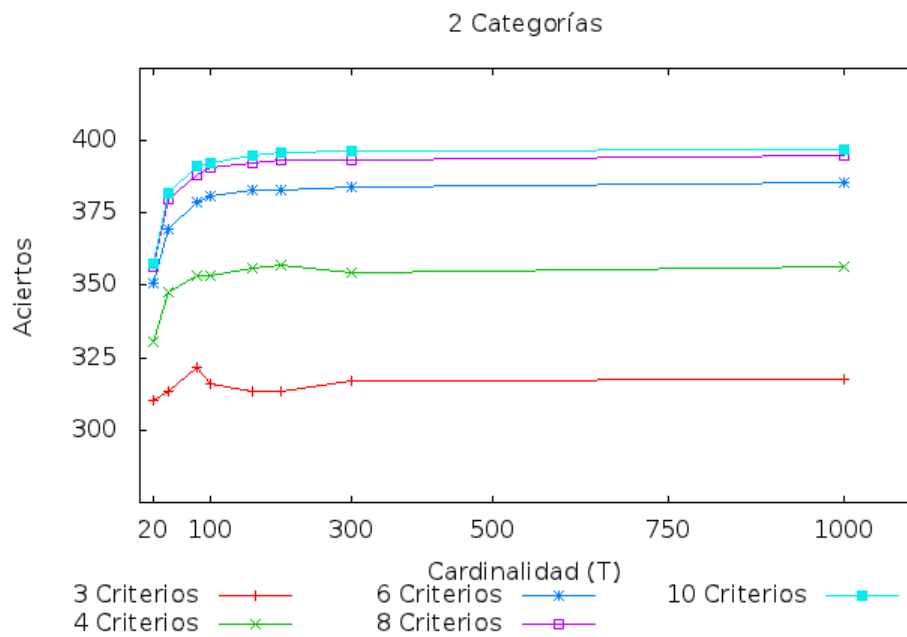
Por último, un análisis del contraste entre la efectividad de los métodos ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista, ELECTRE-TRI-C y el método THESEUS.

4.2 Efectividad de THESEUS

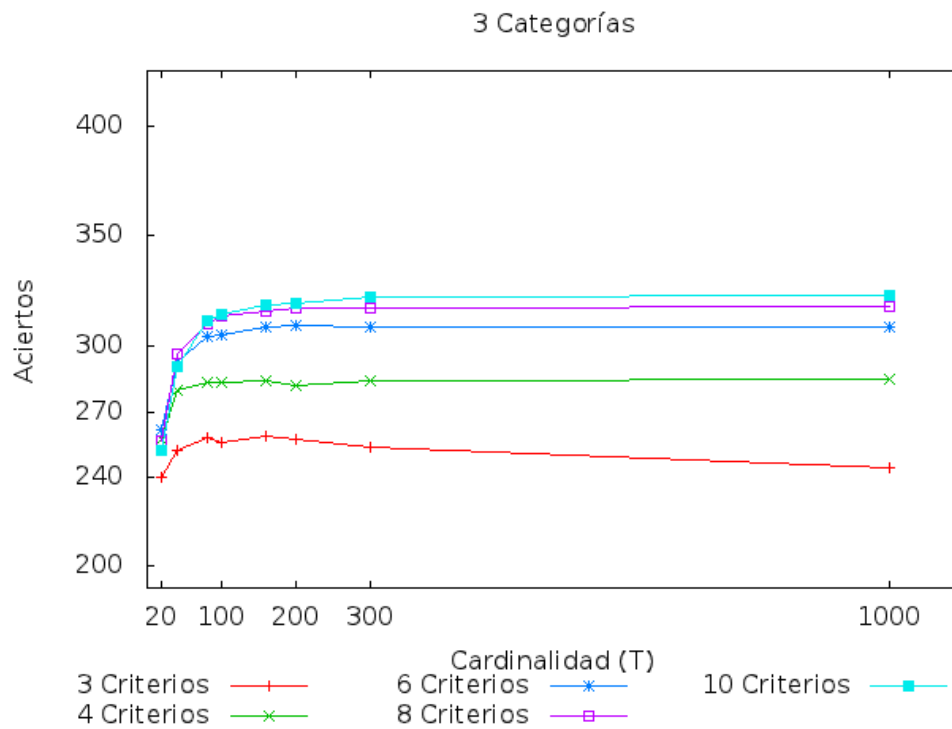
4.2.1 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con el número de criterios como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en los diferentes tamaños del conjunto de referencia utilizados, con el número de criterios como parámetros.

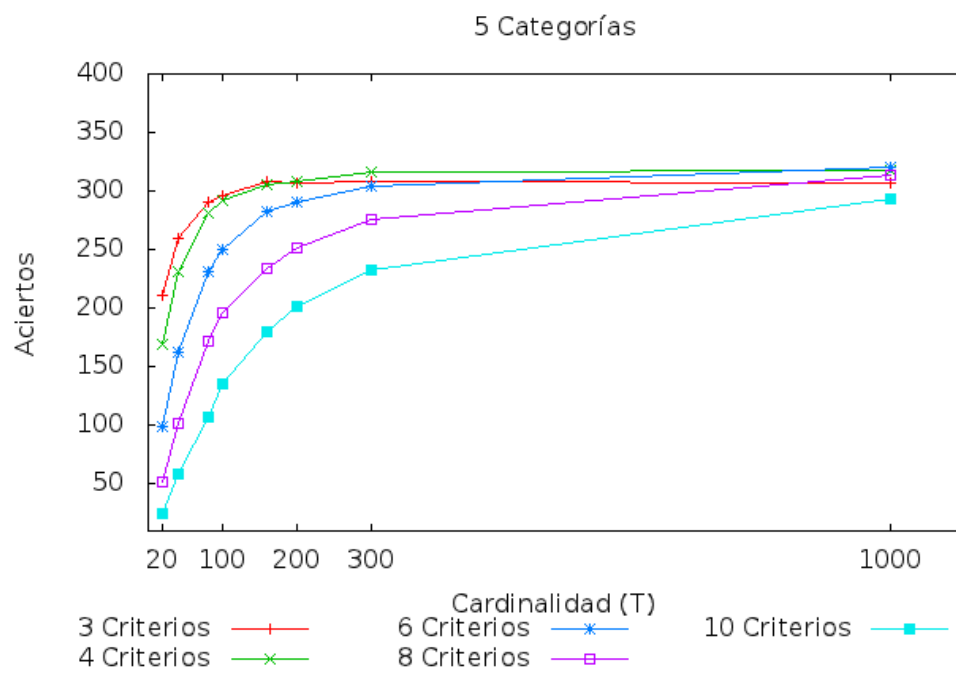
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en las diferentes categorías utilizadas durante la experimentación.



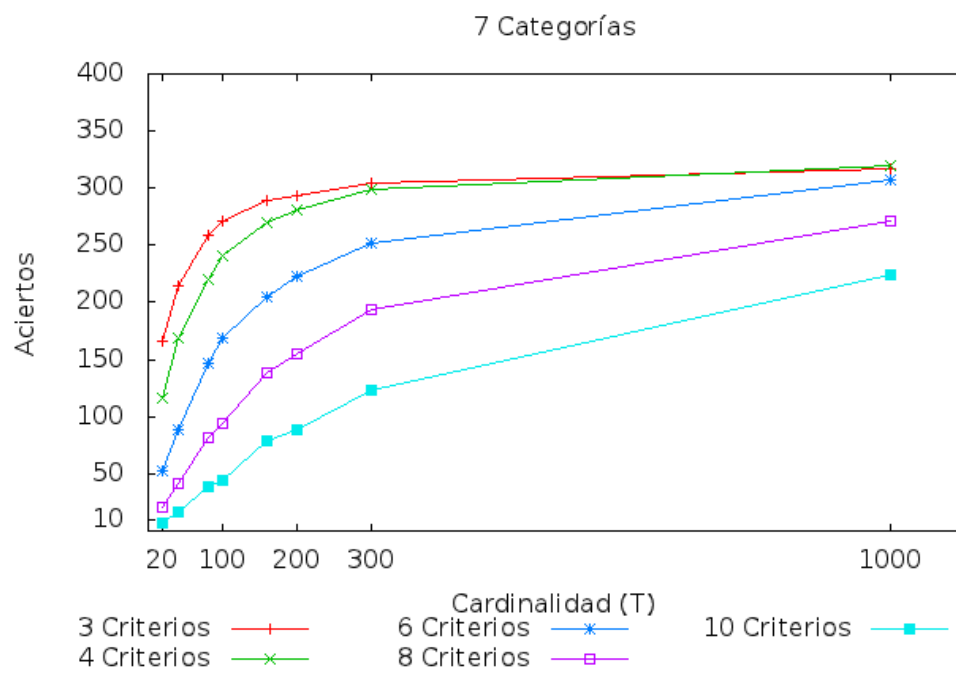
Gráfica 1. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 2 categorías.



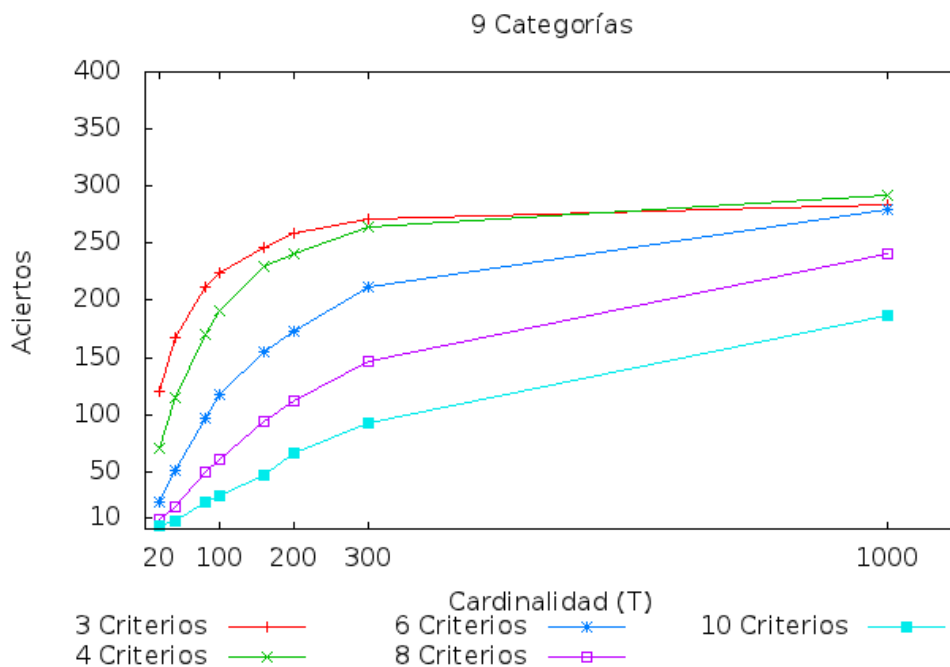
Gráfica 2. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 3 categorías.



Gráfica 3. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 5 categorías.



Gráfica 4. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 7 categorías.

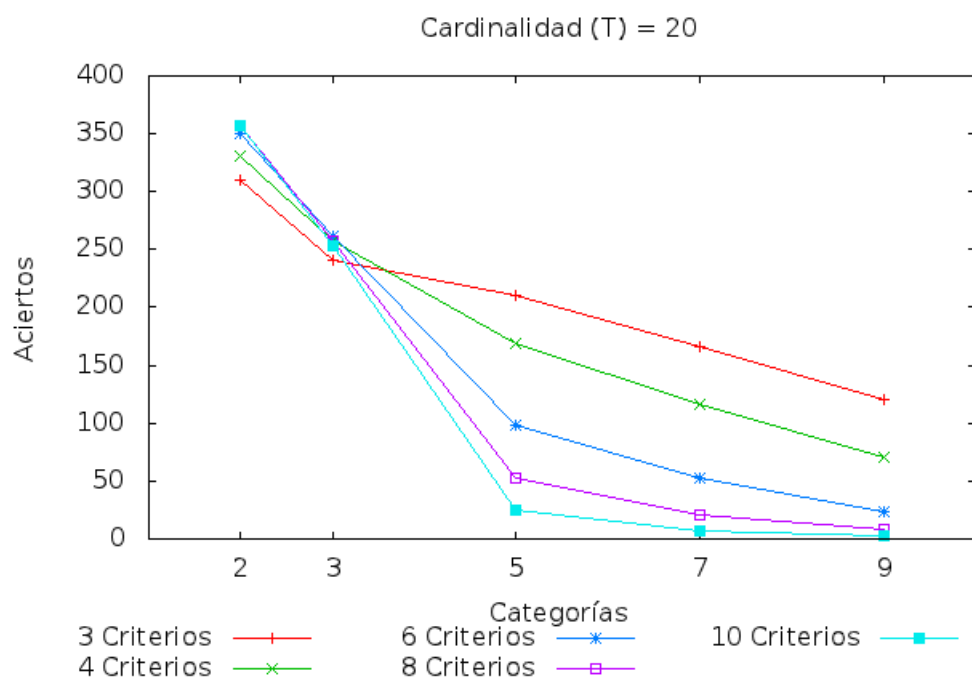


Gráfica 5. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de criterios con 9 categorías.

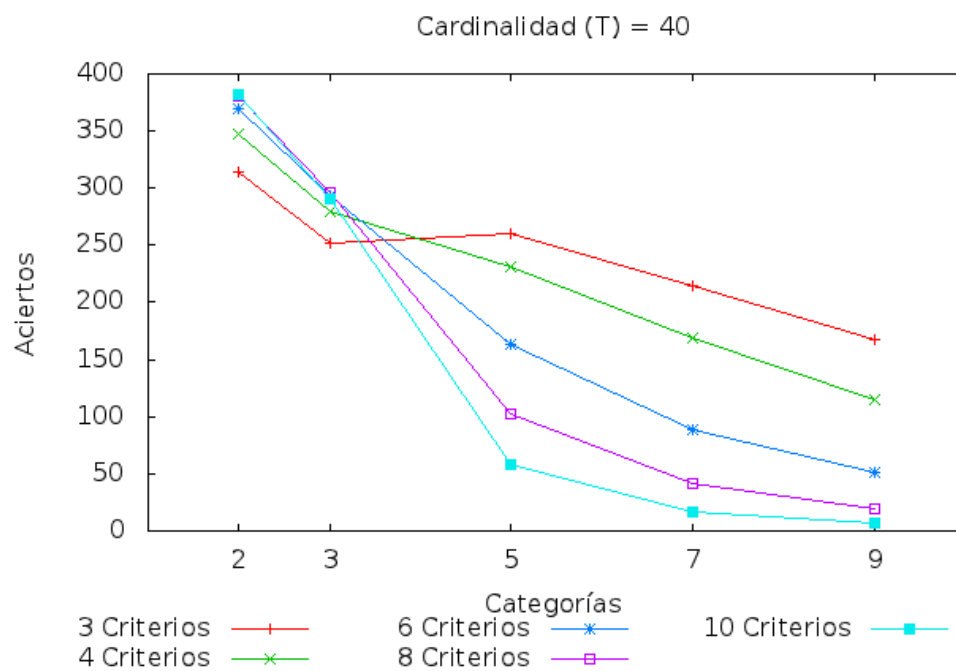
4.2.2 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con el número de criterios como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en las diferentes categorías utilizadas, con el número de criterios como parámetros.

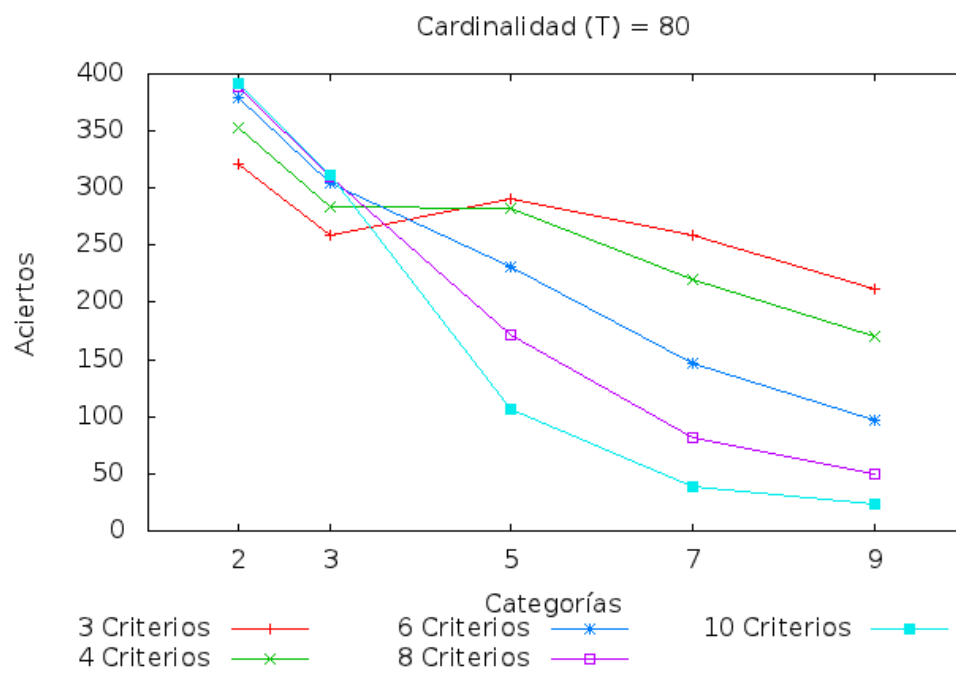
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en las diferentes cardinalidades del conjunto de referencia utilizados durante la experimentación.



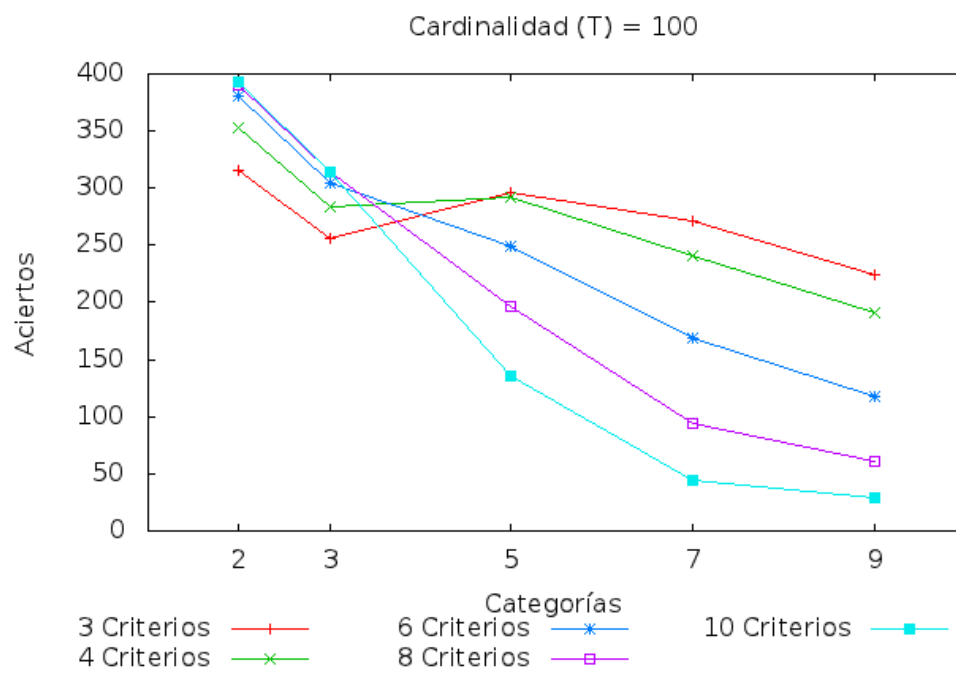
Gráfica 6. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 20.



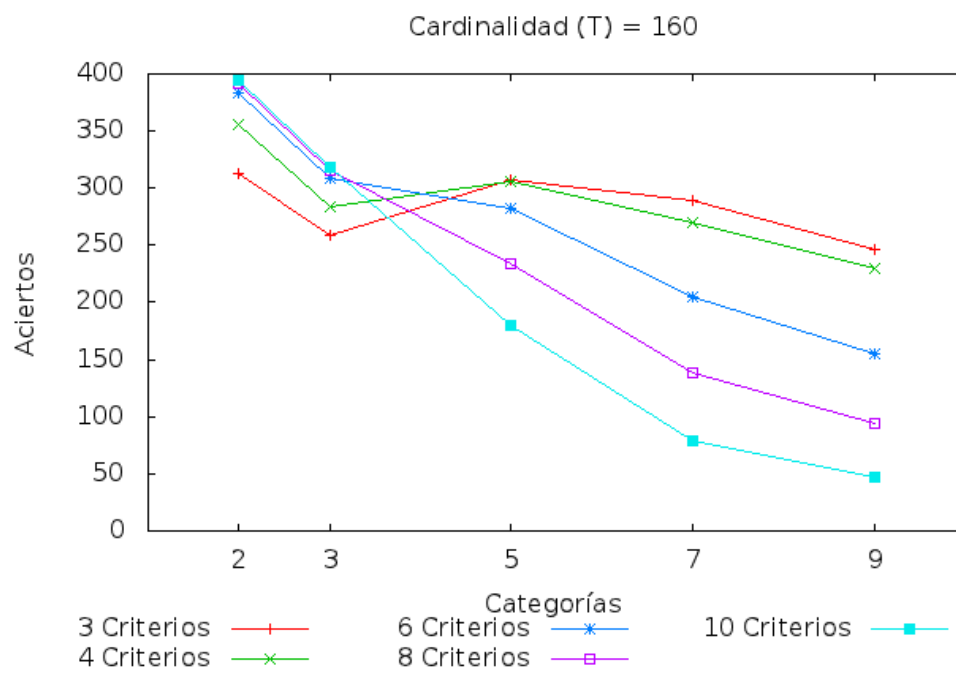
Gráfica 7. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 40.



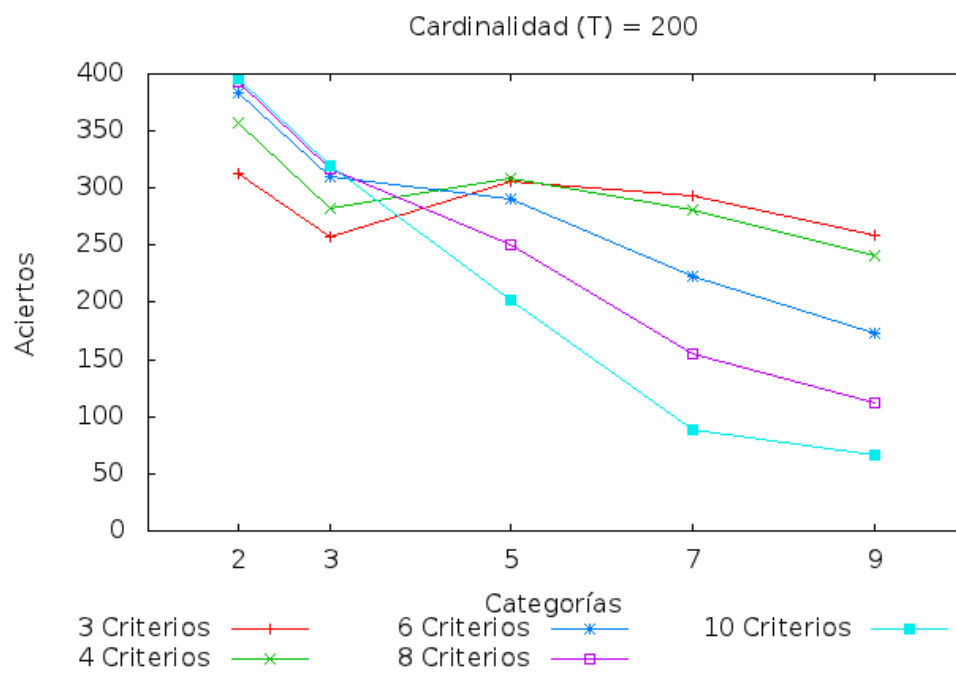
Gráfica 8. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 80.



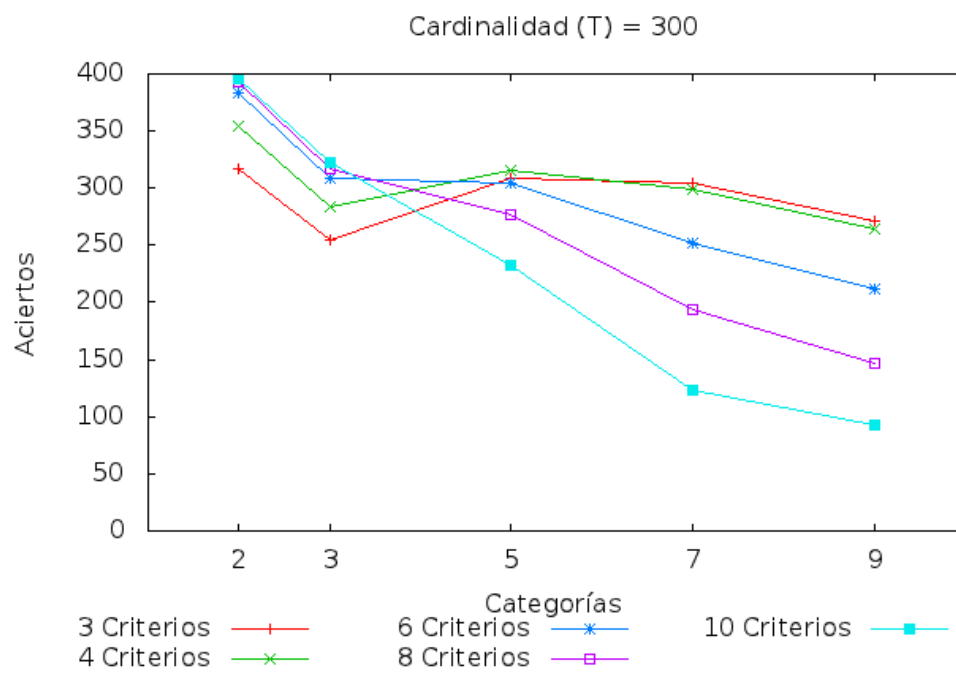
Gráfica 9. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 100.



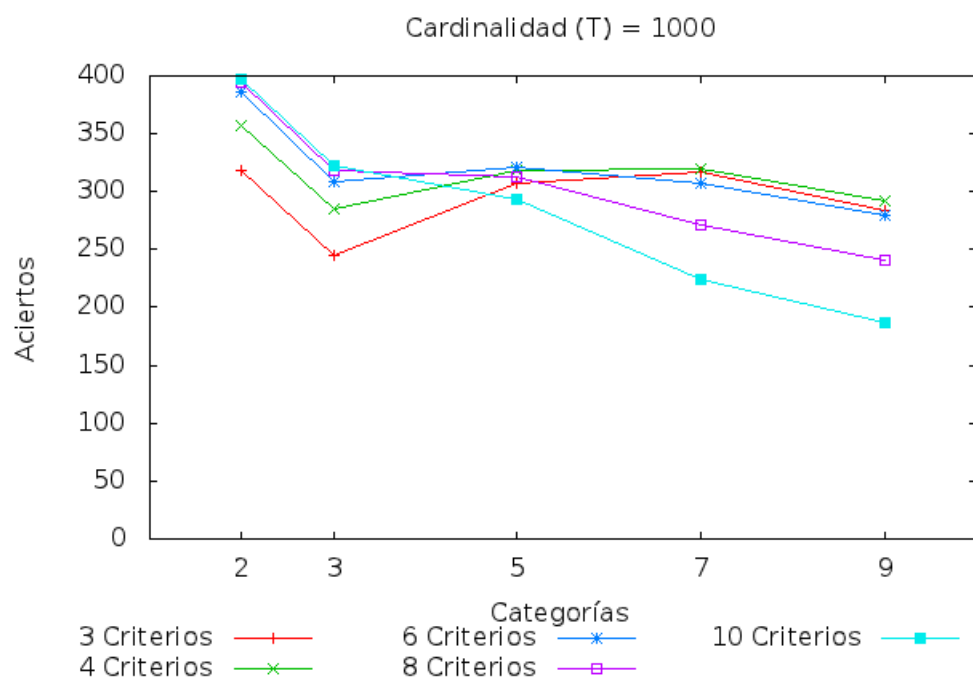
Gráfica 10. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 160.



Gráfica 11. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 200.



Gráfica 12. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 300.

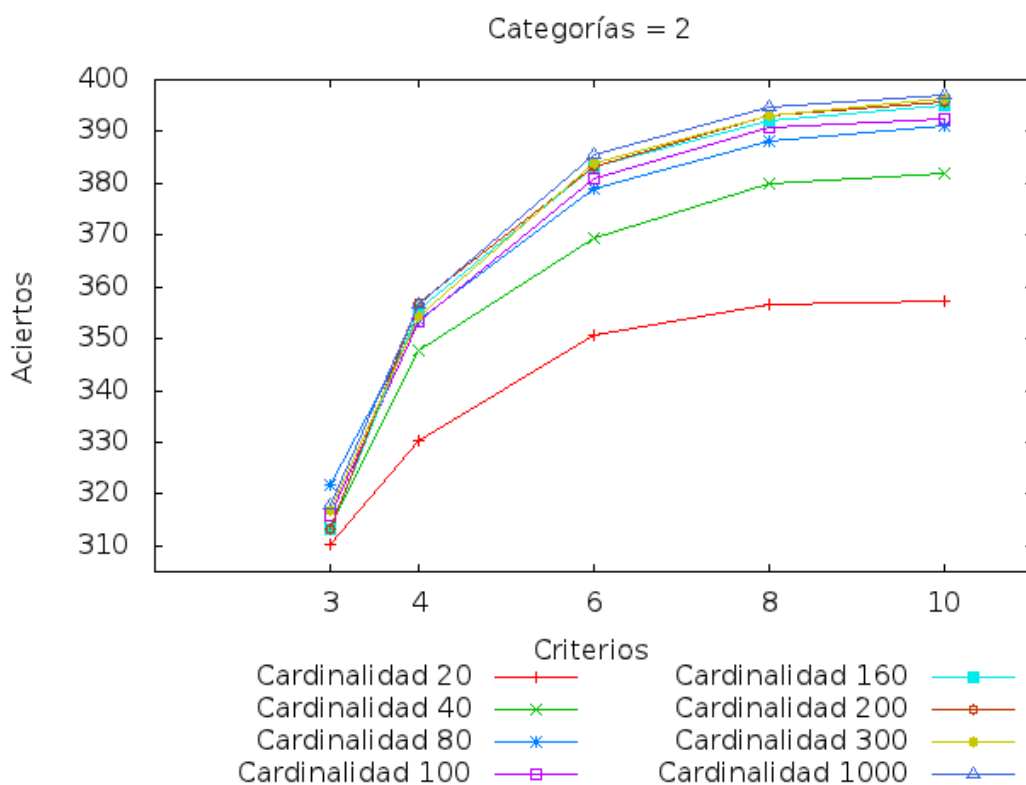


Gráfica 13. Aciertos contra número de categorías a distintos niveles del número de criterios con cardinalidad (T) = 1000.

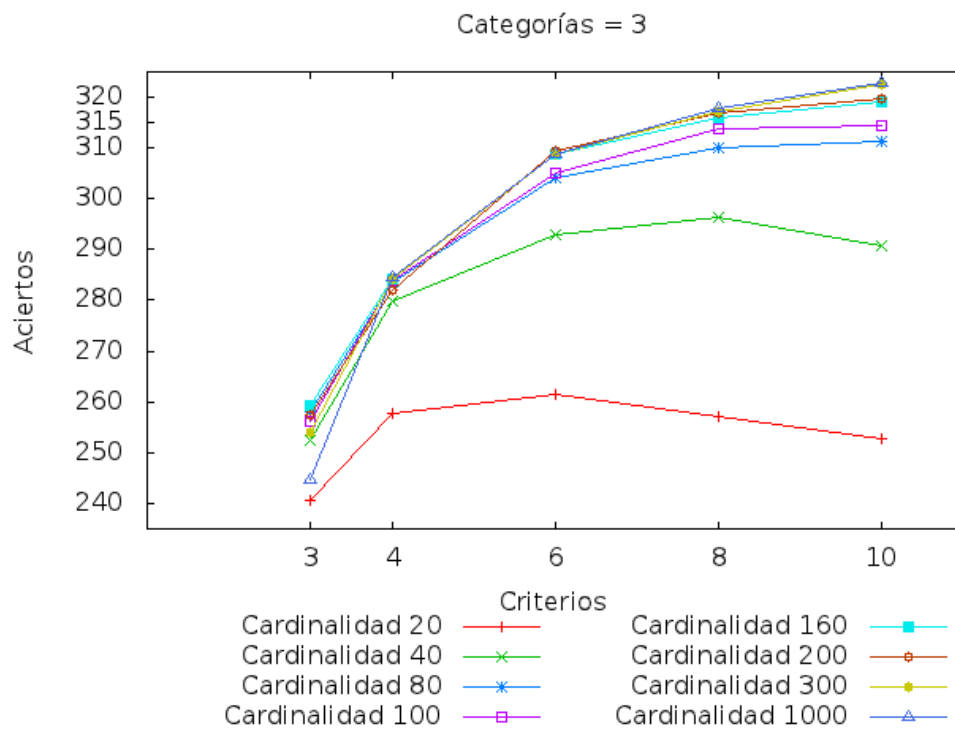
4.2.3 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en los diferentes criterios utilizados, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.

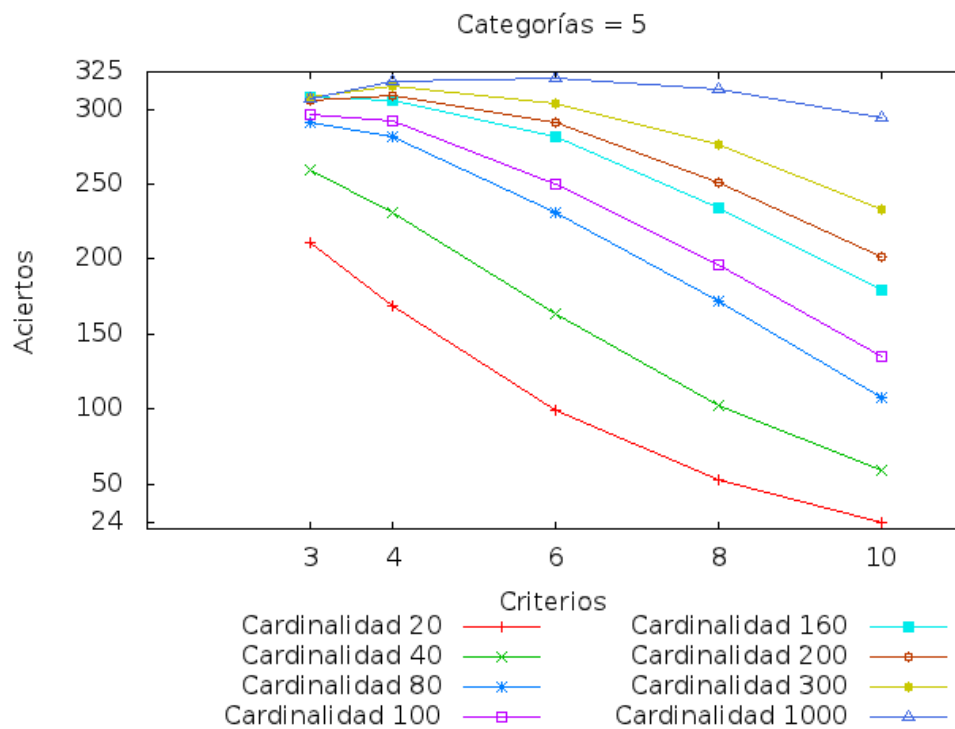
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en las diferentes categorías utilizadas durante la experimentación.



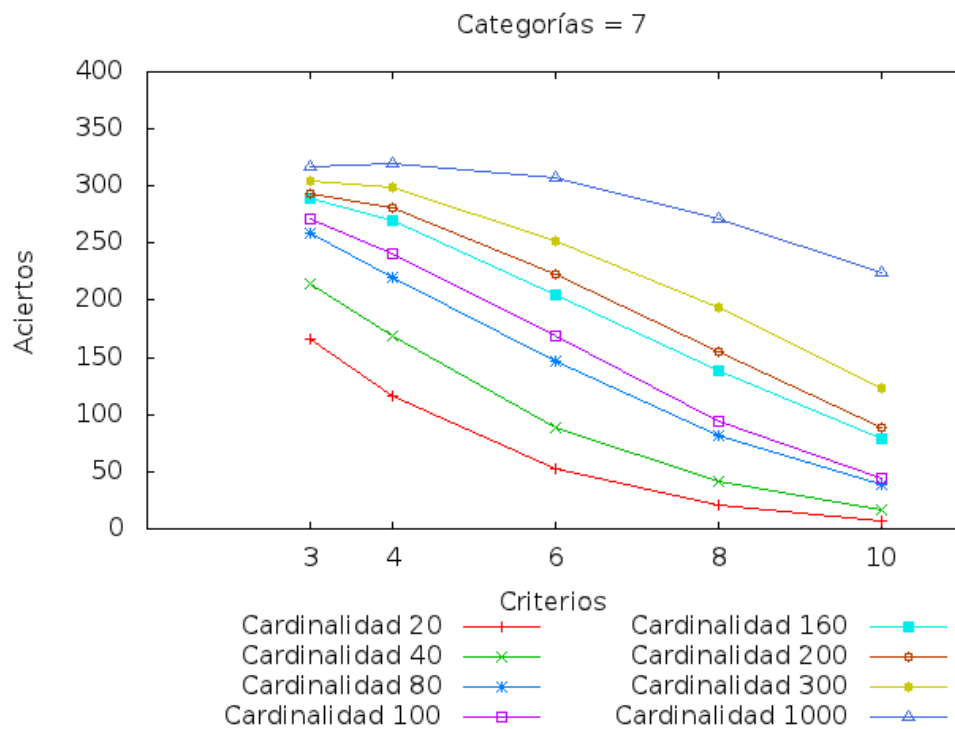
Gráfica 14. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 2 categorías.



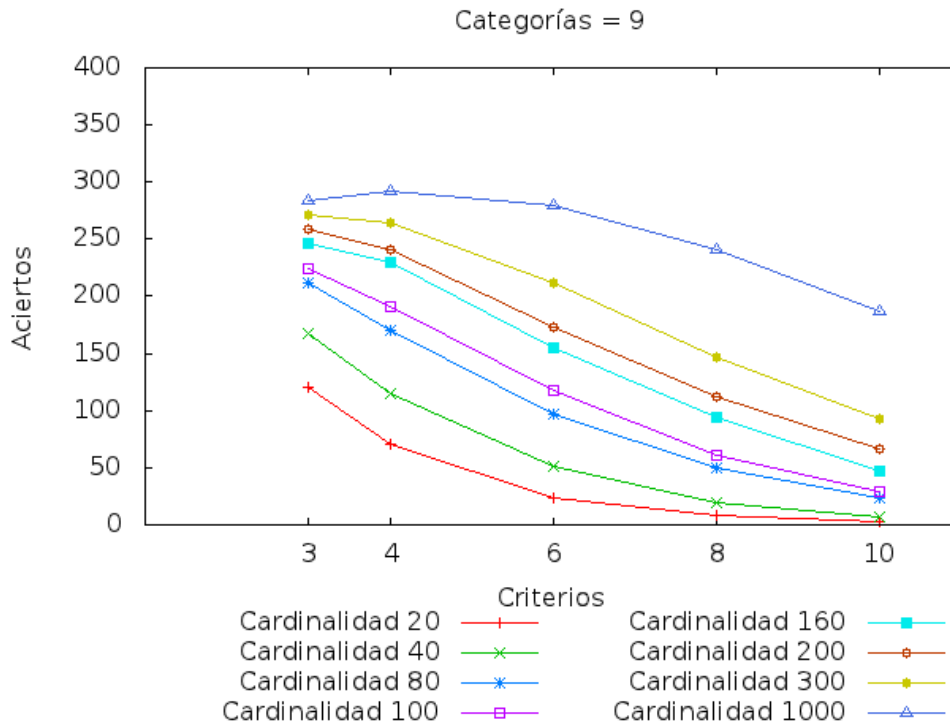
Gráfica 15. Acertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 3 categorías.



Gráfica 16. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 5 categorías.



Gráfica 17. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 7 categorías.

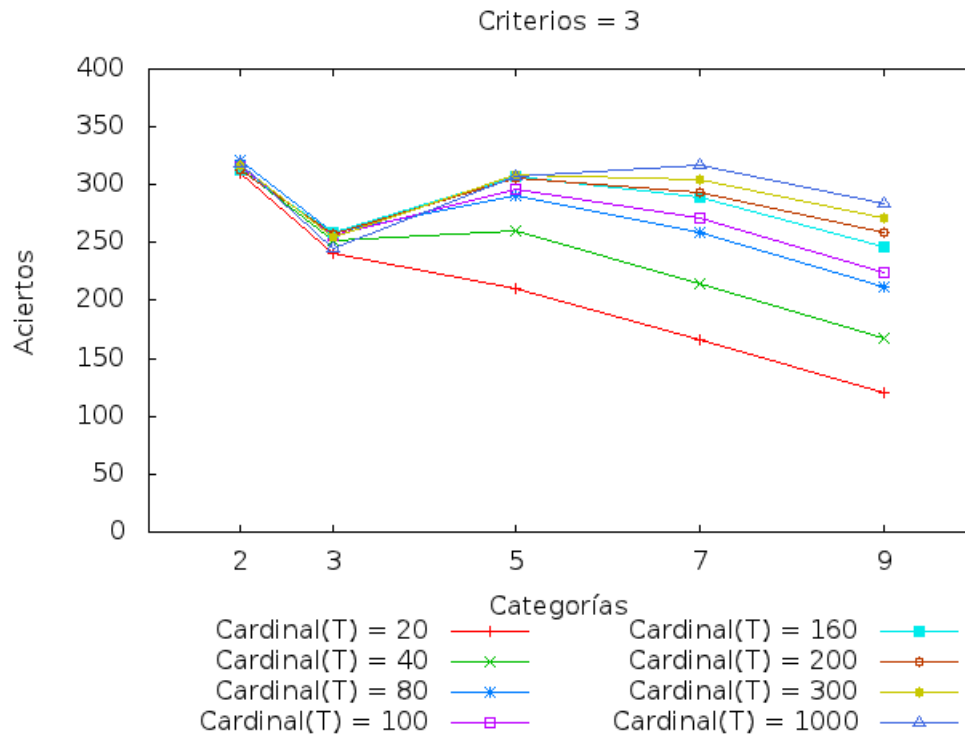


Gráfica 18. Aciertos contra número de criterios en los diferentes niveles de Cardinalidad (T) con 9 categorías.

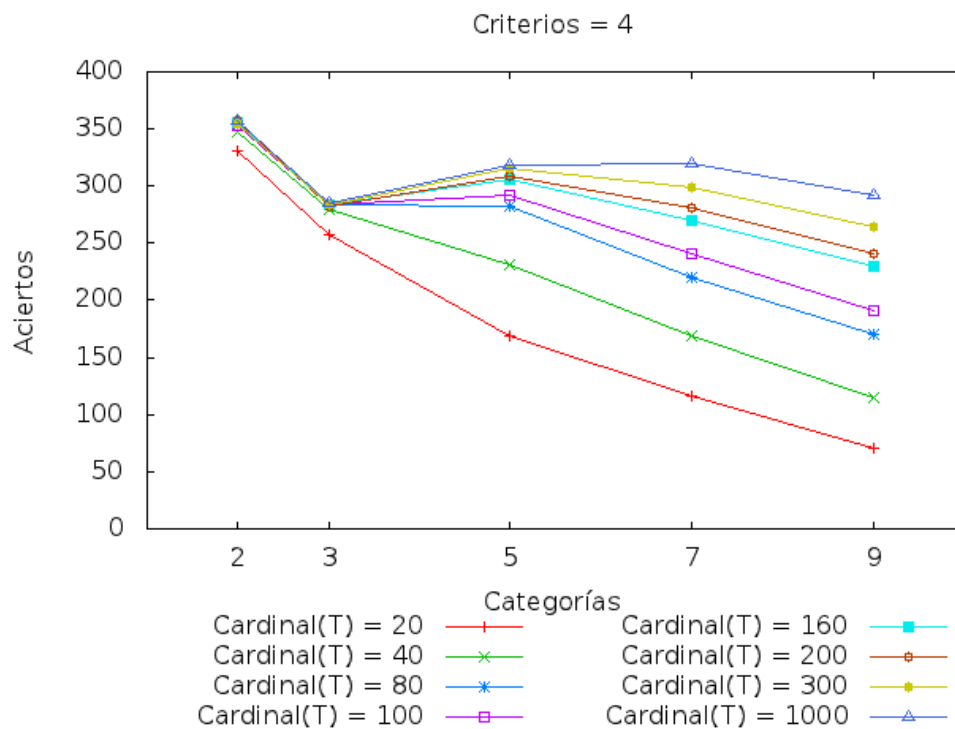
4.2.4 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en las diferentes categorías utilizadas, con los diferentes tamaños del conjunto de referencia como parámetros.

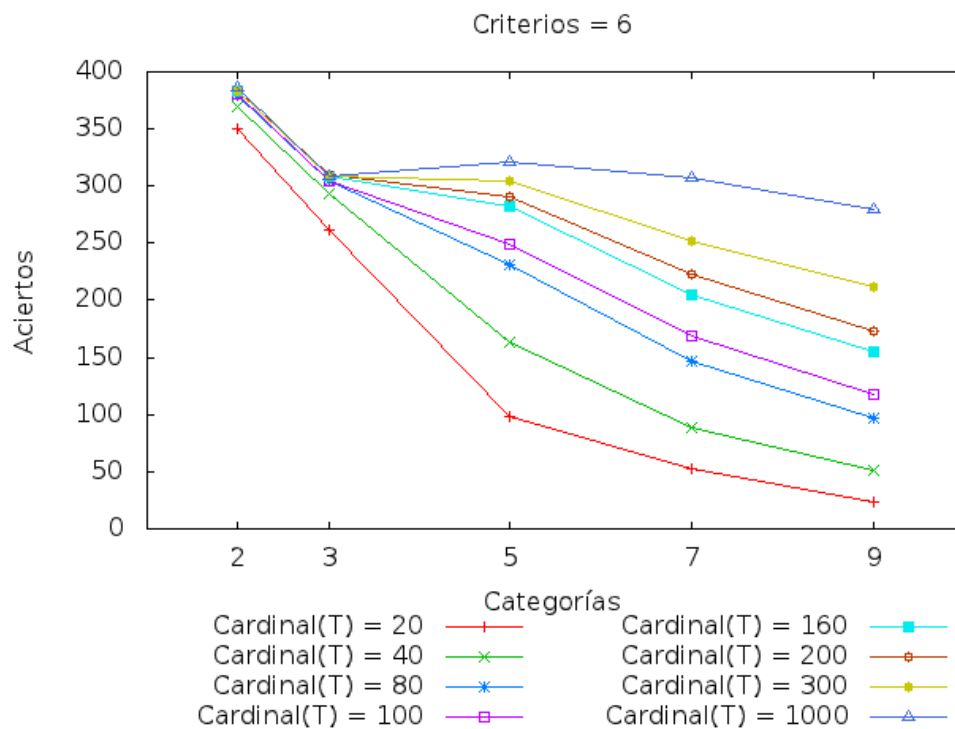
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en los diferentes criterios utilizados durante la experimentación.



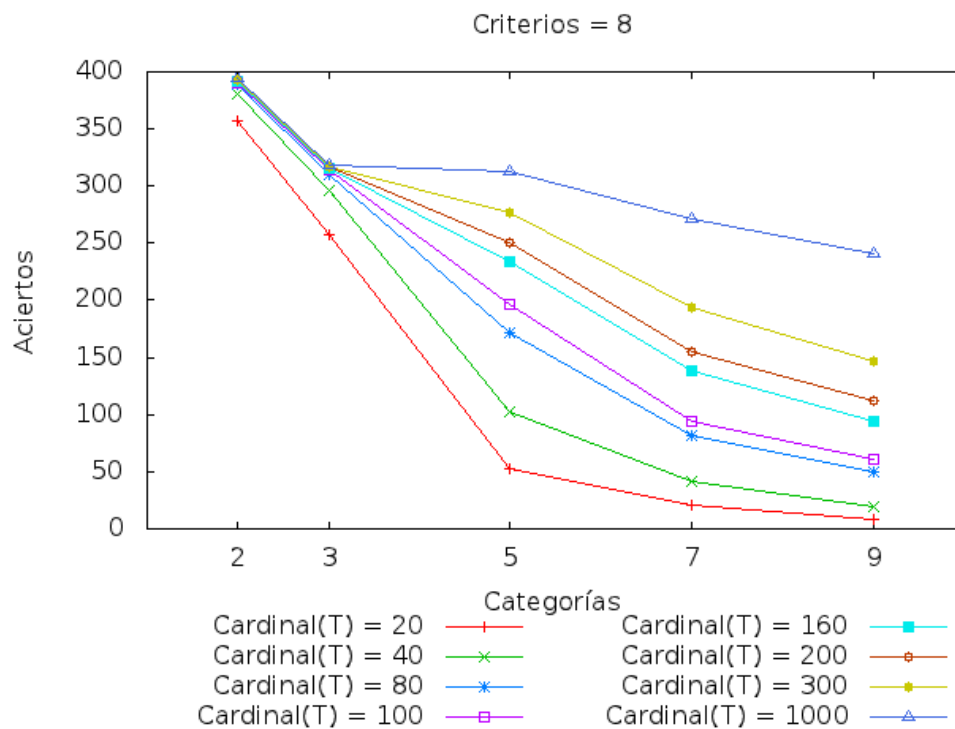
Gráfica 19. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 3 criterios.



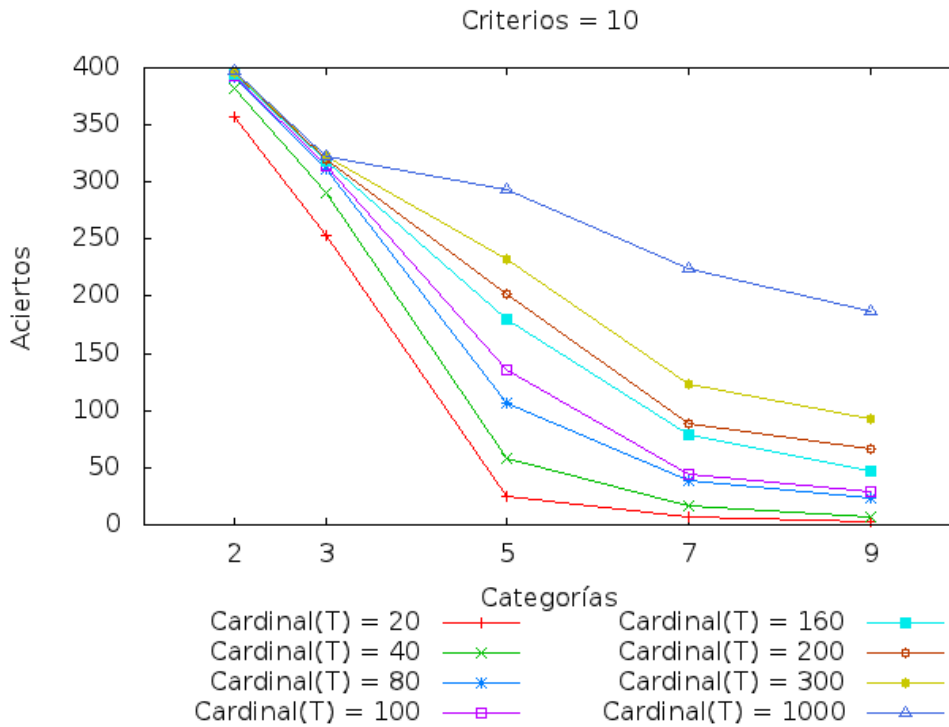
Gráfica 20. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 3 criterios.



Gráfica 21. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 5 criterios.



Gráfica 22. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 8 criterios.

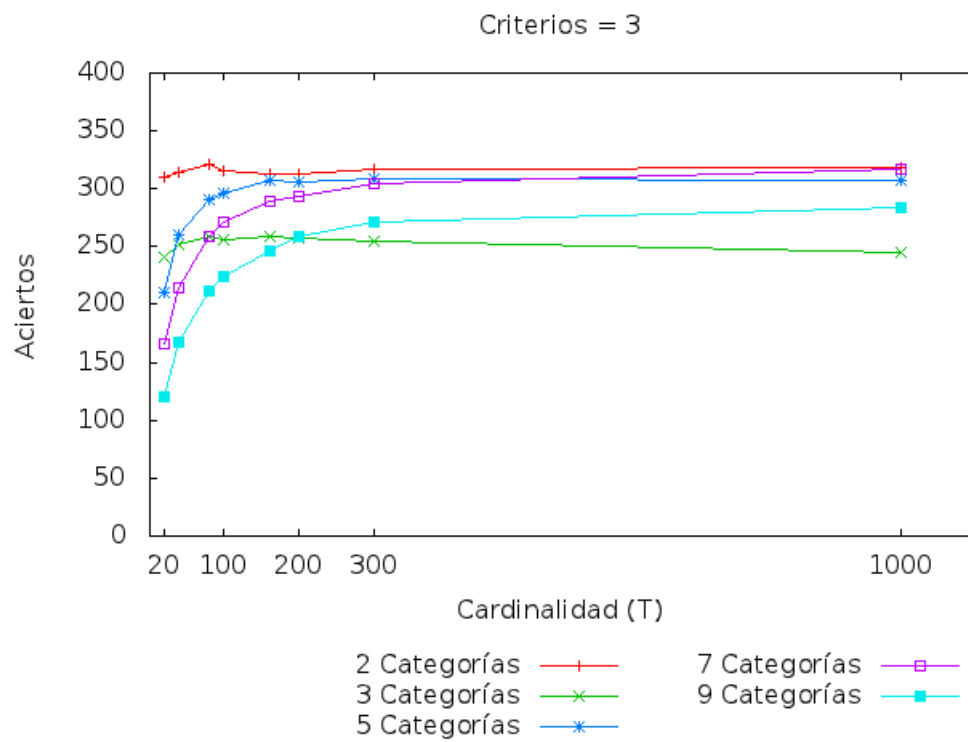


Gráfica 23. Aciertos contra número de categorías con Cardinalidad (T) como parámetros con 10 criterios.

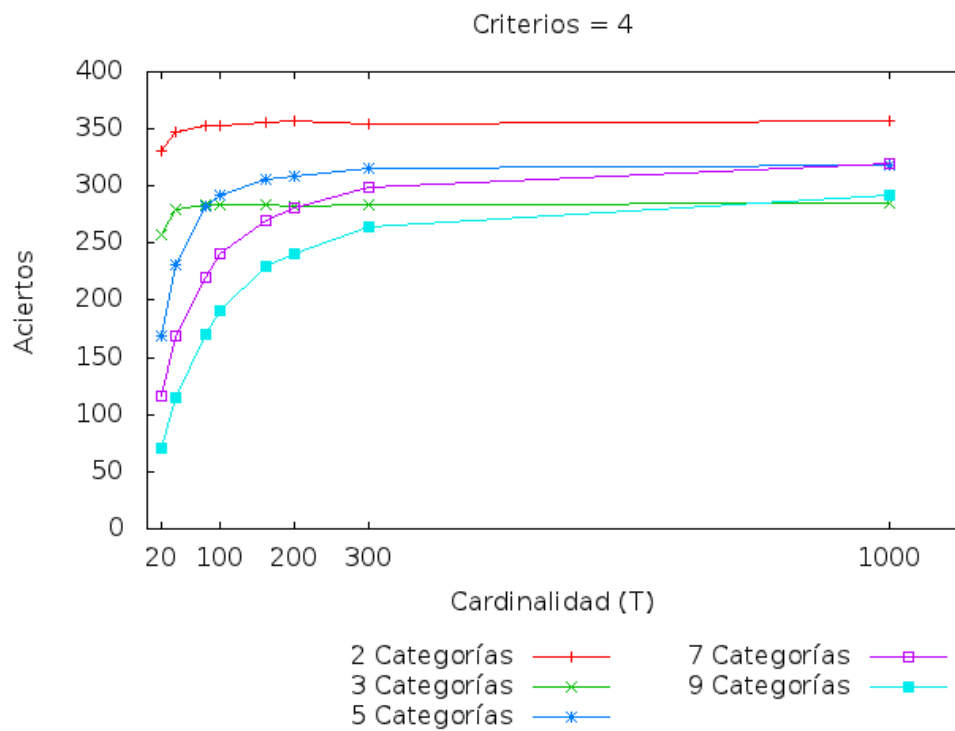
4.2.5 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con número de categorías como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en los diferentes tamaños del conjunto de referencia con el número de categorías como parámetros.

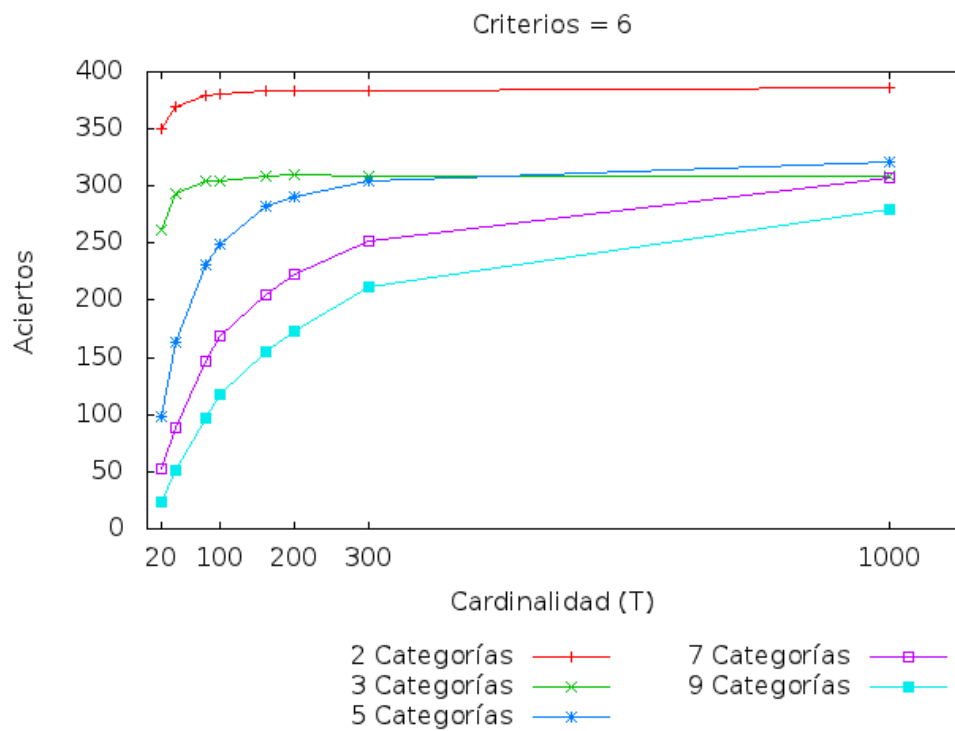
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en las diferentes criterios utilizados durante la experimentación.



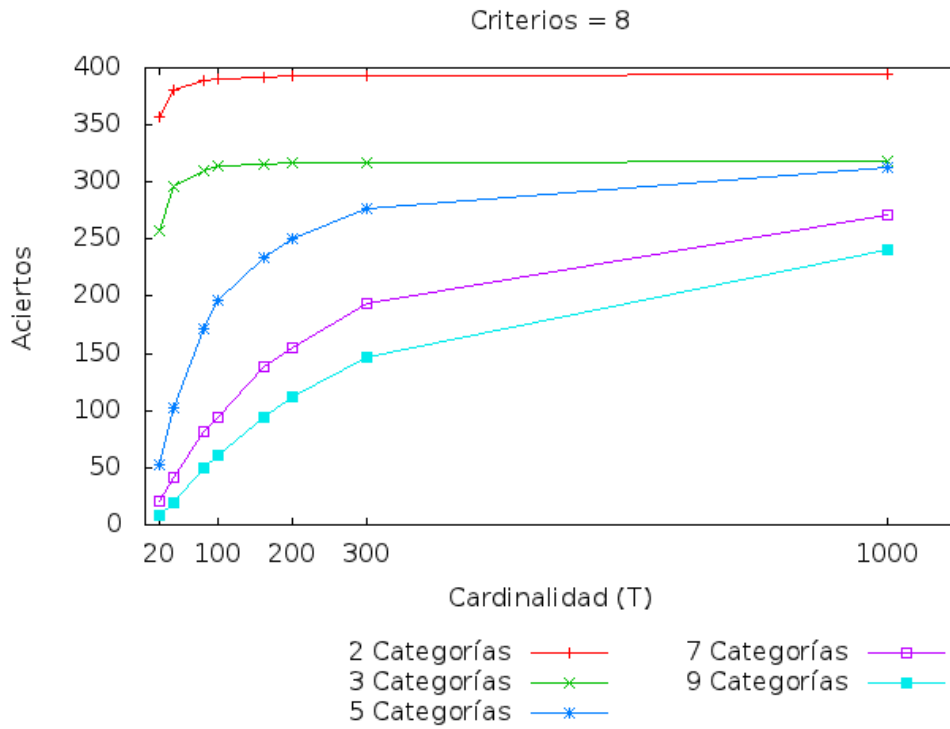
Gráfica 24. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 3 criterios.



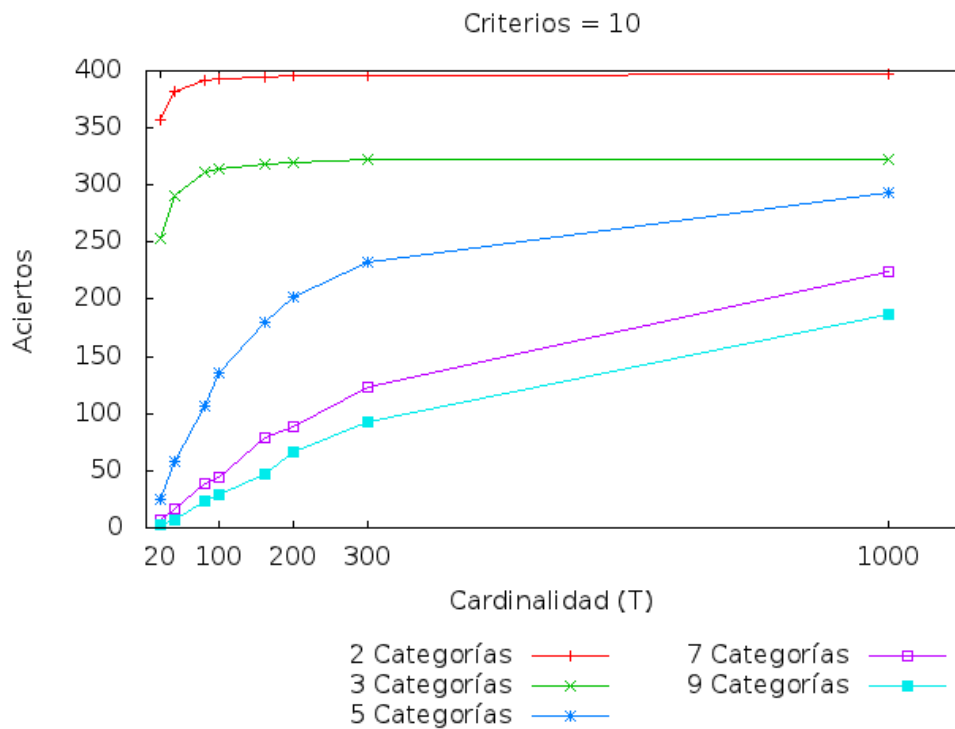
Gráfica 25. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 4 criterios.



Gráfica 26. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 6 criterios.



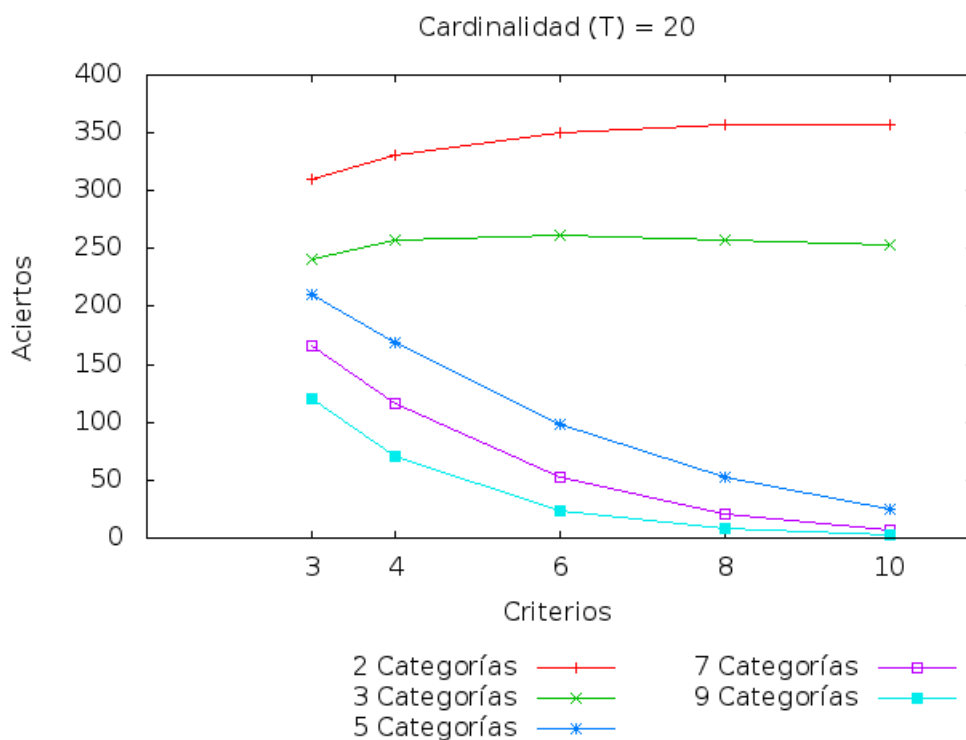
Gráfica 27. Aciertos contra tamaño del núcleo de referencia a distintos niveles del número de categorías con 8 criterios.



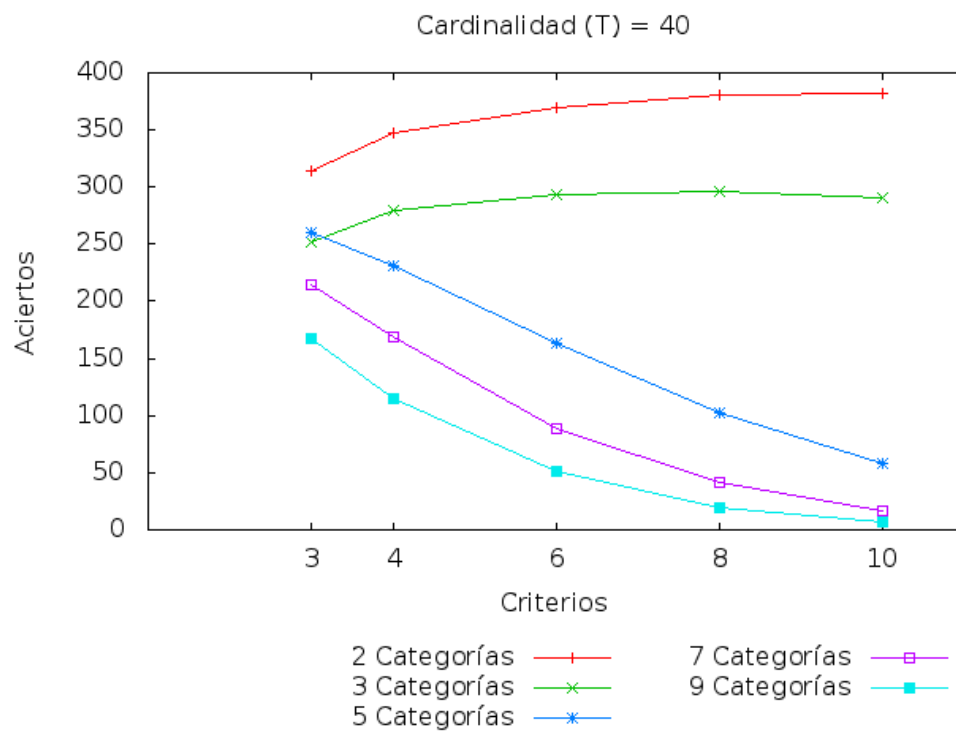
4.2.6 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con el número de categorías como parámetros.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de THESEUS en las diferentes número de criterios utilizados, con el número de categorías como parámetros.

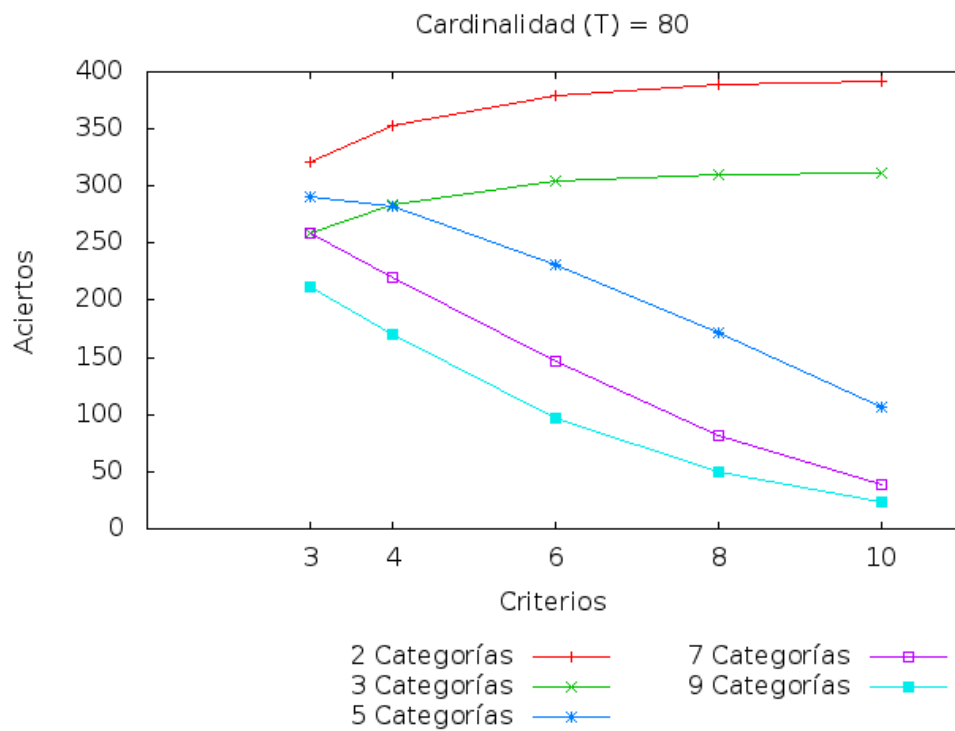
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en las diferentes cardinalidades del conjunto de referencia utilizados durante la experimentación.



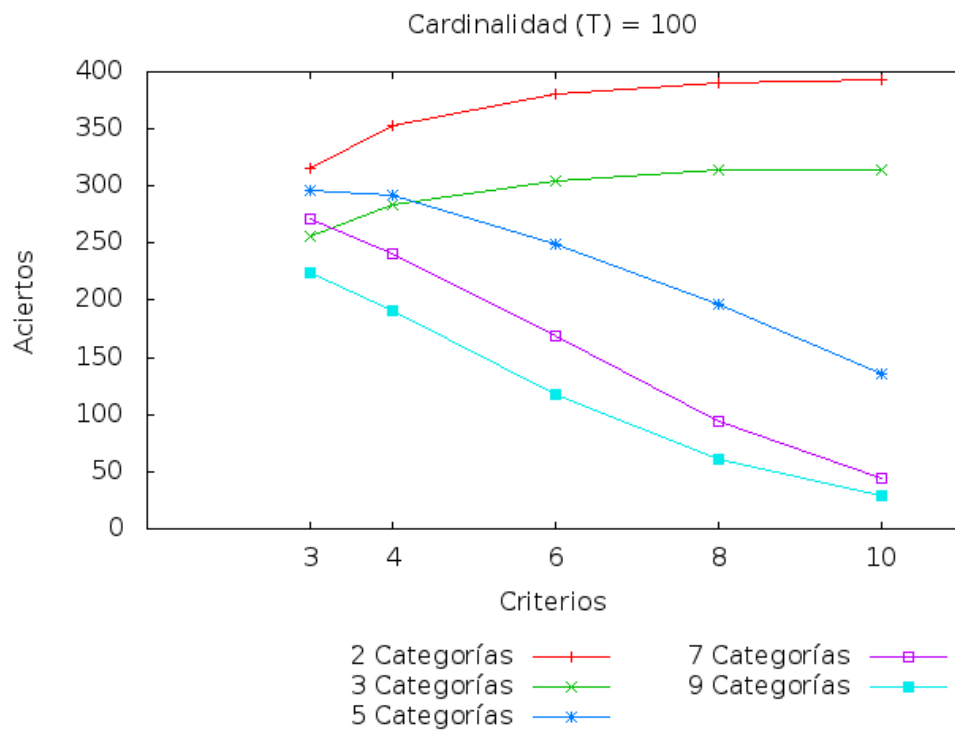
Gráfica 29. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 20.



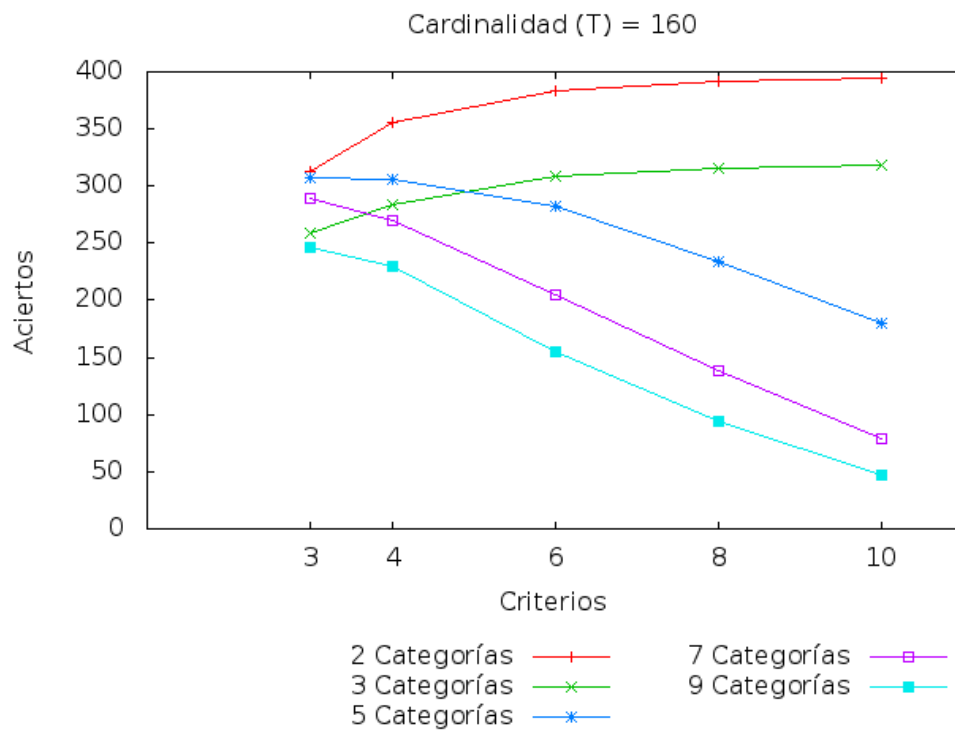
Gráfica 30. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 40.



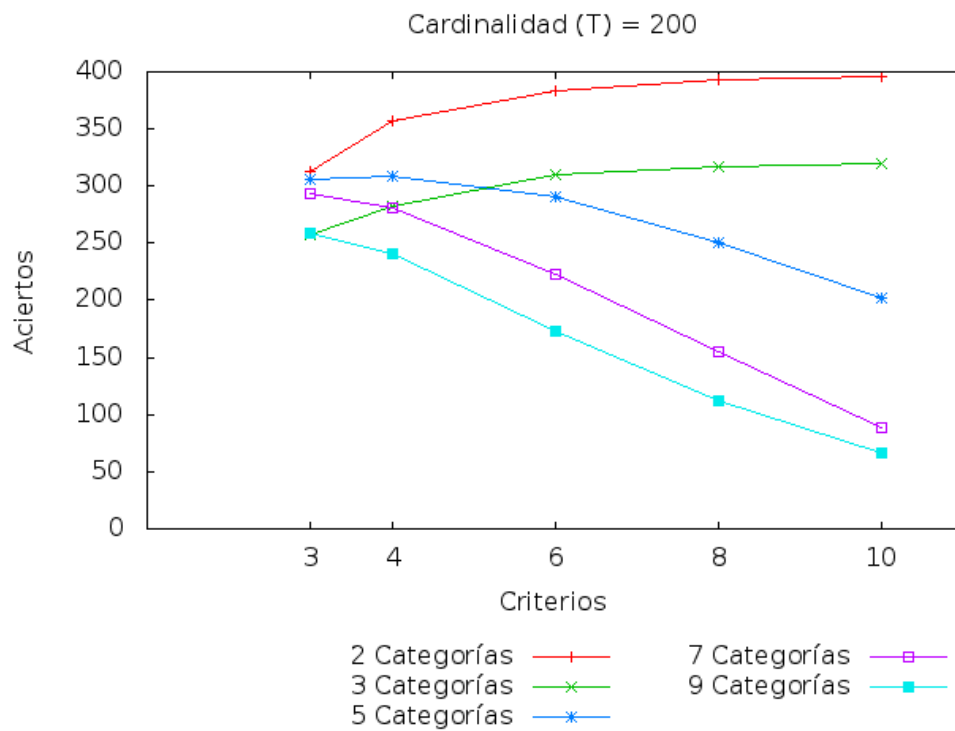
Gráfica 31. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 80.



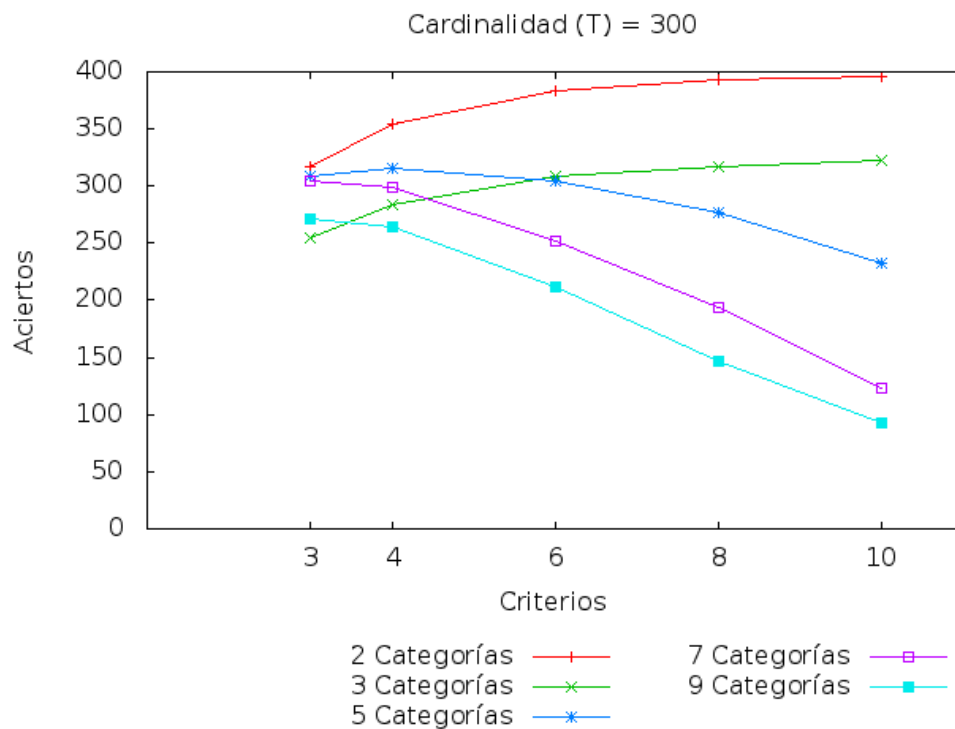
Gráfica 32. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 100.



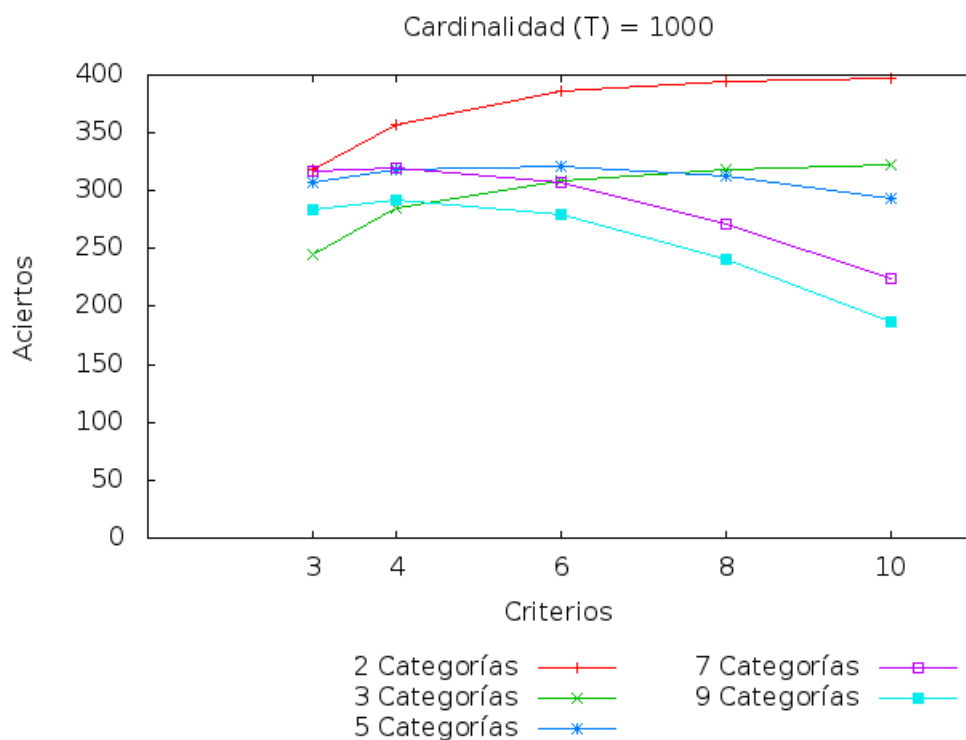
Gráfica 33. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 160.



Gráfica 34. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 200.



Gráfica 35. Aciertos contra número de criterios a distintos niveles del número de categorías con cardinalidad (T) = 300.

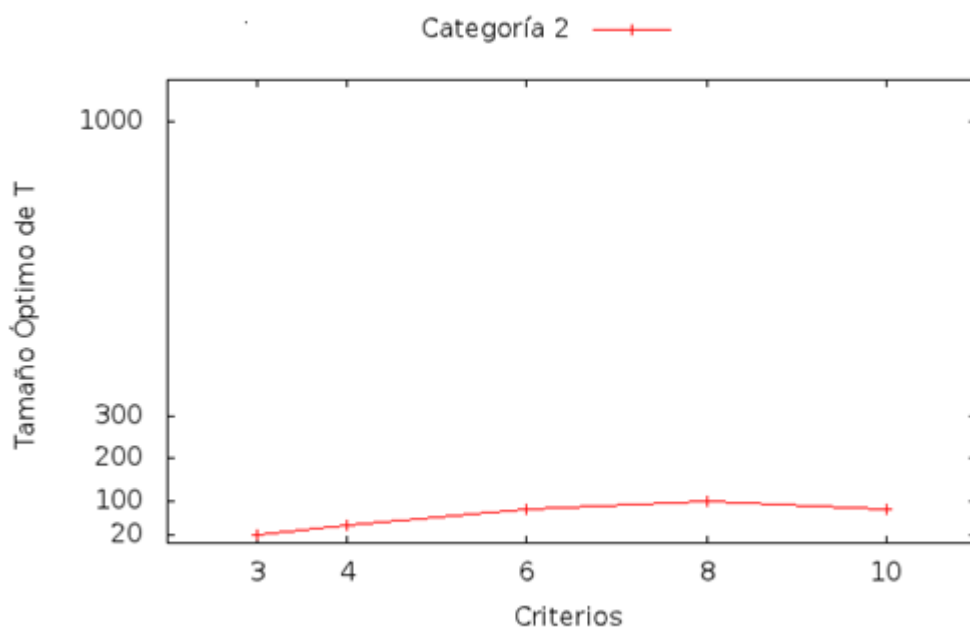


4.3 Análisis de optimidad para obtener la cardinalidad del conjunto de referencia.

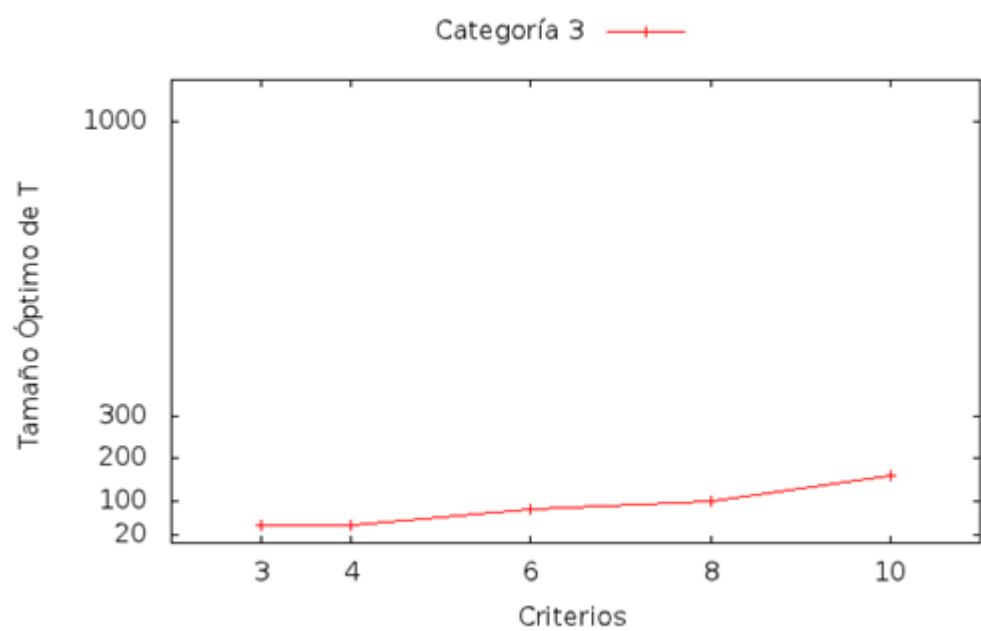
4.3.1 Familia de gráficas por categorías para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.

En esta familia de gráficas, podemos observar cuando dada una categoría ya no es necesario aumentar el tamaño del conjunto de referencia, por no ser estadísticamente significativo, en función del número de criterios.

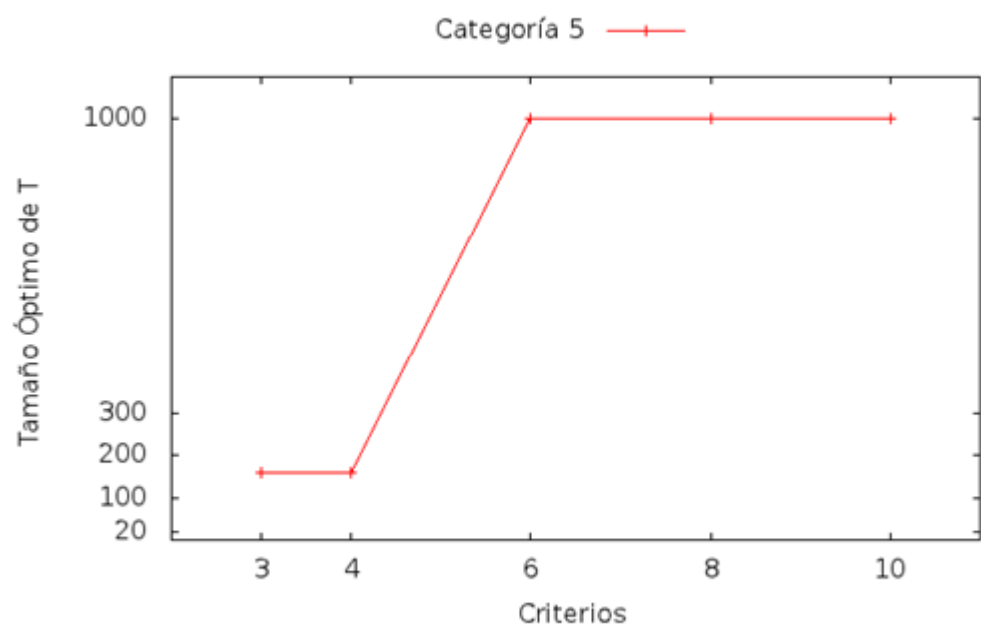
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en los distintos niveles del número de categorías utilizadas durante la experimentación.



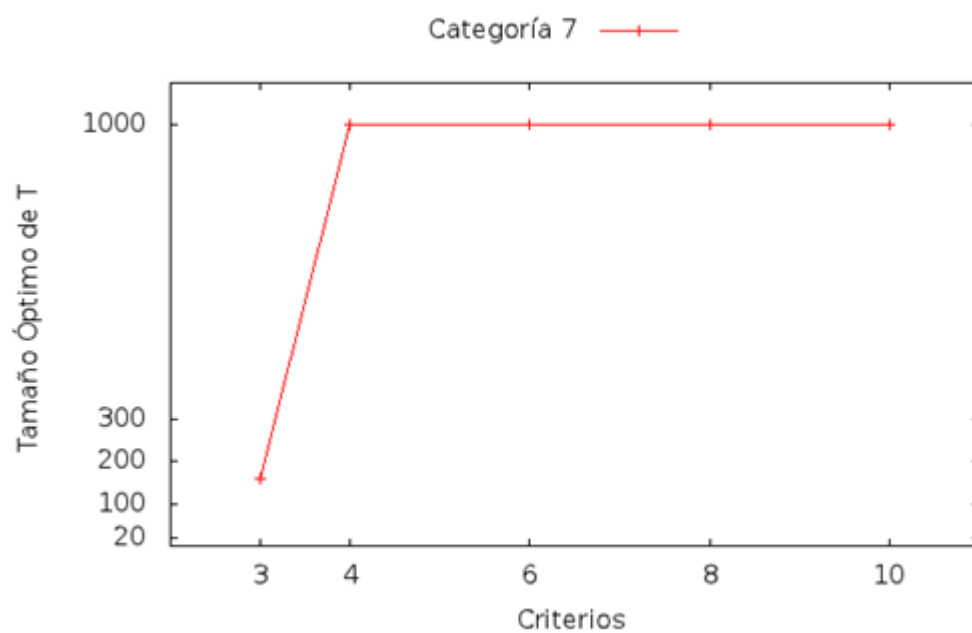
Gráfica 37. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 2 categorías.



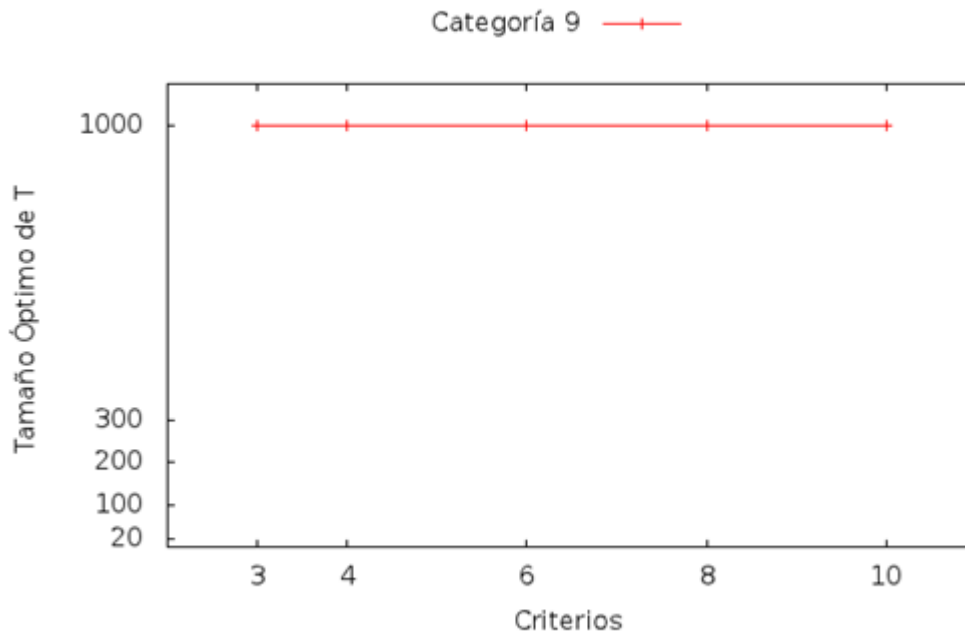
Gráfica 38. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 3 categorías.



Gráfica 39. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 5 categorías.



Gráfica 40. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 7 categorías.

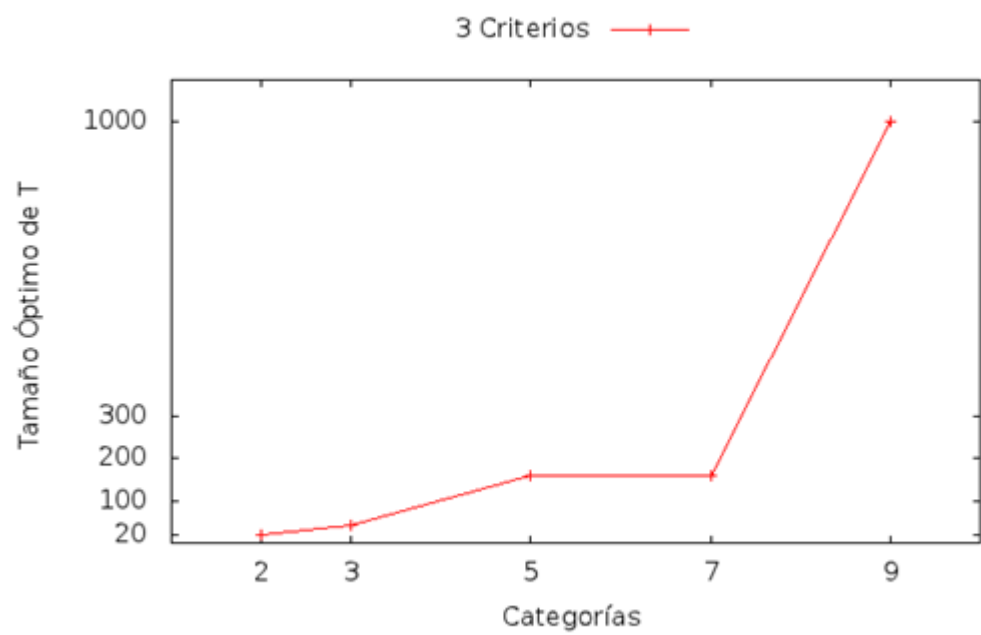


Gráfica 41. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 9 categorías.

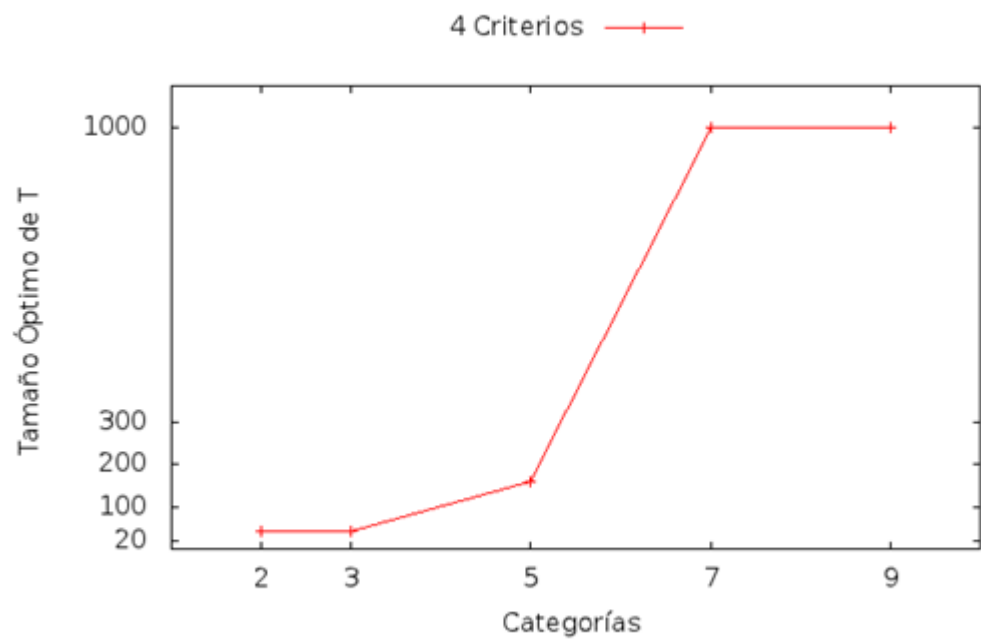
4.3.2 Familia de gráficas por criterios para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.

En esta familia de gráficas, podemos observar cuando dado un número de criterios ya no es necesario aumentar el tamaño del conjunto de referencia, por no ser estadísticamente significativo, en función del número de categorías.

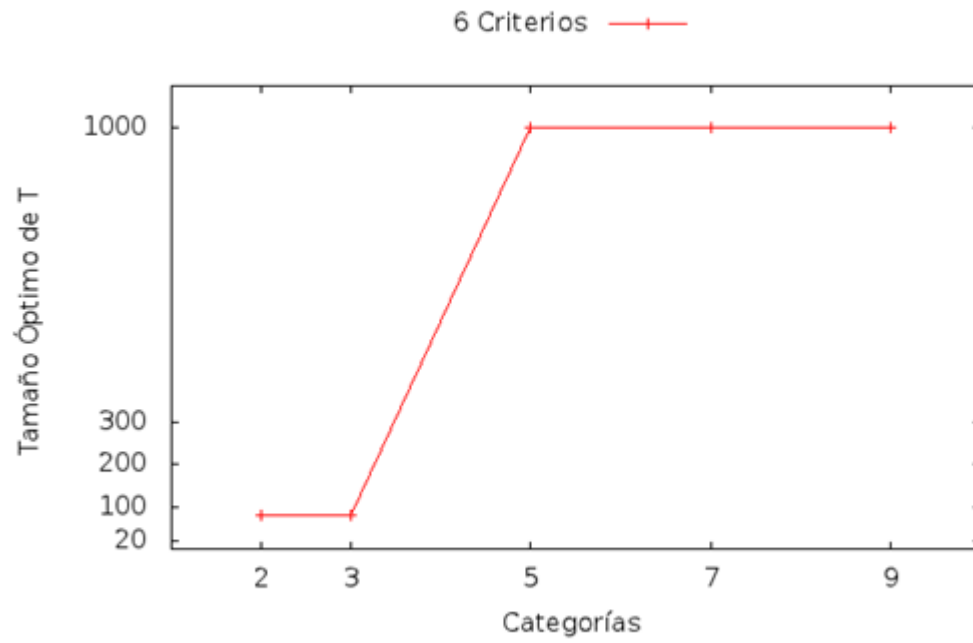
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas y en los distintos niveles de número de criterios utilizados durante la experimentación.



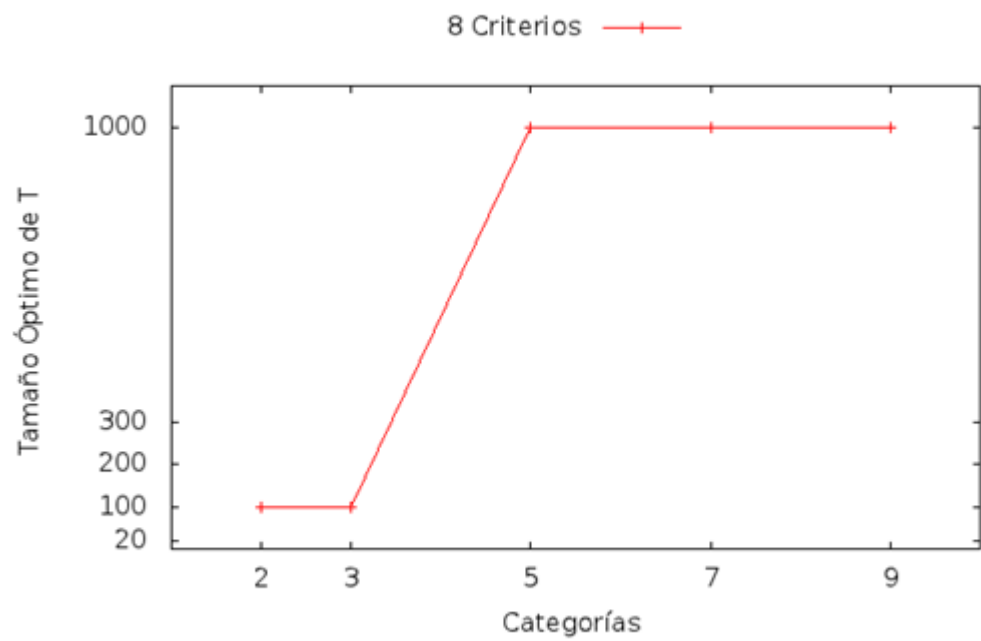
Gráfica 42. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 3 criterios.



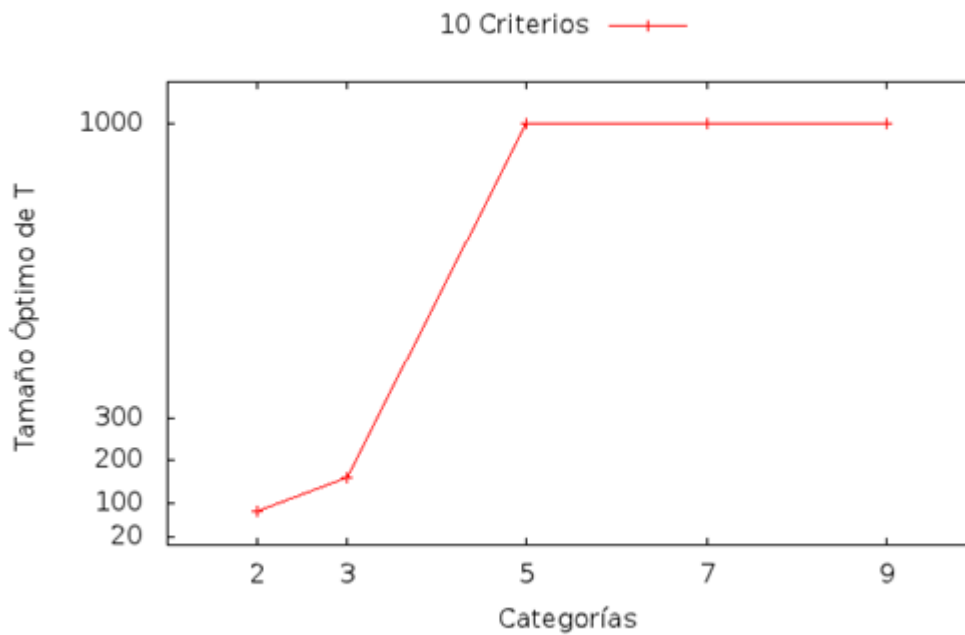
Gráfica 43. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 4 criterios.



Gráfica 44. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 6 criterios.



Gráfica 45. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 8 criterios.



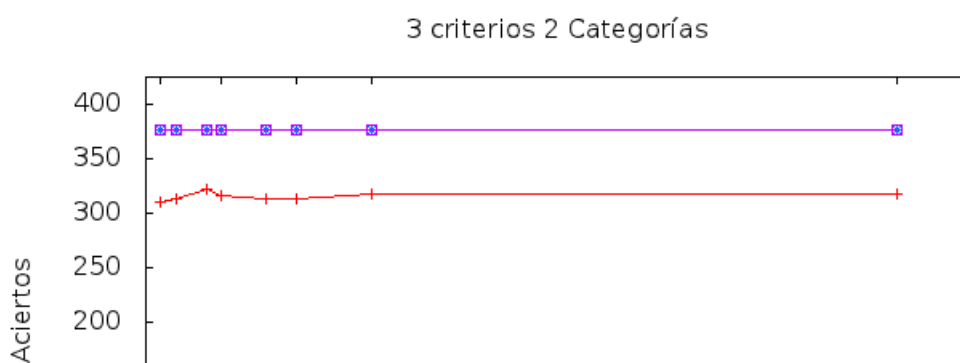
Gráfica 46. Tamaño óptimo del conjunto de referencia con 10 criterios.

4.4 Contrastación de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI y ELECTRE-TRI-C.

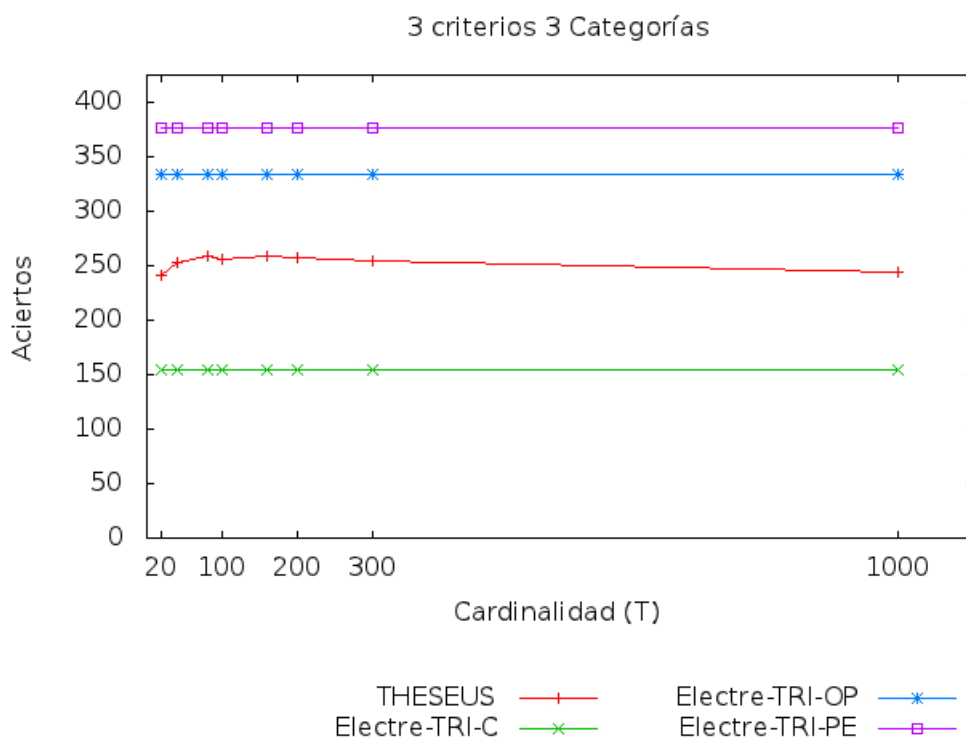
4.4.1 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con tres criterios.

En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista y ELECTRE-TRI-C utilizando tres criterios y variando el número de categorías en función de la cardinalidad del conjunto de referencia.

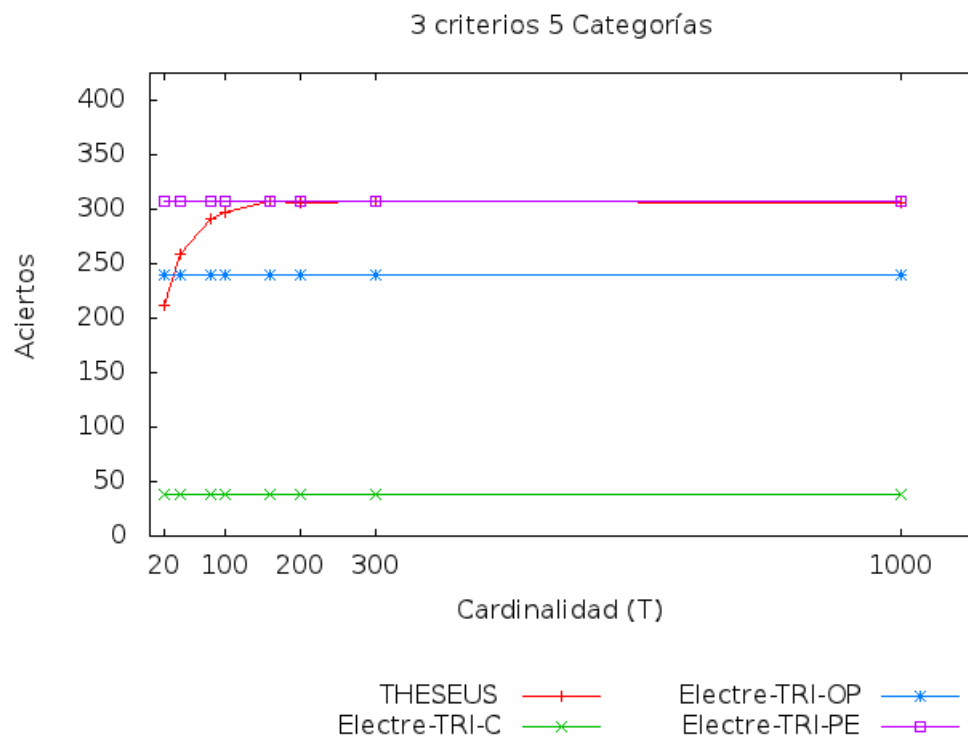
A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas:



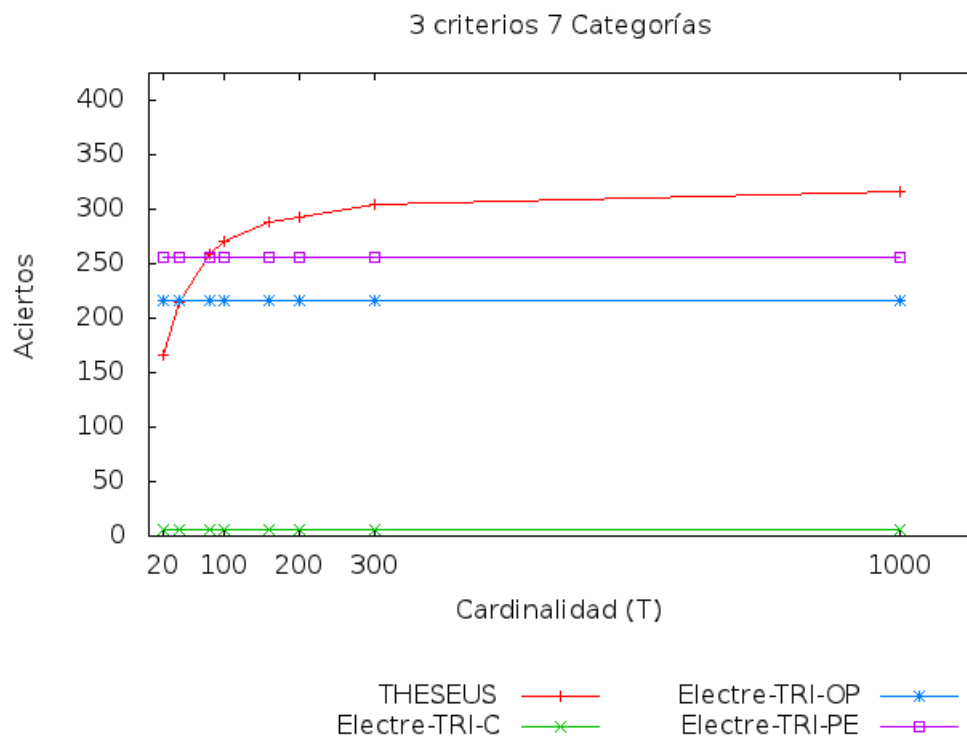
En esta gráfica en particular observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad.



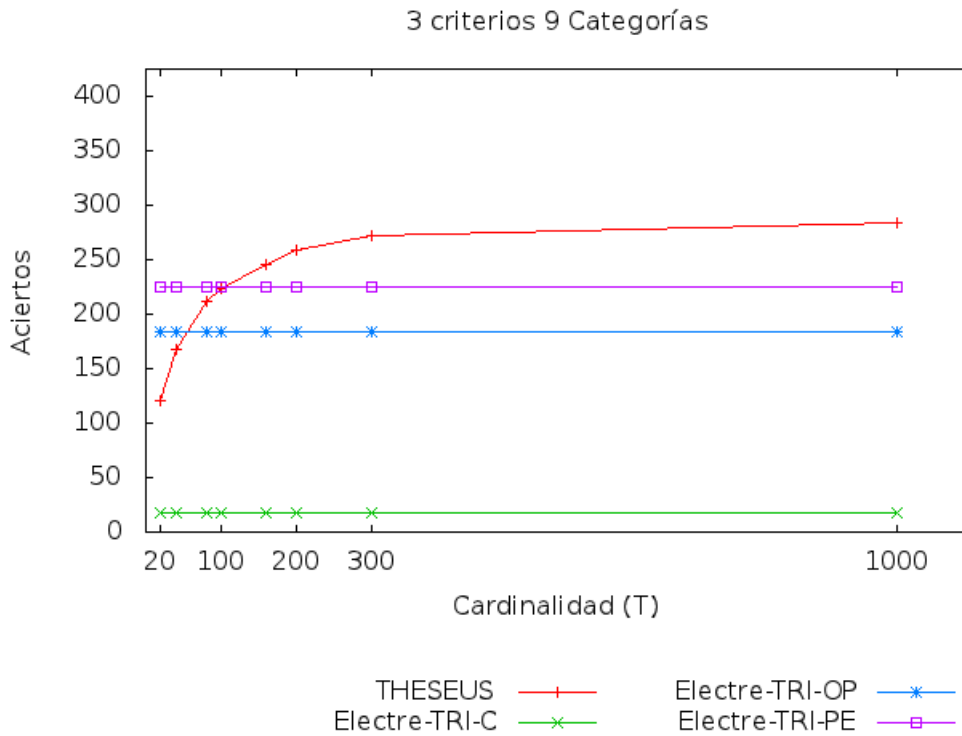
Gráfica 48. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 3 categorías.



Gráfica 49. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 5 categorías.



Gráfica 50. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 7 categorías.

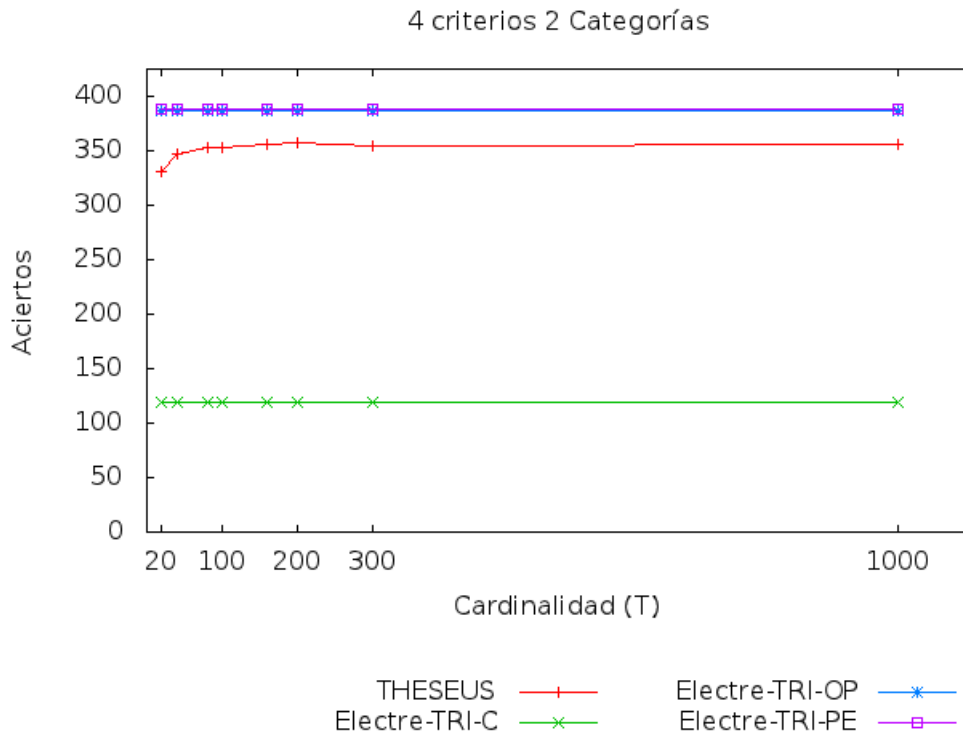


Gráfica 51. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 3 criterios y 7 categorías.

4.4.2 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con cuatro criterios.

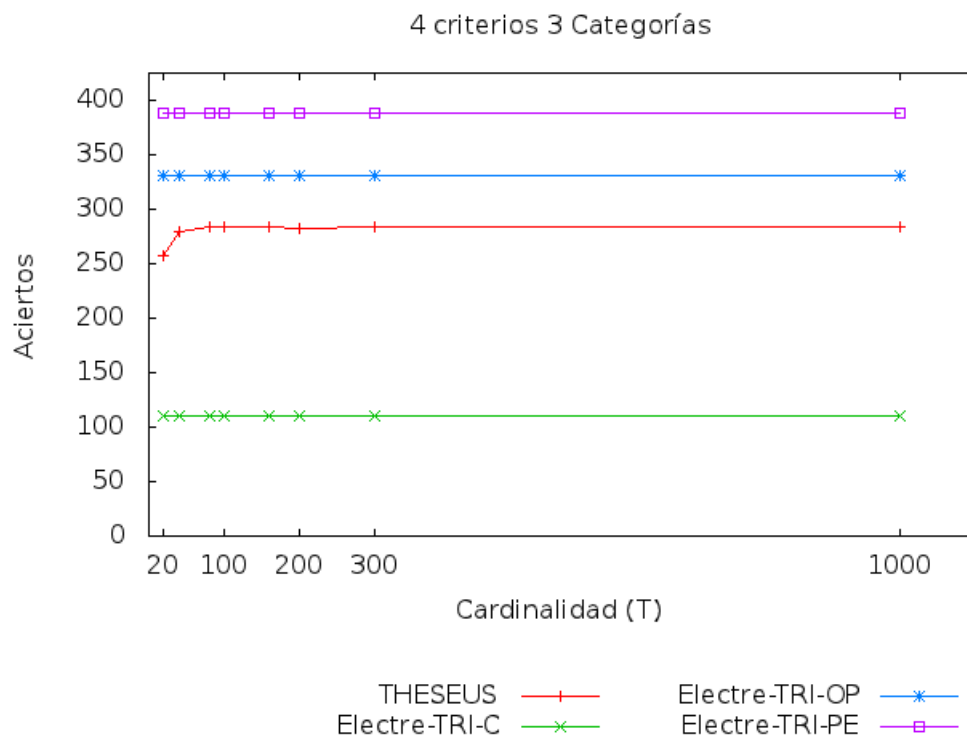
En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista y ELECTRE-TRI-C utilizando cuatro criterios y variando el número de categorías en función de la cardinalidad del conjunto de referencia.

A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas:

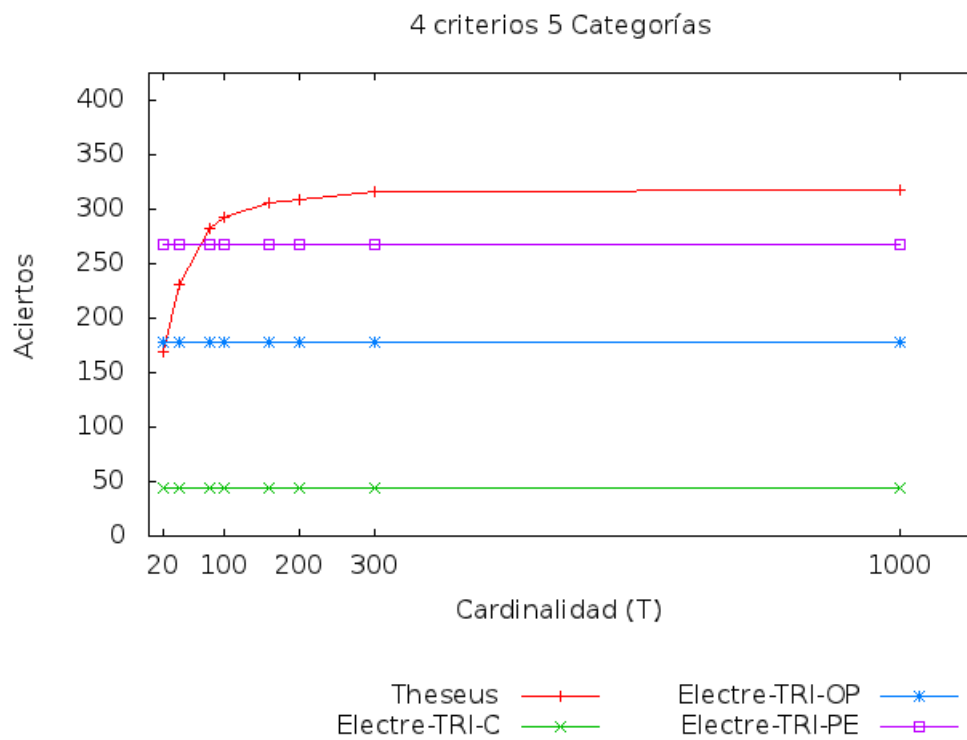


Gráfica 52. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 2 categorías.

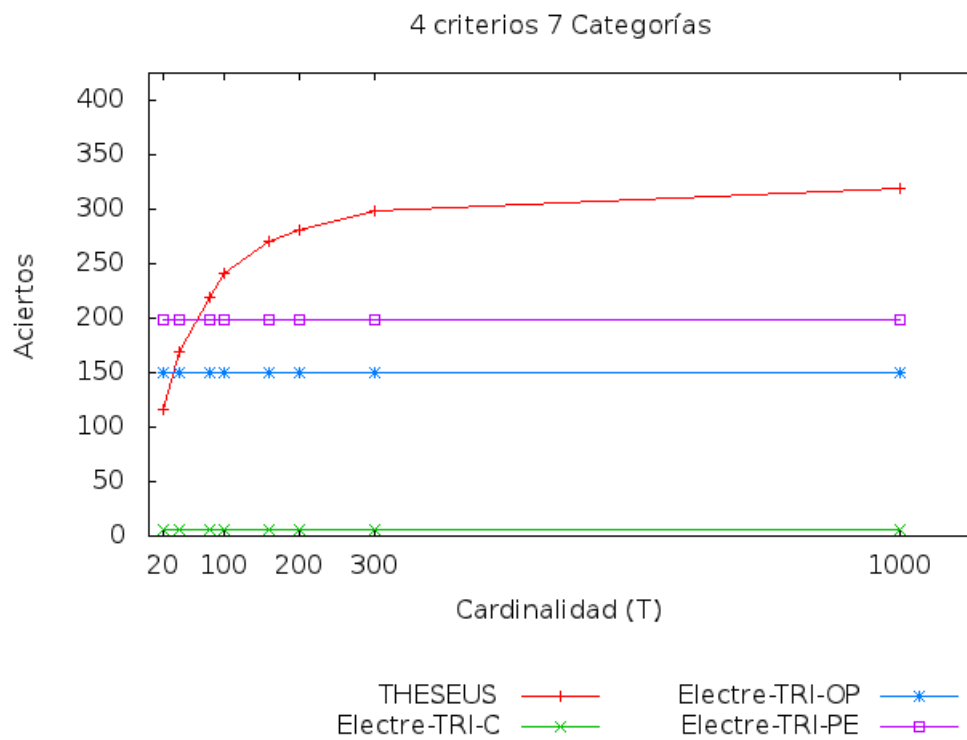
En esta gráfica en particular observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad.



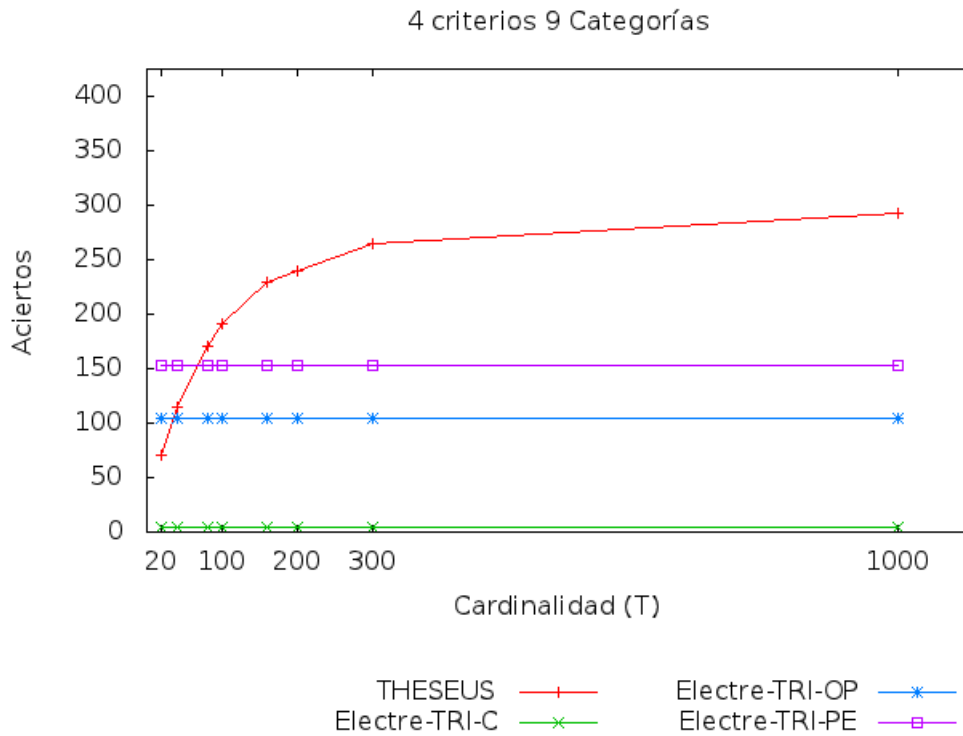
Gráfica 53. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 3 categorías.



Gráfica 54. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 5 categorías.



Gráfica 55. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 7 categorías.

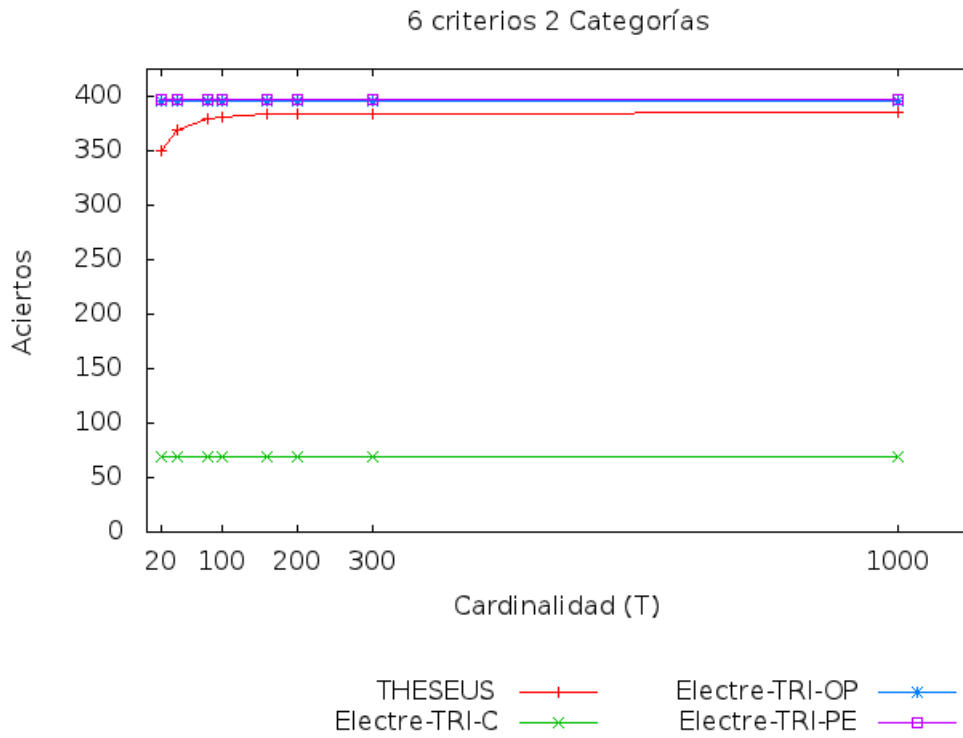


Gráfica 56. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 4 criterios y 9 categorías.

4.4.3 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con seis criterios.

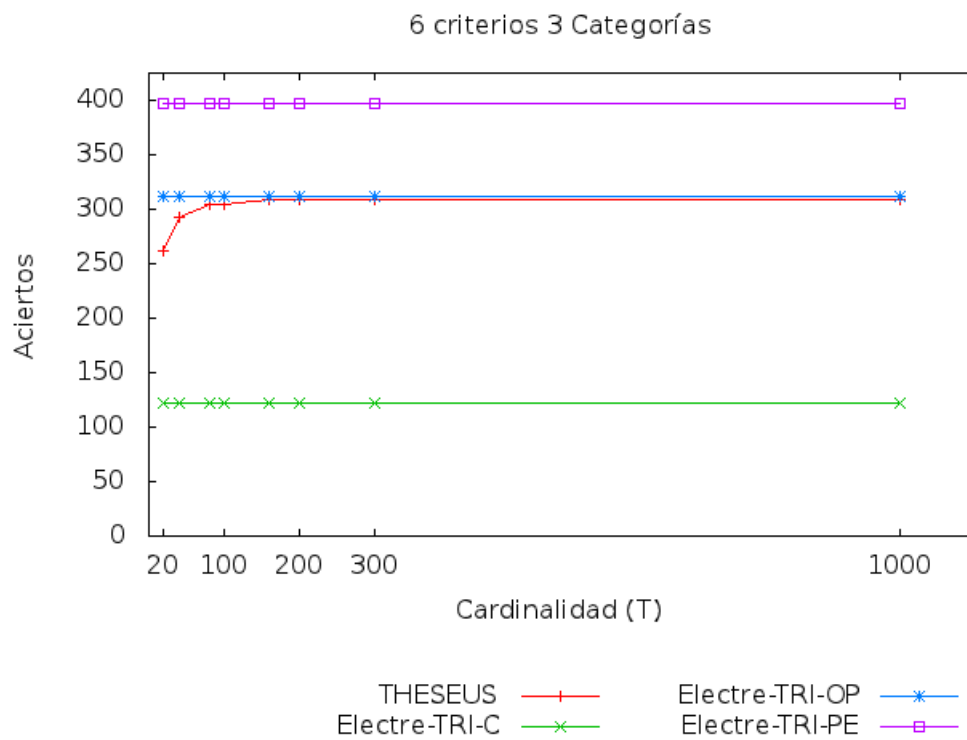
En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista y ELECTRE-TRI-C utilizando seis criterios y variando el número de categorías en función de la cardinalidad del conjunto de referencia.

A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas:

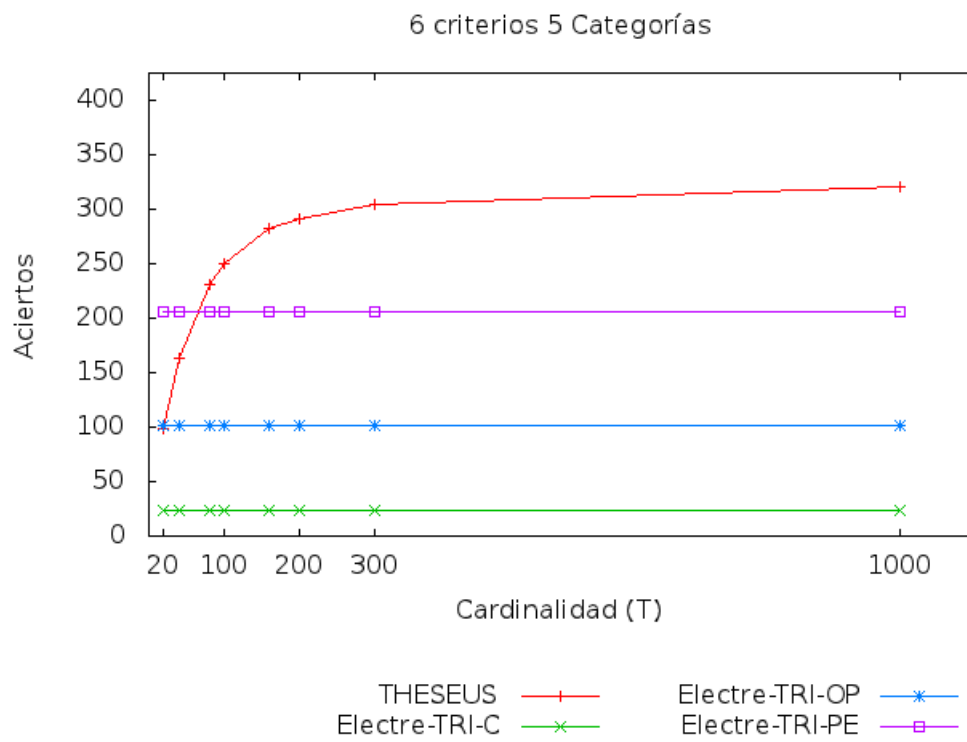


Gráfica 57. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 2 categorías.

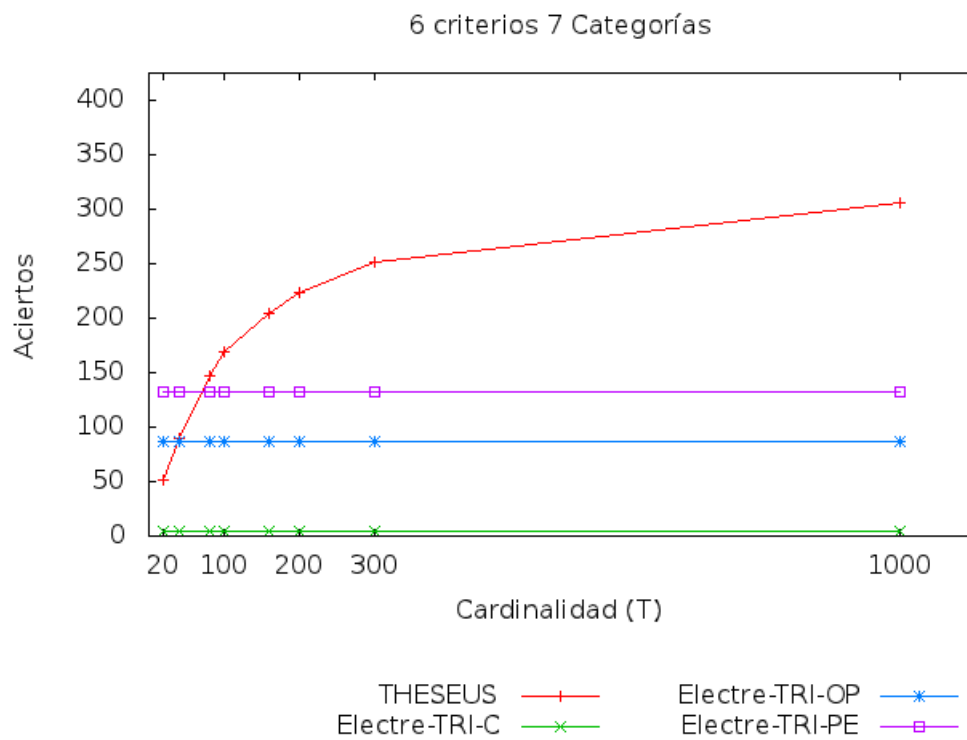
En esta gráfica en particular observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad.



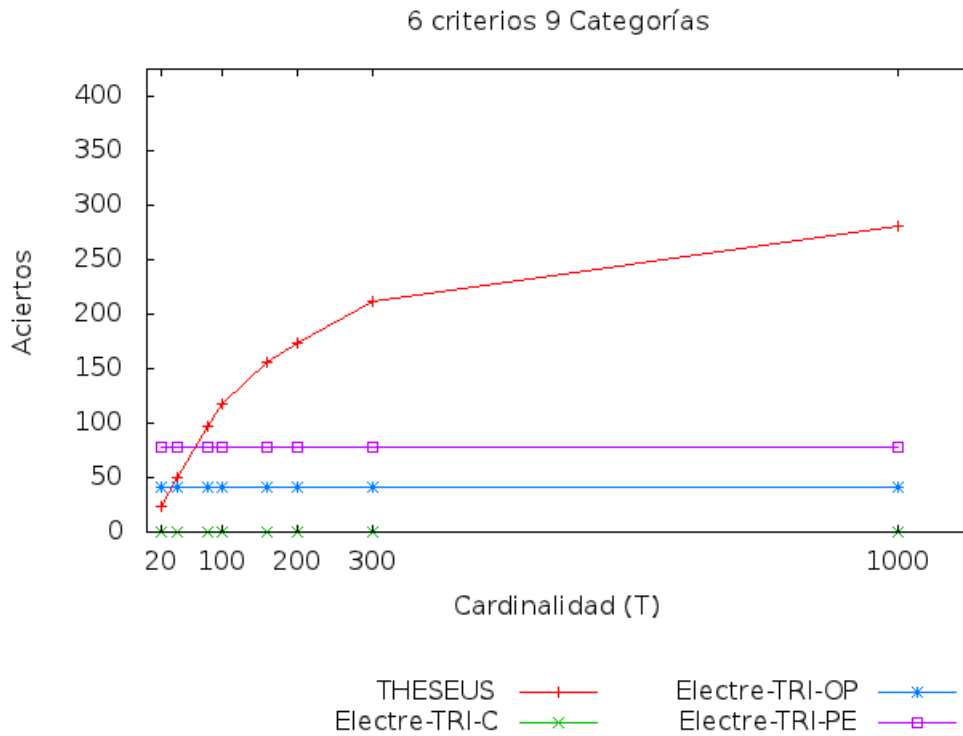
Gráfica 58. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 3 categorías.



Gráfica 59. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 5 categorías.



Gráfica 60. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 7 categorías.

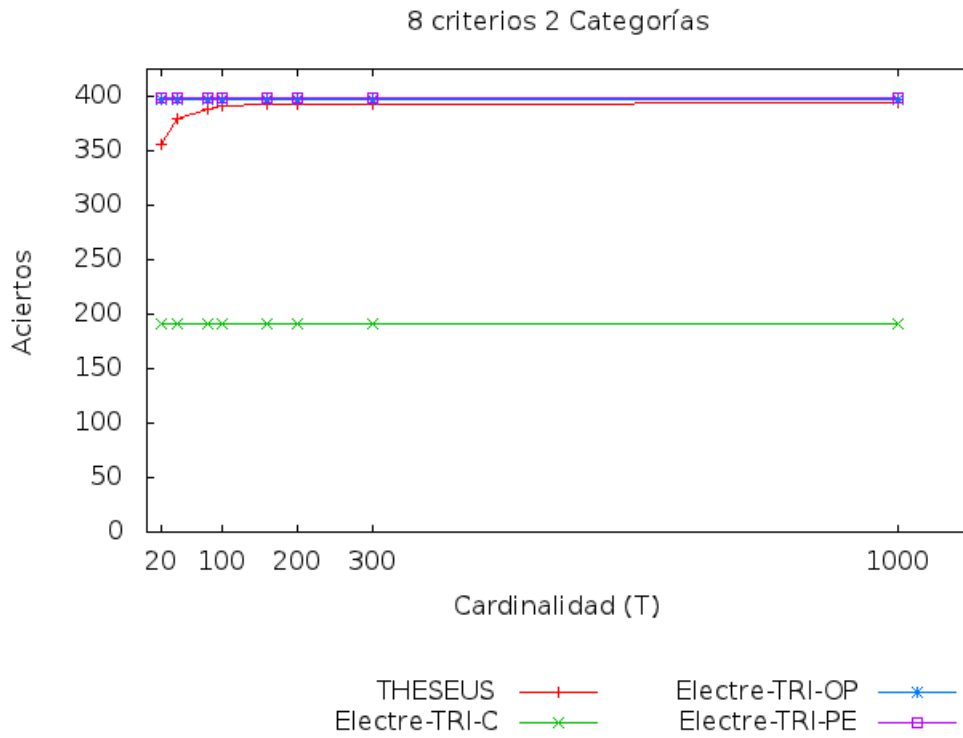


Gráfica 61. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 6 criterios y 9 categorías.

4.4.4 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con ocho criterios.

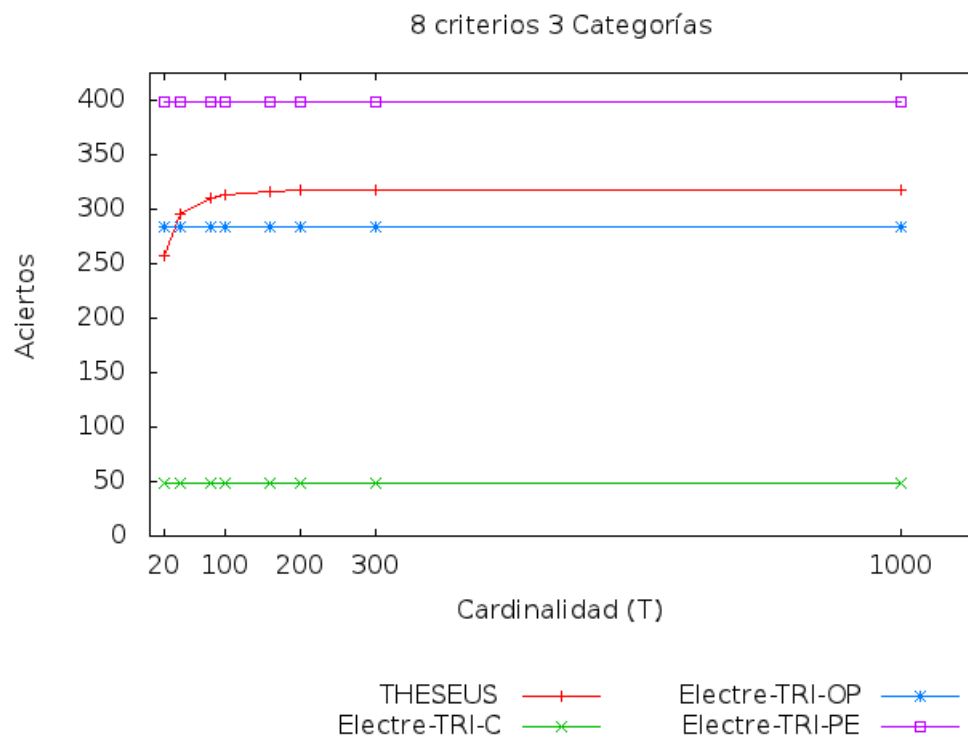
En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista y ELECTRE-TRI-C utilizando ocho criterios y variando el número de categorías en función de la cardinalidad del conjunto de referencia.

A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas:

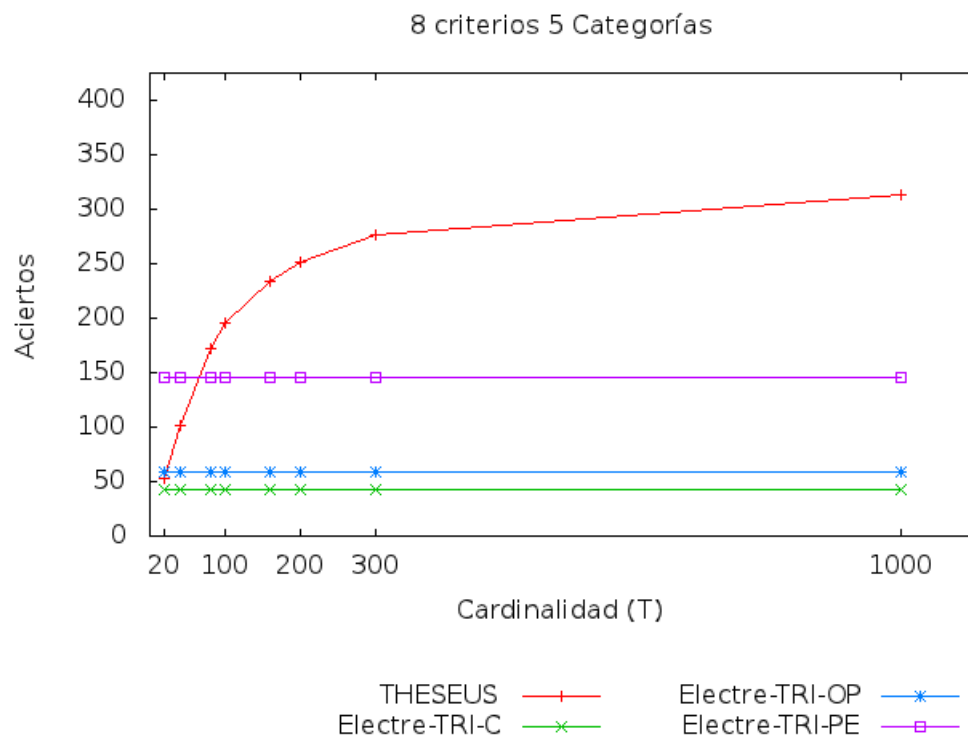


Gráfica 62. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 2 categorías.

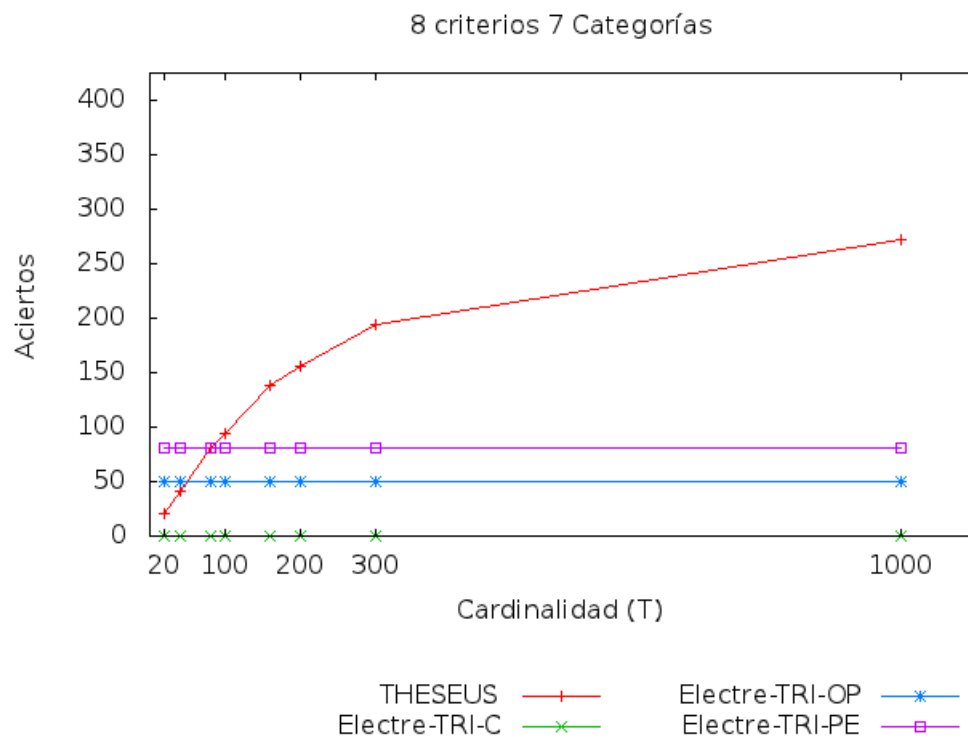
En esta gráfica en particular observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad, la cual prácticamente es igualada por THESEUS a partir de una cardinalidad en el conjunto de referencia de 100.



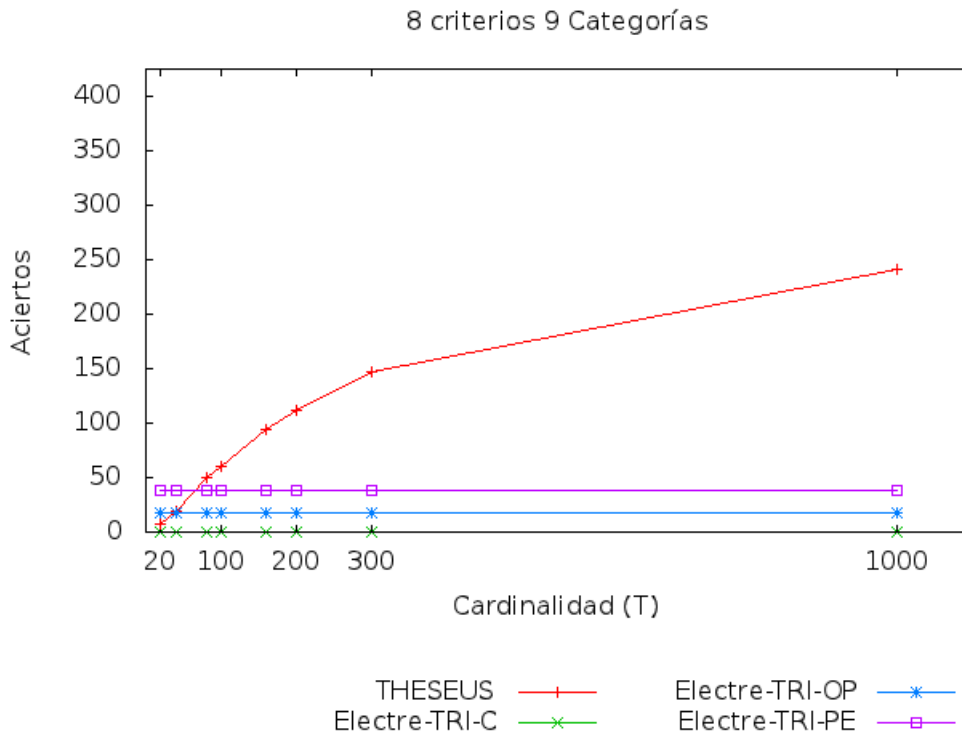
Gráfica 63. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 3 categorías.



Gráfica 64. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 5 categorías.



Gráfica 65. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 7 categorías.

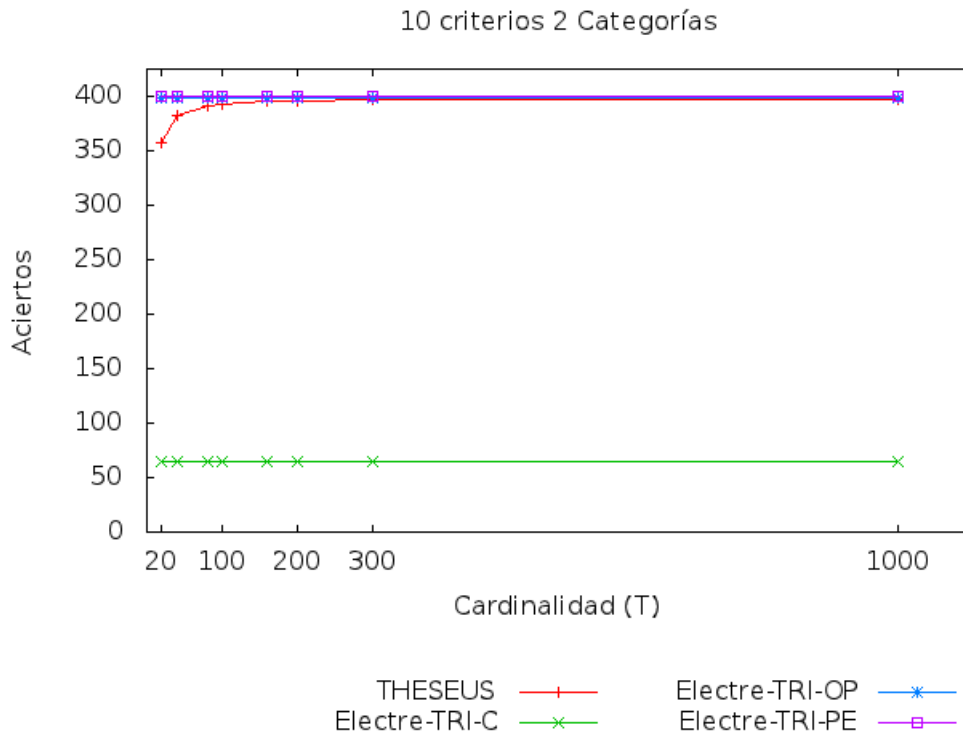


Gráfica 66. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 8 criterios y 9 categorías.

4.4.5 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con diez criterios.

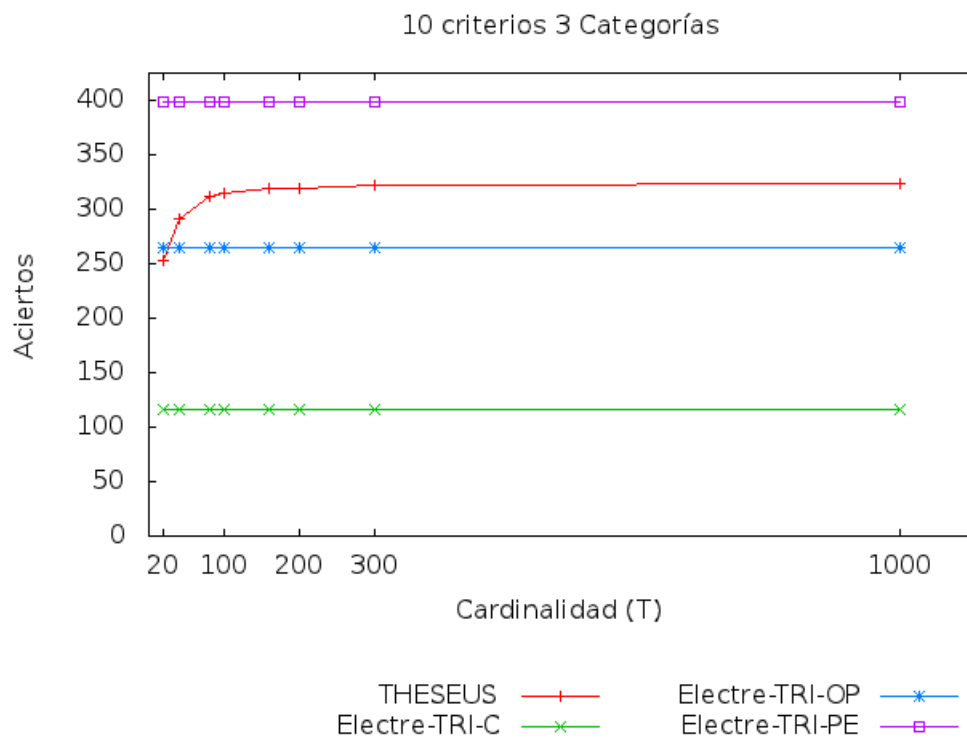
En esta familia de gráficas, podemos observar la efectividad de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI optimista, ELECTRE-TRI pesimista y ELECTRE-TRI-C utilizando diez criterios y variando el número de categorías en función de la cardinalidad del conjunto de referencia.

A continuación mostramos estos resultados en las siguientes gráficas:

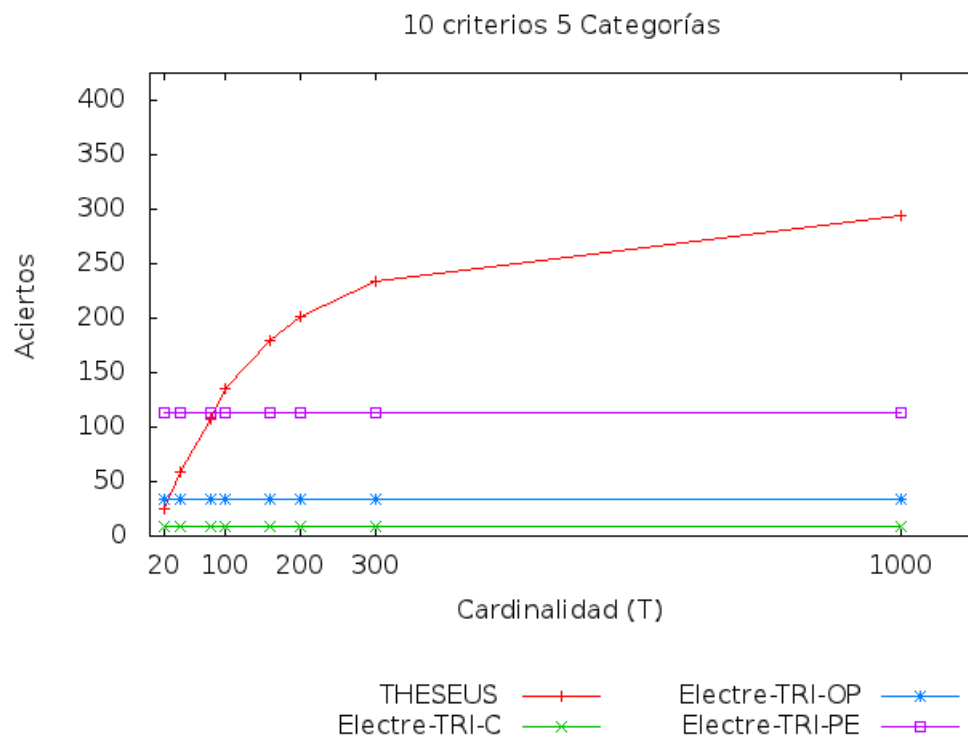


Gráfica 67. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 2 categorías.

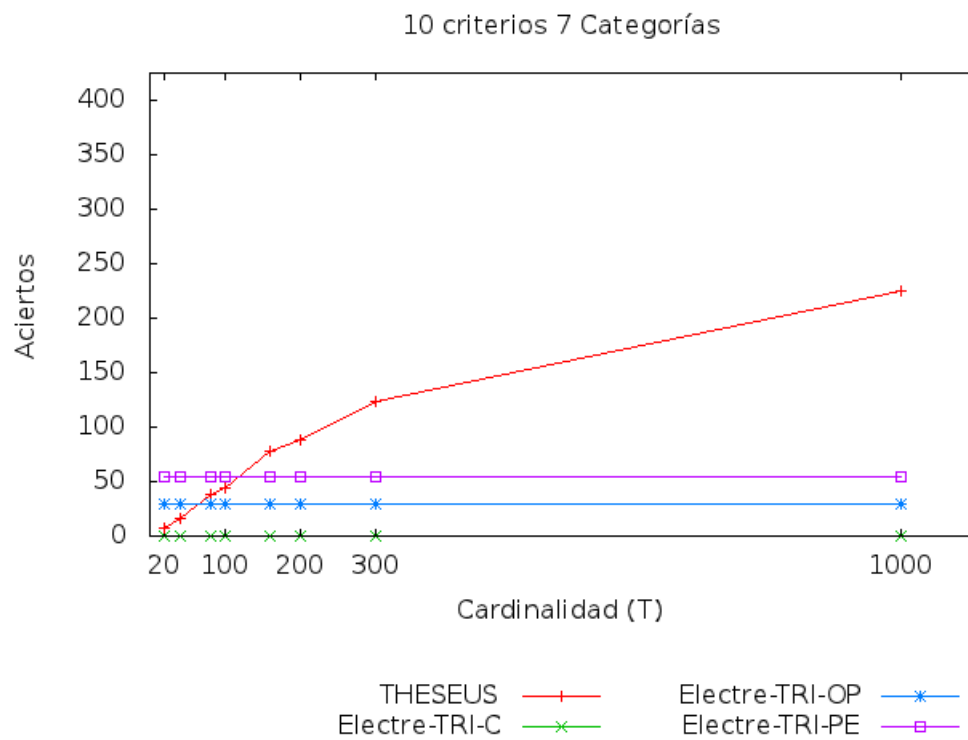
En esta gráfica en particular observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad, siendo alcanzados por el método THESEUS con un tamaño del conjunto de referencia 160.



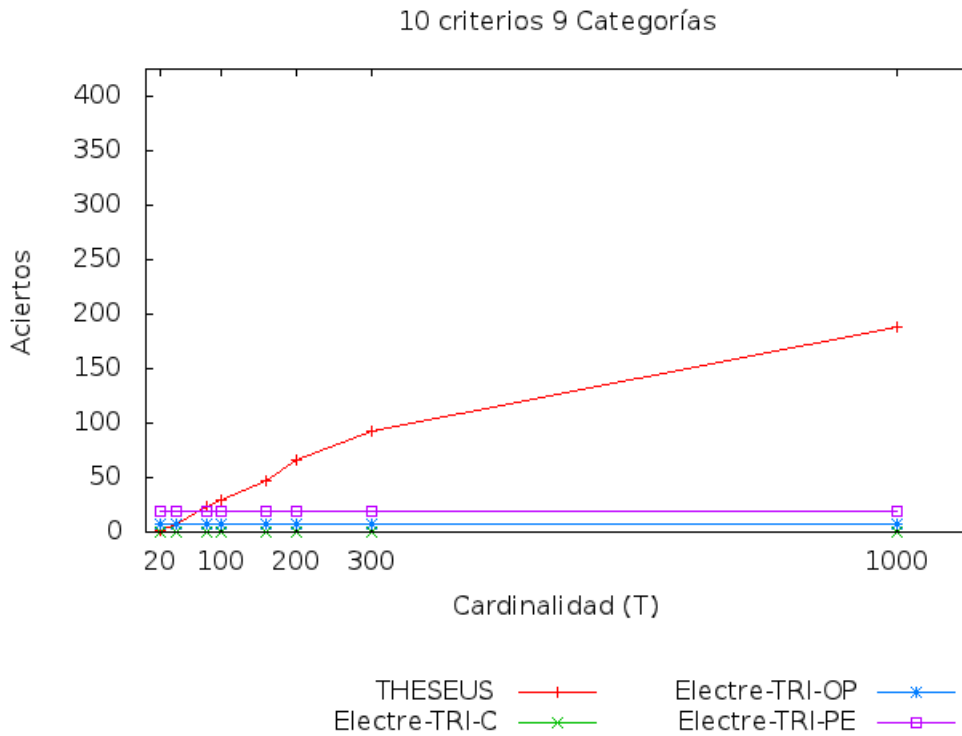
Gráfica 68. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 3 categorías.



Gráfica 69. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 5 categorías.



Gráfica 70. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 7 categorías.



Gráfica 71. Método THESEUS y métodos ELECTRE con 10 criterios y 9 categorías.

CAPÍTULO 5

Discusión y conclusiones

5.1 Efectividad de THESEUS

5.1.1 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con el número de criterios como parámetros

En las gráficas de aciertos contra la cardinalidad del conjunto de referencia, con el número de criterios como parámetros, podemos observar en general, que la tendencia de la efectividad de THESEUS aumenta con el incremento de la cardinalidad del conjunto de referencia (Gráfica 1 a la 5).

Con un número de 2 y 3 categorías (Gráfica 1 y 2), entre mayor sea el número de criterios (6,8 y 10) utilizados se tiene una mejor efectividad que aumenta al incrementar la cardinalidad del conjunto de referencia.

Cuando el número de categorías es mayor de 3 (Gráfica 3,4 y 5), la efectividad de THESEUS es mejor con un número de 3 y 4 criterios que aumenta al incrementar la cardinalidad del conjunto de referencia.

5.1.2 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con el número de criterios como parámetros.

En esta familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con el número de criterios como parámetros, con los distintos cardinalidades del conjunto de referencia, en general podemos observar, que la efectividad de THESEUS decrece en la medida que se aumentan las categorías (Gráfica 6 a la 13).

Con 2 y 3 categorías se tiene una mejor efectividad (Gráficas 6 a la 13), que aumenta entre mayor sea el número de criterios (6, 8 y 10) para cualquier tamaño del conjunto de referencia.

Con categorías mayor a 3 (5,7,9), se puede observar un incremento en la efectividad a medida que se aumenta la cardinalidad del conjunto de referencia, siendo la mejor efectividad para 3,4, y 6 criterios.

5.1.3 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.

En esta familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con la cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros, podemos observar como aumenta la efectividad de THESEUS con 2 categorías y a medida que se

incrementa el número de criterios (3,4,6,8 y 10) (Gráfica 14), correspondiendo la mejor efectividad a la mayor cardinalidad del conjunto de referencia (20, 40, 80, 100, 160, 200, 300 y 1000).

Para 3 categorías (Gráfica 15) esta efectividad se mantiene para todos los criterios (3, 4, 6, 8 y 10) y las diferentes cardinalidades del conjunto de referencia (20, 40, 80, 100, 160, 200, 300 y 1000), para el caso de 8 y 10 criterios y cardinalidad del conjunto de referencia de 20 y 40, se observa un descenso en la efectividad.

En las Gráficas 16, 17 y 18 con categorías (5, 7, 9) se puede observar un descenso en la efectividad a medida que aumentan los criterios (3, 4, 6, 8 y 10), para las diferentes cardinalidades del conjunto de referencia (20, 40, 80, 100, 160, 200, 300, 1000).

5.1.4 Familia de gráficas de aciertos contra número de categorías, con cardinalidad del conjunto de referencia como parámetros.

La mejor efectividad de THESEUS en esta familia de Gráficas, se tiene con 10 criterios, 2 categorías, y con una cardinalidad en el conjunto de referencia mayor a 40 (Gráfica 23).

A medida que aumentan el número de las categorías (3, 5, 7 y 9) y el número de criterios (3,4,6,8, y 10) hay un descenso en la efectividad. Es decir a mayor número de criterios, el menor número de categorías, y mayor cardinalidad en el conjunto de referencia tenemos la mejor efectividad (Gráficas 19 a la 23).

5.1.5 Familia de gráficas de aciertos contra cardinalidad del conjunto de referencia, con número de categorías como parámetros.

En esta familia de gráficas podemos observar en general, un incremento en la efectividad de THESEUS cuando el conjunto de referencia se incrementa.

Encontrando la mejor efectividad con número de categorías igual a 2, número de criterios igual a 10, aumentando a medida que se incrementa el conjunto de referencia (Gráfica 28).

Para número de categorías grandes (5, 7 y 9), se tiene la mejor efectividad con número de criterios pequeños (3, 4, y 6), incrementándose a medida que crece la cardinalidad del conjunto de referencia (Gráfica 24, 25 y 26).

5.1.6 Familia de gráficas de aciertos contra número de criterios, con el número de categorías como parámetros.

En esta familia de gráficas podemos observar que cuando el número de categorías es pequeño (2 y 3), a medida que se incrementa la cardinalidad del conjunto de referencia (20, 40, 80, 100, 200, 300 y 1000), y el número de criterios (3, 4, 6, 8, y 10) se tiene un incremento en la efectividad de THESEUS (Gráficas 29 - 36).

Con número de categorías grandes (5, 7 y 9) se tiene una mejor efectividad de THESEUS con número de criterios pequeños (3, 4 y 6), aumentando al incrementarse la cardinalidad del conjunto de referencia (Gráficas 29 - 36).

5.2 Optimidad de la cardinalidad del conjunto de referencia

5.2.1 Familia de gráficas por categorías para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.

Con número de categorías pequeñas (2 y 3), se recomienda una cardinalidad pequeña (menor o igual a 160) del conjunto de referencia ya que un aumento de

la misma no representa un incremento significativo en la efectividad de THESEUS (Gráficas 37 y 38).

Con base a los resultados de la experimentación para número de categorías grandes (5, 7 y 9) se recomienda el mayor tamaño posible de la cardinalidad del conjunto de referencia, ya que a medida que se incrementa la cardinalidad se tiene un aumento significativo en la eficiencia de THESEUS (Gráficas 39, 40 y 41).

5.2.2 Familia de gráficas por criterios para encontrar el tamaño óptimo de la cardinalidad del conjunto de referencia.

Se puede observar con base a los resultados que independientemente del número de criterios, con dos y tres categorías, una cardinalidad pequeña (menor o igual a 160) del conjunto de referencia es la recomendación ya que un aumento de la misma no representa un incremento significativo en la efectividad de THESEUS (Gráfica 42 - 46).

Cuando se aumenta el número de categorías (5, 7 y 9) y número de criterios (6, 8 y 10), se recomienda el mayor tamaño posible en la cardinalidad del conjunto de referencia ya que a medida que se incrementa se tiene una diferencia significativa en la efectividad de THESEUS (Gráficas 44 a la 46).

5.3 Contrastación de los métodos THESEUS, ELECTRE-TRI y ELECTRE-TRI-C.

5.3.1 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con tres criterios.

En esta familia de gráficas con 3 criterios, podemos observar en lo general, que en número de categorías pequeñas (2 y 3), los métodos optimista y pesimista de

ELECTRE-TRI, tienen una mejor efectividad; en número de categorías grandes (5, 7 y 9) el método THESEUS supera en efectividad a los métodos ELECTRE-TRI optimista y pesimista; el método ELECTRE-TRI-C fue superado por los tres métodos mencionados anteriormente en todas las pruebas.

En la Gráfica 47, con 3 criterios y 2 categorías, podemos observar que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad.

Con 3 criterios, y con un número de 2 y 3 categorías se puede observar una mejor efectividad en los procedimientos optimista y pesimista del método ELECTRE-TRI (Gráficas 47 y 48).

Con 3 criterios y 5 categorías THESEUS alcanza la efectividad de los procedimientos optimista y pesimista con una cardinalidad del conjunto de referencia igual a 160, superándolos a medida que se incrementa el número de categorías (7 y 9) y con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 100, teniendo un mejor desempeño al ir incrementándose la cardinalidad del conjunto de referencia (Gráficas 49,50 y 51).

5.3.2 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con cuatro criterios.

En esta familia de gráficas con 4 criterios, con un número de categorías pequeño (2 y 3) se tiene una mejor efectividad con los procedimientos optimista y pesimista del método ELECTRE-TRI; a partir de 5 categorías y con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 80, la efectividad de THESEUS supera la de los

métodos ELECTRE-TRI en ambos procedimientos; El método ELECTRE-TRI-C fue superado por los métodos ELECTRE-TRI (optimista y pesimista) y THESEUS.

En la gráfica 52, con 4 criterios y 2 categorías podemos observar que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad.

Con 4 criterios y 5 categorías THESEUS alcanza y supera la efectividad de los procedimientos optimista y pesimista del método ELECTRE-TRI con una cardinalidad del conjunto de referencia de 80 (Gráfica 54), aumentando la efectividad a medida que se incrementa la cardinalidad del conjunto de referencia, superándolos también en 7 y 9 categorías (Gráficas 55 y 56).

5.3.3 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con seis criterios.

En esta familia de gráficas con 6 criterios y 2 categorías, los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI tienen una misma efectividad la cual es superior al método THESEUS y ELECTRE-TRI-C (Gráfica 57).

Con 6 criterios y 3 categorías, el procedimiento pesimista continua con la mejor efectividad, THESEUS alcanza la efectividad del procedimiento optimista con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 160 (Gráfica 58).

Con 6 criterios y con número de categorías grandes (5,7 y 9) THESEUS supera la efectividad de los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 80 (Gráficas 59, 60 y 61).

El método ELECTRE-TRI-C fue superado en las distintas evaluaciones por los 3 métodos mencionados anteriormente.

5.3.4 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con ocho criterios.

En esta familia de gráficas con 8 criterios y 2 categorías observamos que no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad, la cual prácticamente es igualada por THESEUS a partir de una cardinalidad del conjunto de referencia de 100 (Gráfica 62).

Con 8 criterios y 3 categorías, el procedimiento pesimista tiene una mejor efectividad, THESEUS supera la efectividad del procedimiento optimista con una cardinalidad del conjunto de referencia de 40 (Gráfica 63).

Con 8 criterios y número de categorías grandes (5, 7 y 9), THESEUS supera a los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 80 (Gráficas 64, 65 y 66).

El método ELECTRE-TRI-C fue superado en las distintas evaluaciones por los 3 métodos mencionados anteriormente.

5.3.5 Familia de gráficas del método THESEUS y métodos ELECTRE con diez criterios.

Como se muestra en la gráfica 67, con 10 criterios y 2 categorías la efectividad de los métodos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, es prácticamente alcanzada

por THESEUS con un conjunto de referencia de cardinalidad 160, e igualada con un conjunto de referencia de cardinalidad 200.

Con 10 criterios y 3 categorías el procedimiento pesimista tiene una mejor efectividad, superando THESEUS al procedimiento optimista con una cardinalidad del conjunto de referencia de 40 (Gráfica 68).

Con 10 criterios y 5 categorías, THESEUS alcanza al procedimiento pesimista con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 80 y con 100 lo supera (Gráfica 69).

Con 10 criterios y 7 categorías y con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 160 THESEUS supera a los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI (Gráfica70).

Con 10 criterios y 9 categorías y con una cardinalidad del conjunto de referencia de 80 THESEUS supera la efectividad de los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI (Gráfica71).

El método ELECTRE-TRI-C fue superado en las distintas evaluaciones por los 3 métodos mencionados anteriormente.

5.4 Conclusiones

En base a la experimentación realizada, con 2 y 3 categorías el procedimiento pesimista de ELECTRE-TRI fue superior en efectividad al método THESEUS, independientemente del número de criterios y de la cardinalidad del conjunto de

referencia, que lo podemos observar en 8 de las 10 gráficas que corresponden a estas categorías (Gráficas 47,48,52,53,57,58,63 y 68).

En la Gráfica 62 con 8 criterios y 2 categorías los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, tienen una misma efectividad, que es prácticamente igualada por el método THESEUS a partir de una cardinalidad del conjunto de referencia de 100, manteniendo una misma efectividad con los procedimientos de ELECTRE-TRI a medida que se incrementa el conjunto de referencia (160, 200, 300 y 1000).

En la Gráfica 67 con 10 criterios y 2 categorías no hay una diferencia significativa entre los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, quedando en una misma efectividad, siendo alcanzados por el método THESEUS con una cardinalidad en el conjunto de referencia de 160 continuando con la misma efectividad con los siguientes conjuntos de referencia (200, 300 y 1000).

El procedimiento optimista de ELECTRE-TRI fue superior en efectividad al método THESEUS en los casos de 3 criterios con 2 y 3 categorías, 4 criterios con 2 y 3 categorías, 6 criterios con 2 categorías, en 5 de las 10 gráficas que corresponden a estas categorías (Gráficas 47,48,52,53 y 57).

En la Gráfica 58 con 6 criterios y 3 categorías, THESEUS alcanza la efectividad del procedimiento optimista con una cardinalidad del conjunto de referencia de 160 continuando con la misma efectividad para los siguientes conjuntos de referencia (200, 300 y 1000).

THESEUS supera la efectividad del procedimiento optimista en los siguientes casos: con 8 criterios y 2 categorías y una cardinalidad del conjunto de referencia de 40 (Gráfica 63) aumentando su efectividad a medida que se incrementa el conjunto de referencia. Con 10 criterios y 3 categorías y una cardinalidad en el conjunto de referencia de 40 (Gráfica 68) aumentando su efectividad a medida que se incrementa el conjunto de referencia.

THESEUS supera en efectividad a ambos procedimientos de ELECTRE-TRI, en todos los casos de categorías grandes (5, 7, y 9) independientemente del número de criterios y con una cardinalidad del conjunto de referencia de 80 objetos, aumentando su efectividad al incrementar la cardinalidad del conjunto de referencia.

Con base en las discusiones anteriores derivadas de la contrastación de THESEUS con los métodos ELECTRE, podemos concluir que para problemas con características pequeñas (con 2 y 3 categorías), nuestra propuesta es el método conjuntivo (pesimista) de ELECTRE-TRI, ya que demostró tener mejor desempeño en la experimentación.

Cuando las características del problema se incrementan (número de criterios mayor de 4, número de categorías mayor de 3), el rendimiento de THESEUS supera a los procedimientos optimista y pesimista de ELECTRE-TRI, incrementando su efectividad a medida que se incrementa la cardinalidad del conjunto de referencia.

En el caso de la efectividad del método THESEUS, cuando las características del problema tienen categorías pequeñas (2 y 3) THESEUS tiene un mejor rendimiento cuándo se tienen un mayor número de criterios (6, 8 y 10), al aumentar las categorías (5, 7 o 9) se incrementa la efectividad de THESEUS con menor número de criterios (3, 4).

Con base a la experimentación podemos concluir en general que al incrementar la cardinalidad del conjunto de referencia, aumenta la efectividad del método THESEUS.

Cuando los valores de las características del problema son pequeñas (3 o 4 criterios y 2 o 3 categorías), solo se requiere una cardinalidad del conjunto de referencia en un rango de 20 a 40 objetos ya que un incremento al mismo no

representa un aumento estadísticamente significativo en su efectividad, pero al aumentar los valores de las características (6, 8 o 10 criterios y 5, 7 o 9 categorías), se tiene un aumento significativo en la efectividad de THESEUS al incrementar en lo posible la cardinalidad del conjunto de referencia.

Trabajos futuros.

Esta investigación, como todas, da pie a nuevas preguntas que tendrían que ser contestadas en futuros trabajos.

Uno de ellos sería la incorporación de otros métodos al análisis realizado, que no fueron tomados en cuenta debido a las limitantes temporales que se tenían, pero que en trabajos futuros se pueden realizar.

Otro es el análisis de las causas del comportamiento asintótico de THESEUS al aumentar la cardinalidad del conjunto de referencia en algunos problemas, lo anterior debido a que se esperaba que al aumentar la información disponible aumentara la capacidad de clasificación, y en los resultados experimentales se observó que la capacidad de clasificación llegó a un máximo en ciertos problemas. Es de sumo interés encontrar las causas que provocan este comportamiento.

A la luz de los resultados experimentales del presente trabajo, surge la necesidad de realizar un análisis teórico comparativo entre los métodos.

6. Referencias bibliográficas

Almeida-Dias J., Figueira J., Roy B., (2009), ELECTRE-TRI-C: A multiple criteria sorting method based on characteristic reference actions. *Europa journal of Operational Research*, [doi:10.1016/j.ejor.2009.10.018]

Belacel N., (2000), "Multicriteria assignment method PROAFTN: Methodology and medical applications", *European Journal of Operational Research*, 125, 175-183

Bouyssou D., (1990): "Build criteria: A prerequisite for MCDA", In C.A. Bana e Costa, editor, *Readings in Multiple Criteria Decision Aid*, Springer-Verlag, Berlin, pp. 58-80.

Brans J.P., Mareschal B. and Vincke P., (1984), 'PROMETHEE : A new family of outranking methods in MCDM', in *IFORS'84*, North Holland.

Caballero R., Romero C., (2007), *Teoría de la decisión multicriterio: un ejemplo de revolución científica kuhniana*. Universidad Politécnica de Madrid, España.

Catelani, M. and Fort, A., (2000), "Fault diagnosis of electronic analog circuits using a radial basis function network classifier", *Measurement*, 28/3, 147-158.

Diakoulaki D., Zopounidis C., Mavrotas G. and Doumpos M., (1999), "The use of a preference disaggregation method in energy analysis and policy making", *Energy–The International Journal*, 24/2, 157-166.

Doumpos M., Zopounidis C., (2002), *Multicriteria Decision AID Classification Methods*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Dutka, A., (1995), *AMA Handbook of Customer Satisfaction: A Guide to Research, Planning and Implementation*, NTC Publishing Group, Illinois.

Fernández, E., Navarro, J., (2011), A new approach to multicriteria sorting problems based on fuzzy outranking relations: The THESEUS method. *European Journal of Operational Research* 213, 405-413.

Fernández, E., Navarro, J., Bernal, S., (2009), Multicriteria sorting using a valued indifference relation under a preference-disaggregation paradigm. *European Journal of Operational Research* 198, 602-609.

Fernández, E., Navarro, J., Duarte, A., (2008), Multicriteria sorting using a valued preference closeness relation. *European Journal of Operational Research* 185, 673-686.

Figueira, J., Greco S., Ehrgott M., (2005), *Multiple Criteria Decision Analysis: State Of The Art Surveys*, Springer.

Keeney R., Raiffa H. (1976), *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, New York.

Navarro, J., (2005), "Herramientas Inteligentes para la Evaluación y Selección de Proyectos de Investigación-Desarrollo en el Sector Público". Tesis de doctorado en Ciencias de la Computación. Universidad Autónoma de Sinaloa.

Nieddu, L. and Patrizi, G., (2000), "Formal methods in pattern recognition: A review", *European Journal of Operational Research*, 120, 459-495.

Perny, P., (1998), "Multicriteria Filtering Methods Based on Concordance and Non-Discordance Principles", *Annals of Operations Research*, 156 (2), pp. 37-165.

- Ripley, B.D., (1996), Pattern Recognition and Neural Networks, Cambridge University Press, Cambridge.
- Roy B., (1968), Classement et choix en présence de points de vue (La méthode ELECTRE), RIRO 8, 57-75.
- Roy B., (1985), *Méthodologie Multicritère d' Aide à la Décision*, Economica, Paris.
- Roy, B., (1991), The outranking approach and the foundations of ELECTRE methods. Theory and Decision 31, 49-73.
- Roy B., (1996), Multicriteria Methodology for Decision Aiding, Kluwer Academic Publishers.
- Roy B., Bouyssou D., (1993), Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas, Economica, Paris.
- Roy, B., Slowinski, R., (2008), Handling effects of reinforced preference and counter-veto in credibility of outranking. European Journal of Operational Research 188, 185-190.
- Saaty, T.L., (1980), The Analytic Hierarchy Process. McGraw-Hill International, New York, NY, U.S.A.
- Shen, L., Tay, F.E.H, Qu, L. and Shen, Y., (2000), "Fault diagnosis using rough sets theory", Computers in Industry 43, 61-72.

Siskos, Y., Grigoroudis, E., Zopounidis, C. and Saurais, O., (1998), "Measuring customer satisfaction using a survey based preference disaggregation model", *Journal of Global Optimization*, 12/2, 175-195.

Tsumoto, S., (1998), "Automated extraction of medical expert system rules from clinical databases based on rough set theory", *Information Sciences*, 112, 67-84.

Young, T.Y and Fu, K.-S., (1997), *Handbook of Pattern Recognition and Image Processing*, Handbooks in Science and Technology, Academic Press.

Yu W., (1992): *ELECTRE TRI: Aspects methodologiques et manuel d' utilization*, Document du Lamsade no. 74, Université de Paris-Dauphine.

Zopounidis, C., (1998), *Operational Tools in the Management of Financial Risks*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Zopounidis, C. and Doumpos, M. (1998), "Developing a multicriteria decision support system for financial classification problems: The FINCLAS system", *Optimization Methods and Software*, 8, 277-304.

Zopounidis, C. and Pardalos P., (2010), *Applied Optimization, Handbook of multicriteria analysis*, Springer, ISBN 978-3-540-92827-0.